ISSN 2091-5446

ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК SCIENTIFIC JOURNAL

2019-yil, 5-son (117) ANIQ FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro‘yxatdan o‘tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro‘yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR **R. I. XALMURADOV, t.f.d. professor**
BOSH MUHARRIR O‘RINBOSARLARI: **H.A. XUSHVAQTOV, f-m.f.n., dotsent**
A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

M. X. ASHUROV - O‘zFA akademigi
T. M. MO‘MINOV - O‘zFA akademigi
SH. A. ALIMOV - O‘zFA akademigi
S. N. LAKAYEV - O‘zFA akademigi
T. RASHIDOV - O‘zFA akademigi
N. N. NIZAMOV - f.-m.f.d., professor
A. S. SOLEEV - f.-m.f.d., professor
I. A. IKROMOV - f.-m.f.d., professor
B. X. XO‘JAYAROV - f.-m.f.d., professor
I. I. JUMANOV - f.-m.f .d., professor
E. A. ABDURAXMONOV - k.f.d., professor
N. K. MUXAMADIYEV - k.f.d., professor
J. X. XO’JAYEV - b.f.d., professor
Z. I. IZZATULLAYEV - b.f.d., professor
Z. F. ISMAILOV - b.f.d., professor
X.K. XAYDAROV - b.f.d., professor
S. B. ABBOSOV - geogr.f.d., professor
L. A. ALIBEKOV - geogr.f.d., professor
A. A. ABULQOSIMOV - geogr.f.d., professor
X. SHODIYEV -Professor(Canada)
L. SOBIROV - f.-m.f .d., professor
X. X. XUDOYNAZAROV -t.f.d., professor

Obuna indeksi – yakka tartbidagi obunachilar uchun **- 5583,**
tashkilot, korxonalar uchun **- 5584**

MUNDARIJA / СОДЕРЖАНИЕ / CONTENTS

MATEMATIKA / МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

I.A.Ikromov, Sh.A.Muranov
On estimates for the damped oscillatory integrals 4

А.Х. Бегматов, А.С. Исмоилов
Задача интегральной геометрии в полосе с весовой функцией 12

А.В.Кабулов, Э.Урунбаев, И.Х.Норматов, А.О.Ашуров
Представление логических операций в десятичной системе исчисления 18

O. Mirzayev, G‘. Mannonov, H. Normurodov
Izospektral Shturm – Liuvill chegaraviy masalalar oilasi haqida 23

З.Р.Рахмонов, Ж.Э.Урунбаев, Д.И.Ярметова
Численное решение задачи кросс диффузии с нелокальными граничными условиями и переменной плотностью 28

М.К.Расулова, Ш.Л.Мамасолиева
Применение метода математического анализа для экспертной оценки выбора значимости свойств тканей для спецодежды 37

Д.С.Шодиев
О задаче Коши для уравнений Лапласа на плоскости 41

С.И.Халикулов
Спектральное представление однородного и изотропного случайного поля на плоскости 47

И. Э. Ниёзов, О.Каршибоев
О задаче Коши для системы теории упругости на плоскости 50

А.С.Матякубов, Д.Р.Раупов
Асимптотическое поведение blow-up решений нелинейного параболического систем уравнений недивергентного вида 53

Sh.A.Urolov
Funksional operatorlarning jamlanuvchi funksiyalar fazosida bir tomonlama teskarilanuvchanlik shartlari 58

Х.Х. Имомназаров, С.Б. Куйлиев
Об одной двухскоростной математической модели двухжидкостных сред с одним давлением 61

С. Очилов, Д.Ибрагимова
Задача оптимального прохождения области с разрывным интегралом 68

A.O.Zunnunov
Doirada quvish masalasida o’yinni tugatish vaqtini baholash 73

MEXANIKA / МЕХАНИКА / MECHANICS

Б.Х.Хужаёров, Ж.М.Махмудов, А.И.Усмонов, Б.О.Саидов
Задача переноса вещества в цилиндрической пористой среде с фрактальной структурой с учетом адсорбционных явлений 87

А.З.Хасанов, Н.А.Набиева
Экспериментальные исследования напряженно- деформированного состояния грунта вокруг скважины при осесимметричном давлении от песчанного прессиометра 100

R.Malikov, M.Zokirov
Qarshilik momenti hisobga olingan dvigatel vali harakatida energiya sarfini minimallashtirish masalasi 104

INFORMATIKA/ ИНФОРМАТИКА /INFORMATICS

И.И. Жуманов, Х.Б. Каршиев
Оптимизация достоверности информации в системах электронного документооборота с использованием оценок критериальных характеристик и особенностей документов 108

H.N.Zaynidinov, J.O‘.Jo‘raev
Kubik splayn asosida interpolyasiyalash aniqligini oshiruvchi algoritm va dasturiy vositalar 117

I.N.Turakulov, N.Rabimov
Python algoritmik tilida fizik jarayonlarni modellashtirish 121

Juskarman Brar, Hasan Shodiev
Computational thinking and graphical simulation across disciplines 124

FIZIKA / ФИЗИКА / PHYSICS

Л.М.Сабиров, Д.И.Семенов, Х.С.Хайдаров, Ф.Р.Исмаилов
Лазерная спектоскопия Мандельштам – Бриллюэнского рассеяния в водных растворах неэлектролита 129

Ф.Р. Ахмеджанов, А.Ф. Болтабаев, Э.Н. Курталиев, Ж.Т. Назаров
Затухание ультразвуковых волн и акустический параметр Грюнайзена в алюминиевых сплавах 150

Н. Холдоров, И. Турдибеков, Ф.Джамолов
Изучение динамики оптических свойств поверхностей и некоторых физических параметров боросликатных стекол 154

Н.Н.Базарбаев, Т.Т.Мавланов, И.Т.Муминов, Т.М.Муминов, О.Б.Маматкулов, Р.Р.Муратов, Л.Т.Нурмуродов, Б.А.Синдаров, К.И.Умаров, А.Т.Худойбердиев
Плотности потоков радоне в почвах Нуратинского и отрогах Зарафшанского хребтов 157

Э.М.Ибрагимова, А.Н.Салахитдинов, М.К.Салахитдинова
Обнаружение метаматериальных свойств в калиевоалюмоборатных стеклах с добавками оксидов железа, подвергнутых термическому, радиационному и терморадиационному воздействию 160

О.Рахимов, А.А.Эшбеков, С.Н.Сражев
Скопление центров донорного типа в р-кремнии, выращенном по методу чохральского и их взаимодействие с собственными точечными дефектами 165

B.Sh. Jurayev, S.Sh. Ergashev, L.F. Iskandarova, O.B. Saydayev
Maydanak observatoriyasida kuzatilgan blazarlarning optik yorqinlik o‘zgarishlari 170

K.E. Ergashev, Y.Sh. To‘rayev, B.Sh. Jurayev, A.Q.Ajabov
Maydanak observatoriyasida (5889) Mickiewicz va (13063) Purifoy asteroidlarining kuzatuvlari tahlili 174

Э.Ю.Тураев, Ш.С.Замонова
Параметры тензора градиента электрического поля в узлах бария для $YBA_2CU_3O_{7-X}$, определенные методом мессбауэровской спектроскопии 177

Mualliflarga

UDC: 517.518.5

ON ESTIMATES FOR THE DAMPED OSCILLATORY INTEGRALS

I.A.Ikromov, Sh.A.Muranov
Samarkand state university
E-mail: ikromov1@rambler.ru, muranov-2017@mail.ru

Abstract. In this paper we consider estimates of the Fourier transform measures, concentrated on analytic hypersurfaces containing the of damping factor. The paper presents the solution of the problem S.D.Soggi and I.M. Stein about the optimal decay of the transformation Fourier measures with a damping factor for any analytic surfaces in three-dimensional Euclidean space.

Keywords: oscillatory integrals, Fourier transform, damping factor, maximal operator.

Об оценках демпфированных осцилляторных интегралов

Аннотация. В данной работе рассматриваются оценки преобразования Фурье мер, сосредоточенных на аналитических гиперповерхностях, содержащих множитель гашения. В статье рассматривается задача С.Д.Согги и И.М.Стейна об оптимальном убывании преобразования Фурье мер с множителем гашения для произвольных аналитических поверхностей трехмерного Евклидова пространства.

Ключевые слова: осцилляторные интегралы, преобразование Фурье, множитель гашения, максимальный оператор.

So‘ndiruvchi ko‘paytuvchili tebranuvchan integralar bahosi

Annotatsiya. Bu ishda gipersirtlarda mujassamlashgan So‘ndiruvchi ko‘paytuvchiga ega o‘lchovning Fure almashtirishi bahosi qaralgan. Shuningdek ishda S.D.Soggi va I.M.Steyinlar tomonidan qo‘yilgan o‘lchovning Fure almashtirishining optimal bahosini topish masalasini uch o‘lchovli Evklid fazosidagi ixtiyoriy analitik sirtlarda tadqiq qilingan.

Kalit so‘zlar: tebranuvchan integrallar, Fure almashtirishi, so‘ndiruvchi ko‘paytuvchi, maksimal operator.

1. Introduction

In connection with the boundedness problem for the maximal operators, associated to hypersurface $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ by S.D. Soggy and I.M. Stein [1] introduced the following damped oscillator integrals

$$\hat{\mu}_q(\xi) := \int_S e^{i(\xi,x)} |K(x)|^q \psi(x) d\sigma(x), \tag{1.1}$$

where $K(x)$ is the Gaussian curvature of the hypersurface at the point $x \in S$ and $\sigma(x)$ is a surface measure, $\psi \in C_0^\infty(S)$ is smooth non-negative function, (ξ, x) is an inner product of ξ and x. They proved that if $q \geq 2n$, then integral (1.1) decays in order $O(|\xi|^{-\frac{n}{2}})$ (as $|\xi| \to +\infty$).

Statement of the problem

Let $S \subset \mathbb{R}^n$ be a smooth hypersurface. Find a minimum value of q such that the following estimate

$$\left| \int_S e^{i(x,\xi)} |K(x)|^q \psi(x) d\sigma(x) \right| \leqq A|\xi|^{-\frac{n}{2}}$$

holds.

The analogical problem was proposed by C.D. Sogge and E.M. Stein for a fixed hypersurface in [1]. It was proved in [5] that integral (1.1) decays optimally, if $0 \leq \psi(x) \leq |K(x)|^{\frac{1}{2}}$ and $\psi \in C_0^\infty(S)$, whenever S is a convex finite linear type hypersurface. In one-dimensional case, more precisely, when the curve S is given by a polynomial function the solution of the problem follows from the results of Oberlin [2].

In this paper we represent a solution of the problem of C.D. Sogge and E.M. Stein for analytic surfaces in three-dimensional Euclidean space.

We can suppose that S is given as the graph $x_3 = \Phi(x_1, x_2)$, defined on a neighborhood of the origin, more precisely:

$$S := \{(x_1, x_2) \in V \subset \mathbb{R}^2 : x_3 = \Phi(x_1, x_2), \Phi(x_1, x_2) := u(x_1, x_2) x_1 x_2^n\} \tag{1.2}$$

This work was supported by the Executive Committee for the Coordination of Science and Technology of the Council of Ministers of the Republic of Uzbekistan under grant F-4-69.

where $u(0,0) \neq 0, n \geq 2$. If $n = 1$ then integral $\hat{\mu}_q(\xi)$ optimally decays for any q, since $detHess\Phi(x_1, x_2) \neq 0$. So further, assume that $n \geq 2$. In (1.2), we will assume $u(0,0) = 1$, V is a small neighborhood of the origin and $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Then, for the function $detHess\Phi(x_1, x_2)$ the following quality holds true

$$\det Hess\Phi(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2)x_2^{2(n-1)},$$

where $u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ and $u_1(0,0) = -n^2$.

The integral (1.1) can be written in the form:

$$\hat{\mu}_q(\xi) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 \Phi(x_1,x_2))} |x_2|^{2q(n-1)} a_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \tag{1.3}$$

where $a_1(x_1, x_2) = \frac{\psi(x_1,x_2,\Phi(x_1,x_2))|u_1(x_1,x_2)|^q}{\sqrt{(1+|\nabla\Phi(x_1,x_2)|^2)^{4q-1}}}$.

Now, we will prove the following result.

Theorem 1 *If $q > \frac{1}{2}$, then there exist a neighborhood V of the origin and $C > 0$ such that the integral (1.3) satisfies the estimate*

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C||a_1||_{C^3}}{|\xi|},$$

for all function $a_1 \in C_0^\infty(V)$.

2. Some auxiliary statements

In this section we introduce some lemmas wich will be used in investigation of the oscillatory integrals arizing in proof of Theorem 1.

Lemma 1 *Let $U \subseteq \mathbb{R}^2$ be open and $g \in C^\infty(U)$. If $x^0 \in U$ is such that $\partial_2 g(x^0) = 0$ and $\partial_{22}^2 g \neq 0$ then there exists a smooth function γ of the form $\gamma(x_1) = (x_1, \gamma_2(x_1))$, defined in a neighborhood of x_1^0, such that $\partial_2 g(\gamma(x_1)) = 0$, and we have*

$$(g \circ \gamma)''(x_1) = \frac{(Hessg)(\gamma(x_1))}{\partial_{22}^2(\gamma(x_1))}.$$

Lemma 1 is proved in [10].

Lemma 2 *Let function f be homogeneous of degree one and $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. For every neighborhood U of $-\nabla f(x_0) \neq 0$ and each $N \in \mathbb{N}$, there exists $C_N > 0$ and a compact neighborhood K of x_0 such that for all $\sigma \not\in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ and $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ with $supp(a_1) \subseteq K$*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} a(x) e^{i\lambda(f(x)+\sigma x)} dx\right| \leq C_N ||a_1||_{L_N^1} (1 + |\lambda|)^{-N}.$$

Lemma 1 is proved in [10].

Now, we consider integral (1.3) depending on the parameters (ξ_1, ξ_2, ξ_3).

If $max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \geq |\xi_3|$, then, we have the following lemma:

Lemma 3 *If $max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \geq |\xi_3|$, then there exists a neighborhood V of the origin such that, for any $q > 0$, $a_1 \in C_0^\infty(V)$ the following estimate holds*

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C||a||_{C^3}}{|\xi|}. \tag{2.1}$$

Lemma 3 is an analog of Lemma 5 from [3].

If $max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \leq |\xi_3|$, then integral (1.3) can be written as:

$$\hat{\mu}_q(\xi) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3(s_1 x_1 + s_2 x_2 + u(x_1,x_2)x_1 x_2^n)} |x_2|^{2q(n-1)} a_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \tag{2.2}$$

where $s_1 = \frac{\xi_1}{\xi_3}$ and $s_2 = \frac{\xi_2}{\xi_3}$.

3. Proof of Theorem 1

The set V decomposes two parts, e.g: $V = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, where $\mathcal{A} := \{(x_1, x_2) \in V \subset \mathbb{R}^2 : |x_2^n| < x_1\}$ and $\mathcal{B} = V \backslash \mathcal{A}$.

First, we study integral (2.2) on set $\mathcal{B}$.

Proposition 1 *If $q > \frac{1}{2}$, then there exist a neighborhood $W (W \subset \mathcal{B})$ of the origin and $C > 0$, such that integral (1.3) satisfies the following estimate*

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C||a_1||_{C^3}}{|\xi|},$$

for all function $a_1 \in C_0^\infty(W)$.

Proof . *We consider the dyadic partition of unity*

$$\sum_{k=0}^\infty \chi_k(x) = 1$$

on the interval $0 < x \leq 1$ with $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ supported in the interval $[\frac{1}{2}, 4]$, where $\chi_k(x) := \chi(2^k x)$ and put

$$\chi_{k_1,k_2}(x) := \chi_{k_1}(x_1)\chi_{k_2}(x_2), k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

Thus, we use a dyadic partition of unity for integral (2.2). Then, we obtain the following series:

$$\hat{\mu}_q(\xi) := \sum_{k_1,k_2} \hat{\mu}_q(k_1,k_2)(\xi), \tag{3.1}$$

where

$$\hat{\mu}_q(k_1,k_2)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3 F(x_1,x_2,s_1,s_2)} |x_2|^{2q(n-1)} \chi_0(x_1,x_2)\chi_{k_1}(x_1)\chi_{k_2}(x_2) a_1(x_1,x_2) dx_1 dx_2, \tag{3.2}$$

$F(x_1,x_2,s_1,s_2) = s_1x_1 + s_2x_2 + u(x_1,x_2)x_1x_2^n, \chi_{k_1}(x_1) = \chi(2^{k_1}x_1), \chi_{k_2}(x_2) = \chi(2^{k_2}x_2)$ and $\chi_0(x_1,x_2)$ is a cut-off function corresponding to the set $\mathcal{B}$. We apply a changer variables given by the scaling $y_1 = 2^{k_1}x_1$, $y_2 = 2^{k_2}x_2$. Then, the integral $\hat{\mu}_q(k_1,k_2)(\xi)$ can be written in the form:

$$\hat{\mu}_q(k_1,k_2)(\xi) := 2^{-(k_2(2q(n-1)+1)+k_1)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3 2^{-(k_1+nk_2)} F_1(y_1,y_2,\sigma_1,\sigma_2)} |y_2|^{2q(n-1)} \tilde{a}_1(y_1,y_2) dy_1 dy_2, \tag{3.3}$$

where $F_1(y_1,y_2,\sigma_1,\sigma_2) = \sigma_1 y_1 + \sigma_2 y_2 + u(2^{-k_1}y_1, 2^{-k_2}y_2) y_1 y_2^n$ and $\sigma_1 = 2^{k_2 n} s_1, \sigma_2 = 2^{k_2(n-1)+k_1} s_2$, $\tilde{a}_1(y_1,y_2) = a_1(2^{-k_1}y_1, 2^{-k_2}y_2)\chi(y_1)\chi(y_2)\chi_0(2^{-k_1}y_1, 2^{-k_2}y_2)$.

In order to estimate integral (3.3) we consider the parameters $\xi_3 2^{-(k_1+nk_2)}$ in two cases.

Case 1. If $|\xi_3 2^{-(k_1+nk_2)}| \lesssim 1$.Note that, $\tilde{a}_1$ has a compact support. Then, we obtain estimate

$$|\hat{\mu}_q(k_1,k_2)(\xi)| \le \frac{C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{2^{k_2(2q(n-1)+1)+k_1}}. \tag{3.4}$$

By using the series (3.1) and estimate (3.4) we have:

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \le C||a||_{C^3} \sum_{2^{-nk_2} < |\xi_3| 2^{-nk_2} < 2^{k_1}} \frac{1}{2^{(k_2(2q(n-1)+1)+k_1)}}. \tag{3.5}$$

We examine the series (3.5) for converge in the two cases:

Case 1.1. Let $|\xi_3| 2^{-nk_2} < 1$. Then, we have

$$\sum_{2^{-nk_2}|\xi_3|<1} \frac{1}{2^{(k_2(2q(\square-1)+1)+k_1)}} = \sum_{k_1} \frac{1}{2^{k_1}} \sum_{2^{-nk_2}|\xi_3|<1} \frac{1}{2^{k_2(2q(n-1)+1)}} \le$$
$$\le \frac{1}{2|\xi_3|} \sum_{2^{-nk_2}|\xi_3|<1} \frac{1}{2^{k_2(2q(n-1)-n+1)}}.$$

Thus, the last series in the last estimate converges for any $q > \frac{1}{2}$.

Case 1.2. Let $1 < |\xi_3| 2^{-nk_2} < 2^{k_1}$. We consider the following series:

$$\sum_{1<|\xi_3|2^{-nk_2}<2^{k_1}} \frac{1}{2^{k_2(2q(n-1)+1)+k_1}} \le \frac{1}{|\xi_3|} \sum_{1<|\xi_3|2^{-nk_2}<2^{k_1}} \frac{1}{2^{k_2(2q(n-1)+1-n)}} =$$
$$= \frac{1}{|\xi_3|} \sum_{1<|\xi_3|2^{-nk_2}<2^{k_1}} \frac{1}{2^{k_2(2q(n-1)+1-n)}}.$$

If, we use inequality $\sum_{k_1} 1 < 2^{\delta k_2}$ (because $k_1 < nk_2$) then, we obtain

$$\frac{1}{|\xi_3|} \sum_{|\xi_3|>2^{nk_2}} \frac{1}{2^{k_2(2q(n-1)-n+1-\delta)}}. \tag{3.6}$$

where δ is a sufficiently small positive number. In this case series (3.6) converges for any $q > \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2(n-1)}$.

Finally, we have the following estimate

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \le \frac{C||a_1||_{C^3}}{|\xi|},$$

for all $q > \frac{1}{2}$.

Case 2. If $|\xi_3 2^{-(k_1+nk_2)}| > 1$.

Lemma 4 *Let $|\xi_3 2^{-(k_1+nk_2)}| > 1$. Then there exist a positive real C such that for the integral (3.3) the following estimate holds true*

$$|\hat{\mu}_q(k_1,k_2)(\xi)| \le \frac{2^{-k_2(2q(n-1)+1-n)} C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|}.$$

Proof . *We study integral (3.3) depending on the parameters σ_1 and σ_2. We may assume that $|\sigma_1| + |\sigma_2| >> 1$ or $|\sigma_1| + |\sigma_2| << 1$.*

Case 2.1. If $|\sigma_1| + |\sigma_2| >> 1$. We may assume without loss of generality that $1 < |\sigma_1| \le |\sigma_2|$. Then, we applying integration bay parts N times for the integral $\hat{\mu}_q(k_1,k_2)(\xi)$ and to have

$$\left|\hat{\mu}_q(k_1,k_2)(\xi)\right| \le 2^{-(k_2(2q(n-1)+1)+k_1)} C_N ||a||_{L_N^1} (1 + (|\sigma_1| + |\sigma_2|)\xi_3 2^{-(k_1+nk_2)}|)^{-N}.$$

Note that $|\xi_3 2^{-(k_1+nk_2)}| > 1$. Then, we get the follows estimate

$$\left|\hat{\mu}_q(k_1,k_2)(\xi)\right| \le \frac{2^{-(k_2(2q(n-1)+1-n)} C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|}.$$

Case 2.2. If $|\sigma_1| + |\sigma_2| << 1$. By Lemma 2 we obtain the following estimate

$$\left|\hat{\mu}_q(k_1,k_2)(\xi)\right| \le \frac{2^{-(k_2(2q(n-1)+1-n)} C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|}.$$

Case. 2.3. If $c_1 < |\sigma_1| + |\sigma_2| < c_2$, where c_1, c_2 are fixed real positive. Next, in this case we may assume that $|\sigma_1| + |\sigma_2| \sim 1$.

By the implicit function theorem, the equation $\nabla F_1(y_1,y_2,\sigma_1,\sigma_2) = 0$ has a smooth solution $y^0 = y^0(\sigma_1,\sigma_2)$ in the neighborhood of the point $y^0(\sigma_1,\sigma_2)$ such that the condition satisfied $|\sigma_1| + |\sigma_2| \sim 1$. Then $detHessF_1(y^0(\sigma_1,\sigma_2)) \ne 0$.

Furthermore, let $\omega \in C_0^\infty(V)$ be a non-negative function with $\omega = 1$ if $(y_1, y_2) \in V_\varepsilon \subset V$, where V_ε is a small neighborhood of critical point y^0, ε - a sufficiently small real number.

So, we use the function ω for the integral $\hat{\mu}_q(k_1, k_2)(\xi)$ and get:

$$\hat{\mu}_q(k_1, k_2)(\xi) := J_1(k_1, k_2) + J_2(k_1, k_2), \tag{3.7}$$

where

$$J_1(k_1, k_2) = 2^{-(k_2(2q(n-1)+1)+k_1)} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3 2^{-(k_1+nk_2)} F_1(y_1,y_2,\sigma_1,\sigma_2)} |y_2|^{2q(n-1)} \tilde{a}_1(y_1, y_2)\omega(y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$
$$J_2(k_1, k_2) = 2^{-(k_2(2q(n-1)+1)+k_1)} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3 2^{-(k_1+nk_2)} F_1(y_1,y_2,\sigma_1,\sigma_2)} |y_2|^{2q(n-1)} \tilde{a}_1(\square_1, y_2)(1 - \omega(y_1, y_2)) dy_1 dy_2.$$

First, we study the integral $J_1(k_1, k_2)$. By using the Morse lemma (see.Lemma 3.1. pp.63-65 in [9]), i.e. there exists neighborhoods V, U of the points y^0, $u = 0$ and a diffeomorphism $y = \varphi(u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2)$. Then, it can be written the function $F_1(y_1, y_2, \sigma_1, \sigma_2)$ as:

$$F_1(\varphi_1(u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2), \varphi_2(u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2), \sigma_1, \sigma_2) = \pm u_1^2 \pm u_2^2 + \widetilde{F_1}(\sigma_1, \sigma_2).$$

Hence, for the oscillatory integral $J_1(k_1, k_2)$ we have

$$J_1(k_1, k_2) = 2^{-(k_2(2q(n-1)+1)+k_1)} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3 2^{-(k_1+nk_2)}(\pm u_1^2 \pm u_2^2 + \widetilde{F_1}(\sigma_1,\sigma_2))} |\varphi_2|^{2q(n-1)} \tilde{a}_1^*(u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2) du_1 du_2,$$

where

$$\tilde{a}_1^*(u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2) = \tilde{a}_1(\varphi_1(u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2), \varphi_2(u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2), \sigma_1, \sigma_2) \times$$
$$\times \omega(\varphi_1(u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2), \varphi_2(u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2)) \frac{D(y_1, y_2)}{D(u_1, u_2)} \text{ and } \tilde{a}_1^* \in C_0^\infty(U).$$

Now, by the method of the stationary phase and we obtain the following estimate

$$|J_1(k_1, k_2)| \le \frac{2^{-k_2(2q(n-1)+1-n)} C ||\tilde{a}_1^*||_{C^3}}{|\xi_3|}.$$

Now, we study the integral $J_2(k_1, k_2)$. By N times applying integration by parts for the integral $J_2(k_1, k_2)$ and have

$$|J_2(k_1, k_2)| \le \frac{2^{-k_2(2q(n-1)+1-n)} C ||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|}.$$

Hence, by (3.7) we get the following estimate

$$|\hat{\mu}_\square(k_1, k_2)(\xi)| \le \frac{2^{-(k_2(2q(n-1)+1-n)} C ||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|}. \tag{3.8}$$

Lemma 4 is proved.

So, we use the series (3.1) and inequality (3.8) to obtain the following series

$$\sum_{|\xi_3|>2^{k_1+nk_2}} |\hat{\mu}_q(k_1, k_2)(\square)| \le \frac{C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|} \sum_{|\xi_3|>2^{k_1+nk_2}} 2^{-k_2(2q(n-1)+1-n)}$$

Note, that $\sum_{k_1} 1 < 2^{\delta k_2}$. Then, we have the series $\sum_{|\xi_3|>2^{k_1+nk_2}} 2^{-k_2(2q(n-1)+1-n-\delta)}$ which converges for any $q > \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2(n-1)}$.

Finally, we obtain the converge of series (3.1) for all $q > \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2(n-1)}$ and following estimate holds the

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \le \frac{C||a||_{C^2}}{|\xi|},$$

for all $q > \frac{1}{2}$ the proof of Proposition 1 is complete.

Second, we study integral (2.2) in the set $\mathcal{A}$.

Proposition 2 *If $q > \frac{1}{2}$, then there exist a neighborhood $W_1 (W_1 \subset \mathcal{A})$ of the origin and $C > 0$ such that integral (1.3) satisfies*

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \le \frac{C||a_1||_{C^3}}{|\xi|},$$

for all function $a_1 \in C_0^\infty(W_1)$.

Proof . *We will apply a dyadic decomposition to this integral. To this end, we choose $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ with $supp\chi \subset \{x: \frac{1}{2}B < |x| < 2B\}$ (where B is a sufficiently large positive number to be fixed later) such that*

$$\sum_{k=0}^\infty \chi_k(x) = 1$$

where $\chi_k(x) := \chi(2^k x)$ and put

$$\chi_k(x) := \chi(2^k x_1, 2^k x_2), \ k \in \mathbb{N}.$$

Thus, we use a dyadic decomposition for integral (2.2). Then, we obtain the following series:

$$\hat{\mu}_q(\xi) := \sum_k \hat{\mu}_q(k)(\xi), \tag{3.9}$$

where

$$\hat{\mu}_q(k)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3 F(x_1,x_2,s_1,s_2)} |x_2|^{2q(n-1)} \chi_0(\frac{x_2^n}{x_1}) \chi(2^k x_1) \chi(2^k x_2) a_1(x_1,x_2) dx_1 dx_2,$$

and $F(x_1,x_2,s_1,s_2) = s_1x_1 + s_2x_2 + u(x_1,x_2)x_1x_2^n$, χ_0 is a cut-off function corresponding to the set $\mathcal{A}$. We apply a changing variables given by $y_1 = 2^k x_1$, $y_2 = 2^k x_2$. Then the integral $\hat{\mu}_q(k)(\xi)$ can be written in the form:

$$\hat{\mu}_q(k)(\xi) := 2^{-k(2q(n-1)+2)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3 2^{-k(1+n)} F_1(y_1,y_2,\sigma_1,\sigma_2)} |y_2|^{2q(n-1)} \tilde{a}_1(y_1,y_2) dy_1 dy_2, \tag{3.10}$$

where $F_1(y_1,y_2,\sigma_1,\sigma_2) = \sigma_1 y_1 + \sigma_2 y_2 + u(2^{-k}y_1, 2^{-k}y_2) y_1 y_2^n$ and $\sigma_1 = 2^{kn}s_1$, $\sigma_2 = 2^{kn}s_2$, $\tilde{a}_1(y_1,y_2) = a_1(2^{-k}y_1, 2^{-k}y_2)\chi_0(\frac{y_2^n}{2^{k(n-1)}y_1})\chi(y_1,y_2)$.

In order to estimate integral (3.10) we consider the parameters $\xi_3 2^{-k(1+n)}$ in two cases:

Case 1. If $|\xi_3 2^{-k(1+n)}| \lesssim 1$.Note that, $\tilde{a}_1$ has a compact support. Then, we obtain estimate

$$|\hat{\mu}_q(k)(\xi)| \le \frac{C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{2^{k(2q(n-1)+2)}}. \tag{3.11}$$

By using the series (3.9) and estimate (3.11) we have: $C||\tilde{a}_1||_{C^3} \sum_{2<|\xi_3|<2^{k(n+1)}} \frac{1}{2^{k(2q(n-1)+2)}} \le \frac{C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|} \sum_{2<|\xi_3|<2^{k(n+1)}} \frac{1}{2^{k(2q-1)(n-1)}}$. (3.12)

The last series in (3.12) converges since $q > \frac{1}{2}$. Thus, obtain the following estimate:

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \le \frac{C \cdot C_q ||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|},$$

for all $q > \frac{1}{2}$.Where $\sum_{2<|\xi_3|<2^{k(n+1)}} \frac{1}{2^{k(2q-1)(n-1)}} = C_q$.

Case 2. If $|\xi_3 2^{-k(1+n)}| > 1$. By the Fubin's theorem, integral (3.10) in the following form:

$$\hat{\mu}_q(k)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \hat{\mu}_q^0(k)(\sigma_2, y_1) e^{i\xi_3 2^{-k(1+n)}\sigma_1 y_1} dy_1, \tag{3.13}$$

where

$$\hat{\mu}_q^0(k)(\sigma_2,y_1) := 2^{-k(2q(n-1)+2)} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 2^{-k(1+n)} F_2(y_1,y_2,\sigma_2)} |y_2|^{2q(n-1)} \tilde{a}_2(y_1,y_2) dy_2, \tag{3.14}$$

and

$F_2(y_1,y_2,\sigma_2) = \sigma_2 y_2 + u(2^{-k}y_1, 2^{-k}y_2) y_1 y_2^n$,

$\tilde{a}_2(y_1,y_2) = a_1(2^{-k}y_1, 2^{-k}y_2)\chi_0(\frac{y_2^n}{2^{k(n-1)}y_1})\chi(y_1,y_2)$.

Lemma 5 *Let $|\xi_3 2^{-k(1+n)}| > 1$. Then there exist a positive real C such that the following estimate for integral (3.13) holds true*

$$|\hat{\mu}_q(k)(\xi)| \le \frac{2^{-k(2q-1)(n-1)} C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|}.$$

Proof. *First, we study integral (3.14) depending on the parameter σ_2.*

Case 2.1. If $|\sigma_2| \gtrsim 1$. Then, by applying integration by parts for the integral $\hat{\mu}_q^0(k)(\sigma_2,y_1)$ we have

$$\left|\hat{\mu}_q^0(k)(\sigma_2,y_1)\right| \le \frac{2^{k(2q-1)(n-1)} C||\tilde{a}_2(\cdot,y_1)||_{C^3}}{|\xi_3|}.$$

Furthermore, we get

$$|\hat{\mu}_q(k)(\xi)| \le \frac{2^{-k(2q-1)(n-1)} C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|}.$$

Case 2.2. If $|\sigma_2| << 1$. We estimate (3.14) in two cases.

Case 2.2a. Assume that $|\xi_3 2^{-k(1+n)} \sigma_2^{\frac{n}{n-1}}| \lesssim 1$. Then we apply a change variable $y_2 = (\xi_3 2^{-k(n+1)})^{-\frac{1}{n}} t$, if $supp(\tilde{a}_2(y_1,y_2)) \subset [-1,1] \times I$, to get $-(\xi_3 2^{-k(n+1)})^{\frac{1}{n}} \le t \le (\xi_3 2^{-k(n+1)})^{\frac{1}{n}}$, where I is a neighborhood of the point $y_1 = 1 (I \subset \mathbb{R}_{y_1})$.

Now, we consider the following integral

$$\hat{\mu}_q^{\tilde{0}}(k)(\sigma_2,y_1) := 2^{-k(2q(n-1)+2)} (\xi_3 2^{-k(n+1)})^{-\frac{2q(n-1)+1}{n}} \times$$
$$\times \int_{|t| \le (\xi_3 2^{-k(n+1)})^{\frac{1}{n}}} e^{iF(y_1,t,\sigma_2,\xi_3)} |t|^{2q(n-1)} a_3(y_1,t,\xi_3) dt \tag{3.15}$$

where

$F(y_1,t,\sigma_2,\xi_3) = (\xi_3 2^{-k(n+1)} \sigma_2^{\frac{n}{n-1}})^{\frac{n-1}{n}} t + u(2^{-k}y_1, 2^{-k}(\xi_3 2^{-k(n+1)})^{-\frac{1}{n}} t) y_1 t^n$,

$a_3(y_1,t) = \tilde{a}_2(y_1, 2^{-k}(\xi_3 2^{-k(n+1)})^{-\frac{1}{n}} t)$. So, the integral (3.15) can be written of sum of two integrals:

$$\hat{\mu}_q^{\tilde{0}}(k)(\sigma_2,y_1) = \hat{\mu}_q^{\tilde{0}1}(k)(\sigma_2,y_1) + \hat{\mu}_q^{\tilde{0}2}(k)(\sigma_2,y_1),$$

where

$$\hat{\mu}_q^{\tilde{0}1}(k)(\sigma_2, y_1) = 2^{-k(2q(n-1)+2)}(\xi_3 2^{-k(n+1)})^{-\frac{2q(n-1)+1}{n}} \times$$
$$\times \int_0^{(\xi_3 2^{-k(n+1)})^{\frac{1}{n}}} e^{iF(y_1,t,\sigma_2,\xi_3)}|t|^{2q(n-1)} a_3(y_1,t)dt,$$
$$\hat{\mu}_q^{\tilde{0}2}(k)(\sigma_2, y_1) = 2^{-k(2q(n-1)+2)}(\xi_3 2^{-k(n+1)})^{-\frac{2q(n-1)+1}{n}} \times$$
$$\times \int_{-(\xi_3 2^{-k(n+1)})^{\frac{1}{n}}}^{0} e^{iF(y_1,t,\sigma_2,\xi_3)}|t|^{2q(n-1)} a_3(y_1,t)dt.$$

We estimate the integral $\hat{\mu}_q^{\tilde{0}1}(k)(\sigma_2, y_1)$. The integral $\hat{\mu}_q^{\tilde{0}2}(k)(\sigma_2, y_1)$ can be estimated by analogical methods.

The integra $\hat{\mu}_q^{\tilde{0}1}(k)(\sigma_2, y_1)$ decomposes in two integrals:

$$\hat{\mu}_q^{\tilde{0}1}(k)(\sigma_2, \square_1) = G_q^1(k)(\sigma_2, y_1) + G_q^2(k)(\sigma_2, y_1), \tag{3.16}$$

where

$$G_q^1(k)(\sigma_2, y_1) = 2^{-k(2q(n-1)+2)}(\xi_3 2^{-k(n+1)})^{-\frac{2q(n-1)+1}{n}} \int_0^1 e^{iF(y_1,t,\sigma_2,\xi_3)}|t|^{2q(n-1)} a_3(y_1,t)dt,$$
$$G_{\square}^2(k)(\sigma_2, y_1) = 2^{-k(2q(n-1)+2)}(\xi_3 2^{-k(n+1)})^{-\frac{2q(n-1)+1}{n}} \times$$
$$\times \int_1^{(\xi_3 2^{-k(n+1)})^{\frac{1}{n}}} e^{iF(y_1,t,\sigma_2,\xi_3)}|t|^{2q(n-1)} a_3(y_1,t)dt,$$

Note that, $a_3(y_1,t)$ has a compact support, besides $|\xi_3 2^{-k(1+n)}\sigma_2^{\frac{n}{n-1}}| \lesssim 1$.Hence, we obtain the following estimate

$$|G_q^1(k)(\sigma_2, y_1)| \le 2^{-k(2q(n-1)+2)}(|\xi_3| 2^{-k(n+1)})^{-\frac{2q(n-1)+1}{n}} C||a_3(\cdot, y_1)||_{C^2}.$$

Furthermore, we use inequality $|\xi_3| > 2^{k(n+1)}$, to get

$$|G_q^1(k)(\sigma_2, y_1)| \le 2^{-k(2q-1)(n-1)} \frac{C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|}. \tag{3.17}$$

Now, we apply integration by pars for the integral $G_q^2(k)(\sigma_2, y_1)$ and to get

$$|G_q^2(k)(\sigma_2, y_1)| \le \frac{2^{-k(2q(n-1)+2)} C||a_3(\cdot, y_1)||_{C^2}}{1+|\xi_3| 2^{-k(n+1)}}$$

Since, by condition of Lemma 5 we have

$$|G_q^2(k)(\sigma_2, y_1)| \le 2^{-k(2q-1)(n-1)} \frac{C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|}. \tag{3.18}$$

If, we use (3.16) and estimates (3.17), (3.18), we have the following

$$|\hat{\mu}_q^{\tilde{0}1}(k)(\sigma_2, y_1)| \le \frac{2^{-k(2q-1)(n-1)} C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|}.$$

Note that, the integral $\hat{\mu}_q^{\tilde{0}2}(k)(\sigma_2, y_1)$ estimates by the analogical method and we obtain

$$|\hat{\mu}_q(k)(\xi)| \le \frac{2^{-k(2q-1)(n-1)} C||\tilde{\square}_1||_{C^3}}{|\xi_3|}.$$

Thus, by series (3.9) to get the follows series

$$\sum_{|\xi_3|>2^{k(n+1)}} |\hat{\mu}_q(k)(\xi)| \le \frac{C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|} \sum_{|\xi_3|>2^{k(n+1)}} 2^{-k(2q-1)(n-1)}.$$

We can see the series $\sum_{|\xi_3|>2^{k(n+1)}} 2^{-k(2q-1)(n-1)}$ converges for all $q > \frac{1}{2}$. Finally, by these estimates we get the following

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \le \frac{C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|},$$

for all $q > \frac{1}{2}$. Lemma 5 proved.

Case 2.2b. Assume that $|\xi_3 2^{-k(1+n)}\sigma_2^{\frac{n}{n-1}}| \gtrsim 1$. We apply a change variable $y_2 = \sigma_2^{\frac{1}{n-1}} t$ for the integral (3.14). Than, we can be written the integral the following view

$$\hat{\mu}_q^0(k)(\sigma_2, y_1) := 2^{-k(2q(n-1)+2)}\sigma_2^{\frac{2q(n-1)+1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 2^{-k(1+n)}\sigma_2^{\frac{n}{n-1}} F_2^*(y_1,t,\sigma_2)}|t|^{2q(n-1)} \tilde{a}_2^*(y_1,t)dt,$$

where $F_2^*(y_1,t,\sigma_2) = t + u(2^{-k}y_1, 2^{-k}\sigma_2^{\frac{1}{n-1}}t)y_1 t^n$ and

$\tilde{a}_2^*(y_1,t) = a_1(2^{-k}y_1, 2^{-k}\sigma_2^{\frac{1}{n-1}}t)\chi(\frac{\sigma^{\frac{n}{n-1}}t^n}{2^{k(n-1)}y_1})\chi(y_1, \sigma_2^{\frac{1}{n-1}}t)$. By the implicit function theorem, the equation $\frac{\partial F_2^*(y_1,t,\sigma_2)}{\partial t} = 0$ has a smooth solution $t^0 = t^0(y_1,\sigma_2)$ in the set $I \times W$, where the set $I \times W$ the neighborhood of the point $(\square_1^0, \sigma_2^0)$. Then $\frac{\partial^2 F_2^*(y_1,t^0,\sigma_2)}{\partial^2 t} \ne 0$.

Furthermore, let $\omega \in C_0^\infty([-2,2])$ be a non-negative function with $\omega = 1$ if $t \in [-1,1]$ but $\omega = 0$ if $t \in \mathbb{R}\backslash[-2,2]$.

So, we use the function ω for the integral $\hat{\mu}_q^0(k)(\sigma_2, y_1)$ and to can write at view:

$$\hat{\mu}_q^0(k)(\sigma_2, y_1) := I_q^1(k)(\sigma_2, y_1) + I_q^2(k)(\sigma_2, y_1),$$

where

$$I_q^1(k)(\sigma_2, y_1) := 2^{-k(2q(n-1)+2)}\sigma_2^{\frac{2q(n-1)+1}{n-1}} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 2^{-k(1+n)}\sigma_2^{\frac{n}{n-1}}F_2^*(y_1,t,\sigma_2)}|t|^{2q(n-1)}\tilde{a}_2^*(y_1,t)(1-\omega(t))dt,$$
$$I_q^2(k)(\sigma_2, y_1) := 2^{-k(2q(n-1)+2)}\sigma_2^{\frac{2q(n-1)+1}{n-1}} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 2^{-k(1+n)}\sigma_2^{\frac{n}{n-1}}F_2^*(y_1,t,\sigma_2)}|t|^{2q(n-1)}\tilde{a}_2^*(y_1,t)\omega(t)dt.$$

We consider the integral $I_q^1(k)(\sigma_2, y_1)$. For the integral $I_q^1(k)(\sigma_2, y_1)$, we apply the integration by part and obtain

$$|I_q^1(k)(\sigma_2, y_1)| \le \frac{2^{-k(2q(n-1)+2)}C||\tilde{a}_2^*(\cdot,y_1)||_{C^3}|\sigma_2|^{\frac{2q(n-1)+1}{n-1}}}{1+|\xi_3||\sigma_2|^{\frac{n}{n-1}}2^{-k(n+1)}}.$$

If, we use series (3.9) and integral (3.13) to obtain the following estimate

$$\sum_{|\xi_3 2^{-k(1+n)}\sigma_2^{\frac{n}{n-1}}|\gtrsim 1} |I_q^1(k)(\sigma_1, \sigma_2)| \le \frac{CC_q||\tilde{a}_1||_{c^2}}{|\xi_3|},$$

where $C_q = \sum_{|\xi_3 2^{-k(1+n)}\sigma_2^{\frac{n}{n-1}}|\gtrsim 1} 2^{-k(2q-1)(n-1)}|\sigma_2|^{2q-1}$. We can see this series converges for any $q > \frac{1}{2}$.

Now, we consider the integral $I_q^2(k)(\sigma_2, y_1)$. The amplitude function of this integral is smooth function with sufficiently small support, besides $\frac{\partial^2 F_2^*(y_1,t^0,\sigma_2)}{\partial^2 t} \neq 0$. Then, by the method of the stationary phase, we therefor obtain that

$$I_q^2(k)(\sigma_2, y_1) = \sigma_2^{\frac{2q(n-1)+1}{n-1}}\sqrt{\frac{2\square}{\xi_3 2^{-k(n+1)}\sigma_2^{\frac{n}{n-1}}}}e^{i\xi_3 2^{-k(1+n)}\sigma_2^{\frac{n}{n-1}}F_2^*(y_1,t^0,\sigma_2)}f(y_1) + R(y_1, \sigma_2, \xi_3),$$

where $f(y_1) = \frac{|t^0|^{2q(n-1)}\tilde{a}_2^*(y_1,t^0)\omega(t^0)}{\sqrt{\frac{\partial^2 F_2^*(y_1,t^0,\square_2)}{\partial^2 t}}}$ and the remainder term $R(y_1, \sigma_2, \xi_3)$ satisfies an estimate $|R(y_1, \sigma_2, \xi_3)| \le \frac{C||\tilde{a}_2^*(\cdot,y_1)||_{C^3}}{|\xi_3|}$ such that it is uniformly with respect to the small parameters (y_1, σ_2, ξ_3).

Since, by integral (3.13) and we have

$$\hat{\mu}_q(k)(\xi) := 2^{-k(2q(n-1)+2)}\sigma_2^{\frac{2q(n-1)+1}{n-1}}\sqrt{\frac{2\pi}{\xi_3 2^{-k(n+1)}\sigma_2^{\frac{n}{n-1}}}} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 2^{-k(1+n)}(\sigma_1 y_1 + \sigma_2^{\frac{n}{n-1}}F_2^*(y_1,t^0,\sigma_2))}f(y_1)dy_1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right).$$

Consider the following the integral

$$\hat{\mu}_q(k)(\xi) := 2^{-k(2q(n-1)+2)}\tau^{2q(n-1)+1}\sqrt{\frac{2\pi}{\xi_3 2^{-k(n+1)}\tau^n}} \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 2^{-k(1+n)}F_3(y_1,\sigma_1,\tau)}f(y_1)dy_1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \tag{3.19}$$

where $F_3(y_1, \sigma_1, \tau) = \sigma_1 y_1 + \tau^n F_2^*(y_1, t^0, \tau)$ and $\tau = \sigma_2^{\frac{1}{n-1}}$.

Now, we study the integral (3.19) two cases.

Case 2.2b1. Assume that $|\alpha| << 1$ or $|\alpha| >> 1$, where $\alpha = \frac{\sigma_1}{\tau^n}$. Here, an integration by parts in x_1 yields

$$|\hat{\mu}_q(k)(\xi)| \le 2^{-k(2q(n-1)+2)}\tau^{2q(n-1)+1}\frac{C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{1+|\xi_3||\tau|^n 2^{-k(n+1)}}.$$

By series (3.9) to get

$$\sum_{\left|\xi_3 2^{-k(1+n)}\sigma_2^{\frac{n}{n-1}}\right|\gtrsim 1} \left|\hat{\mu}_q(k)(\xi)\right| \le$$

$$\leq \frac{C||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|} \sum_{|\xi_3 2^{-k(1+\square)}\sigma_2^{\frac{n}{n-1}}|\gtrsim 1} 2^{-k(2q-1)(n-1)}\tau^{(2q-1)(n-1)}$$

We can see, the series (3.9) converges for $q > \frac{1}{2}$. That is way, for the integral $\hat{\mu}_q(\xi)$ holds true the following estimate

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C \cdot C_q||\tilde{a}_1||_{C^3}}{|\xi_3|},$$

for $q > \frac{1}{2}$.

Case 2.2b1. Assume that $|\alpha| \sim 1$. Consider the following integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 2^{-k(1+n)}F_3(y_1,\sigma_1,\tau)} f(y_1)dy_1 \tag{3.20}$$

By Lemma3, we have for the second partial derivatives of $F_3(y_1, \sigma_1, \tau)$ to y_1

$$\frac{\partial^2 F_3(y_1,\sigma_1,\tau)}{\partial y_1^2} = \frac{Hess(F)(y_1,\tau t(y_1))}{\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(y_1,\tau t(y_1))}.$$

On the other hand

$$(HessF)(y_1, \tau t(y_1)) = (Hess\Phi)(y_1, \tau t(y_1)) = \tau^{2n-2}u_1(y_1, \tau t(y_1))y_1 t^{2(n-1)}(y_1)$$

and

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(y_1, \tau t(y_1)) = \tau^{n-2}u_2(y_1, \tau t(y_1))t^{n-2}(y_1).$$

Then, we obtain

$$\left|\frac{\partial^2 F_3(y_1,\sigma_1,\tau)}{\partial y_1^2}\right| \geq |\tau|^n|t(y_1)| = |\tau|^n > 0, |t(y_1)| \sim 1$$

Thus, duo to van der Corput's lemma for the integral (3.20)

$$\left|\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 2^{-k(1+n)}F_3(y_1,\sigma_1,\tau)} f(y_1)dy_1\right| \leq \frac{C||f||_{C^2}}{(|\xi_3||\tau|^n 2^{-k(n+1)})^{\frac{1}{2}}}$$

Hence, for the integral $\hat{\mu}_q(k)(\xi$

$$|\hat{\mu}_q(k)(\xi| \leq \frac{C||\tilde{a}_1||_{C^2}}{|\xi_3|} 2^{-k(2q-1)(n-1)}|\tau|^{(2q-1)(n-1)}.$$

Therefor, we have

$$\sum_k |\hat{\mu}_q(k)(\xi)| \leq \sum_k \frac{2^{-k(2q(n-1)(n-1))}\tau^{(2q-1)(n-1)}C||\tilde{a}_1||_{C^2}}{|\xi_3|}.$$

The series converges for any $q > \frac{1}{2}$. Then, we obtain

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C \cdot C_q||\tilde{a}_1||_{C^2}}{|\xi_3|},$$

for all $q > \frac{1}{2}$. These concludes the proof of Theorem 1.

References

1. C. D. Sogge, E. M. Stein. Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$ Invent. Math 82543-5561985
2. D. M. Oberlin. Oscillatory integrals with polynomial phase. MATH.SCAND 69, 45-56, 1991.
3. И.А.Икромов, Ш.А.Муранов. Об оценках осцилляторных интегралов с множителем гашения Математические заметки. 104, 2, с. 236-251, 2018.
4. Sh.A.Muranov. On estimates for oscillatory integrals with damping factor. Uzbek Mathematical Journal, 4, 112-125, 2018.
5. Arkhipov G.I., Karatsuba A.A. and Chubarikov V.N.. *Trigonometric integrals*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43(5), 971-1003 1197 (Russian); English translation in Math. USSR-Izv., 15(1980), pp 21-239.
6. А.С. Садуллаев. Критерии алгебраичности аналитических множеств. Функц. анализ и его прил. 6, с.85-86, 1972.
7. И. А. Икромов. Демпфированные осцилляторные интегралы и максимальные операторы. Математические заметки, 78, с. 833-852, 2005.
8. А.Эрдейи. Асимптотические разложения М Физматгиз 1962
9. М. В. Федорюк. Метод перевала. Наука. М. 1977.
10. I. A. Ikromov, D. Müller, M. Kempe. Damped oscillatory integrals and boundedness of maximal operators associated to mixed homogeneous hypersurfaces. Duke Math.J. 126 no.3, p.471-490. 2005.

УДК: 517.946

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПОЛОСЕ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

А.Х. Бегматов, А.С. Исмоилов
Самаркандский государственный университет
E-mail: akrambegmatov@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в полосе с весовой функцией, имеющей особенность. Доказана теорема единственности решения уравнение. Показано что решение поставленной задачи слабо некорректно, то есть получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости.

Ключевые слова: слабо некорректные задачи, преобразование Фурье, теоремы единственности, весовая функция.

Yo‘lakda vazn funksiyali integral geometriya masalasi

Annotatsiya. Bu ishda yo‘lakda maxsuslikka ega bo‘lgan vazn funksiyali parabolalar oilasi bo‘yicha funksiyani tiklash masalasi qaralgan. Yechimning yagonaligi teoremasi isbotlangan. Qo‘yilgan masalaning yechimi kuchsiz nokorrekt ekanligi ko‘rsatilgan va turg‘unlik bahosi olingan.

Kalit so zlar: кuchsiz nokorrekt masala, Fur’e almashtirishlari, yagonalik teoremasi, vazn funksiya.

The problem of integral geometry in a strip with weight function

Abstract. In this work we consider the problem of reconstructing a function from a family of parabolas in the upper half-plane with a weight function having a singularity. The uniqueness of theorem for the solution of equation is proved and the inversion formula is derived. It is shown that the solution of the problem posed is weakly ill-posed, that is, stability estimates are obtained in spaces of finite smoothness.

Keywords: Ill-posed problems, integral geometry problems, integral transforms, inversion formula, existence theorem

1. Введение

Интегральная геометрия, один из актуальных разделов анализа и математической физики, изучает вопросы восстановления функции, от которой известны интегралы, заданные на семействе многообразий. Впервые связь между задачами интегральной геометрии и многомерными обратными задачами для дифференциальных уравнений была установлена в работе М.М. Лаврентьева и В.Г.Романова [1].

Приведем определение задачи интегральной геометрии [2,3]. Пусть $u(\xi)$ – достаточно гладкая функция, определенная в n – мерном пространстве $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$, и $\{\Gamma(x)\}$ – семейство гладких многообразий в этом пространстве, зависящих от параметра $x=(x_1,...,x_m)$. Пусть, далее, от функции $u(\xi)$ известны интегралы

$$\int_{\Gamma(x)} u(\xi)d\sigma = f(x),$$

где $d\sigma$ определяет элемент меры по $\Gamma(x)$. Требуется по функции $f(x)$ найти функцию $u(\xi)$.

Единственность широкого класса задач интегральной геометрии в полосе была установлена В.Г. Романовым. Задачи не вольтерровского типа изучались в работах М.М.Лаврентьева и А.Л. Бухгейма [4,5], Р.Г. Мухометова [6].

Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [7,8].

Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями вершинах получены в [9-12].

В работах [13-14] изучены новые классы задачи интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач восстановления функции по весовым функциям с особенностью.

Введем обозначения, которые будем использовать в этом пункте:

$$x \in R^2,\ \ \xi \in R^2,\ \lambda \in R^1,\ \mu \in R^1,\ \ R_+^2 = \{x = (x_1, x_2) : x_2 \ge 0\};$$
$$\Omega = \{x \in R_+^2 :\ 0 < x_2 < l\},$$
$$\bar{\Omega} = \{x \in R_+^2 :\ 0 \le x_2 \le l\},$$

здесь, $0 < l < \infty$.

В полосе $\bar{\Omega}$ рассмотрим семейство $P(x_1, x_2)$ кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин $(x_1, x_2) \in \Omega$:

$$P(x_1,\ x_2) = \{(\xi_1,\ \xi_2) : x_2 - \xi_2 = (x_1 - \xi_1)^2,\ \ 0 \le \xi_2 \le x_2\}.$$

2. Задача интегральной геометрии

Задача 1. Определить функцию двух переменных $u(x_1, x_2)$, если для всех (x_1, x_2) из полосы $\bar{\Omega}$ известны интегралы от нее параболам $P(x_1, x_2)$:

$$\int_{x_1-\sqrt{x_2}}^{x_1+\sqrt{x_2}} g(x_1, \xi_1) u(\xi_1, x_2 - (x_1 - \xi_1)^2) d\xi_1 = f(x_1, x_2), \tag{1}$$

где $g(x_1, \xi_1) = 2(x_1 - \xi_1)$ (2).

Обозначим через U класс функция $u(x_1, x_2)$, которые имеют все непрерывные частные производные до восьмого порядка включительно и финитны с носителем в R_+^2. Для определенности имеем

$$\text{supp } u \subset D = \{(x_1, x_2) : -a < x_1 < a,\ 0 < a < \infty,\ 0 < x_2 < l,\ \ \ l < \infty\}.$$

Доопределим правую часть уравнения (1) при $x_2 < 0$.

Введем функцию

$$f^*(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1, x_2), & при\ x_2 \ge 0, \\ 0, & при\ x_2 < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Как следует из постановки задачи 1 и условий, наложенных на функцию $u(\square)$, к функции $f^*(x_1, x_2)$ можно применить преобразование Фурье по x_2.

$$\varphi(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x_2} \hat{f}^*(\lambda, x_2) dx_2 = \int_0^{\infty} e^{i\mu x_2} \hat{f}(\lambda, x_2) dx_2.$$

Таким образом, доопределив $f(x_1, x_2)$ в нижней полуплоскости нулём, к обеим частям уравнения (1) можно применять преобразование Фурье по x_2.

Введем следующие функции

$$I(\lambda, \mu) = \int_0^{\infty} e^{i\mu\tau} \cos \lambda\tau d\tau, \tag{4}$$

$$I_1(\lambda, x_2 - \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu(x_2 - \xi_2)} \frac{\lambda\, d\mu}{\left(1 + \mu^4\right) I(\lambda, \mu)}, \tag{5}$$

$$I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda(x_1 - \xi_1)} I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{1 + \lambda^4} d\lambda. \tag{6}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ известна для всех $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$. Тогда решение задача 1 в классе U единственно, имеет место представление

$$u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2{}^4} \right) \left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi_1{}^4} \right) f_2(x_1, x_2) d\xi_1 d\xi_2 d\zeta, \tag{7}$$

и выполняется неравенство

$$\| u(x_1, x_2) \|_{W_2^{1,0}(\Omega)} \le C_0 \| f_1 \|_{W_2^2(\Omega)},$$

где C_0 – некоторая постоянная.

Доказательство. Приведём уравнение (1) более удобному виду:

$$f(x_1,x_2)=\int\limits_{x_1-\sqrt{x_2}}^{x_1+\sqrt{x_2}} 2\left(x_1-\xi_1\right)u\left(\xi_1,x_2-(x_1-\xi_1)^2\right)d\xi_1=$$

$$=\int\limits_0^{x_2} 2\sqrt{x_2-\xi_2}\,u(x_1-\sqrt{x_2-\xi_2},\xi_2)\frac{d\xi_2}{2\sqrt{x_2-\xi_2}}+$$

$$+\int\limits_0^{x_2} 2(-\sqrt{x_2-\xi_2})u(x_1+\sqrt{x_2-\xi_2},\xi_2)\frac{-d\xi_2}{2\sqrt{x_2-\xi_2}}.$$

$$\int\limits_0^{x_2}\left[u(x_1-h,\xi_2)-u(x_1+h,\xi_2)\right]d\xi_2=f(x_1,x_2), \tag{8}$$

где $h=\sqrt{x_2-\xi_2}$.

Применим преобразование Фурье по переменной x_1 к обеим частям уравнения (8)

$$\hat{f}(\lambda,x_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_1}\int\limits_0^{x_2}\left[u(x_1-h,\xi_2)-u(x_1+h,\xi_2\right]d\xi_2dx_1=$$

$$=2i\int\limits_0^{x_2}\frac{e^{-i\lambda h}-e^{i\lambda h}}{2i}\hat{u}(\lambda,\xi_2)d\xi_2=2i\int\limits_0^{x_2}\sin(\lambda h)\,\hat{u}(\lambda,\xi_2)d\xi_2.$$

Теперь $\hat{f}_1(\lambda,x_2)=\dfrac{1}{2i}\,\hat{f}(\lambda,x_2).$

Таким образом

$$\int\limits_0^{x_2}\cos\lambda h\,\hat{u}(\lambda,\xi_2)d\xi_2=\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)\ . \tag{9}$$

Применим к уравнению (9) одностороннее преобразование Фурье по переменной x_2:

$$\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu)=\int\limits_0^{\infty} e^{i\mu x_2}\int\limits_0^{x_2}\sin(\lambda h)\hat{u}(\lambda,\xi_2)d\xi_2dx_2=\int\limits_0^{\infty}\hat{u}(\lambda,\xi_2)\int\limits_{\xi_2}^{\infty} e^{i\mu x_2}\sin\lambda\sqrt{x_2-\xi_2}\,dx_2d\xi_2.$$

Сделав в этом равенстве замену $\tau=x_2-\xi_2$, получим:

$$\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu)=\int\limits_0^{\infty}\hat{u}(\lambda,\xi_2)\int\limits_{\xi_2}^{\infty} e^{i\mu(\tau+\xi_2)}\sin\lambda\sqrt{\tau}d\tau d\xi_2=$$

$$=\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)\int\limits_0^{\infty} e^{i\mu\tau}\sin\lambda\sqrt{\tau}d\tau.$$

Таким образом уравнение (9) примет вид

$$\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)\cdot\int\limits_0^{\infty} e^{i\mu\tau}\sin\lambda\sqrt{\tau}d\tau=\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu), \tag{10}$$

Нам нужно оценить снизу по модулю функцию $I(\lambda,\mu)$, что позволит получить оценки для функции $\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)$, а затем и для искомой функции $u(x_1,x_2)$.

Покажем, что интеграл (4) является равномерно сходящимся относительно параметров λ и μ, причём параметр μ можно без ограничения общности считать положительным.

Сделав замену $\sqrt{\tau}=t$ и учитывая $d\tau=2tdt$, в интеграле (4), имеем:

$$I=2\int\limits_0^{\infty} te^{i\mu t^2}\sin\lambda tdt=2\int\limits_0^{\infty} t\cos\mu t^2\sin\lambda tdt+2i\int\limits_0^{\infty} t\sin\mu t^2\sin\lambda tdt.$$

Используя формулы

$$\int_0^\infty x\sin(ax^2)\sin(2bx)dx = \frac{b}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[\cos\frac{b^2}{a}+\sin\frac{b^2}{a}\right],\ [a>0,\ b>0],$$

$$\int_0^\infty x\cos(ax^2)\sin(2bx)dx = \frac{b}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[\sin\frac{b^2}{a}-\cos\frac{b^2}{a}\right],\ [a>0,\ b>0]$$

(см [15]), получим:

$$I = \frac{\lambda}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\left[\sin\frac{\lambda^2}{4\mu}-\cos\frac{\lambda^2}{4\mu}+i\left(\cos\frac{\lambda^2}{4\mu}+\sin\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)\right]=$$

$$= i\frac{\lambda}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)\right).$$

Значит, мы имеем следующие выражения:

$$I = i\frac{\lambda}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)\right)=i\frac{\lambda}{2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\lambda^2}{4\mu}\right)}.$$

Модуль функции $I(\lambda,\mu)$ имеет вид:

$$|I| \ge \frac{|\lambda|}{2|\mu|}\sqrt{\frac{\pi}{|\mu|}}.$$

Учитывая это неравенство и формулу (9) получим неравенство

$$\left|\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)\right| \le \left|\frac{2\mu}{\lambda}\sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\,\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu)\right|.$$

Отсюда несложно получит оценку

$$\frac{1}{|I|} \le \frac{2|\mu|}{|\lambda|}\sqrt{\frac{|\mu|}{\pi}}. \tag{11}$$

Из уравнения (10), учитывая (11), получим

$$\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu) = \frac{1}{I(\lambda,\mu)}\,\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu),$$

или

$$\lambda\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu) = \frac{\lambda}{I(\lambda,\mu)}\,\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu). \tag{12}$$

Разделим и умножим правую часть равенства (12) на $(1+\mu^4)$:

$$\lambda\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu) = \frac{\lambda}{(1+\mu^4)I(\lambda,\mu)}(1+\mu^4)\,\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu). \tag{13}$$

В правой части уравнения (13) функция $\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu)$ примет вид

$$\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu) = \int_0^{+\infty} e^{i\mu\xi_2}\,\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2\ .$$

Применяя интегрирование по частям четыре раза, учитывая, свойство дифференцирования преобразования Фурье получим следующее

$$\int_0^{+\infty} e^{i\mu\xi_2}\,\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2 = \frac{1}{\mu^4}\int_0^{+\infty} e^{i\mu\xi_2}\,\frac{\partial^4\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)}{\partial\xi_2{}^4}d\xi_2\ . \tag{14}$$

Подставляя (14) на (13), получим

$$\lambda\cdot\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu) = \frac{\lambda}{\left(1+\mu^4\right)I(\lambda,\mu)}\int_0^{+\infty} e^{i\mu\xi_2}\,\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2 + \int_0^{+\infty} e^{i\mu\xi_2}\,\frac{\partial^4\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)}{\partial\xi_2{}^4}d\xi_2 =$$

$$=\frac{\lambda}{\left(1+\mu^4\right)I(\lambda,\mu)}\int_0^{+\infty}e^{i\mu\xi_2}\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2{}^4}\right)\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2. \qquad (15)$$

Применим к уравнению (15) обратное преобразование Фурье по переменной μ.

$$\lambda\cdot\hat{u}(\lambda,x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\mu x_2}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{\lambda}{\left(1+\mu^4\right)I(\lambda,\mu)}e^{i\mu\xi_2}\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2{}^4}\right)\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2\right\}d\mu=$$

$$=\int_0^{+\infty}I_1(\lambda,x_2-\xi_2)\left[E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2{}^4}\right]\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2.$$

Значит

$$\lambda\cdot\hat{u}(\lambda,x_2)=\int_0^{+\infty}I_1(\lambda,x_2-\xi_2)\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2{}^4}\right)\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)d\xi_2.$$

Последнее соотношение с учетом того, что $\hat{f}_1(\lambda,\xi_2)=\frac{1}{2i}\hat{f}(\lambda,\xi_2)$ запишем в следующем виде

$$i\lambda\cdot\hat{u}(\lambda,x_2)=\int_0^{+\infty}I_1(\lambda,x_2-\xi_2)\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2{}^4}\right)\hat{f}_2(\lambda,\xi_2)d\xi_2, \qquad (16)$$

где $\hat{f}_2(\lambda,\xi_2)=\frac{1}{2}\hat{f}(\lambda,\xi_2)$.

Разделим и умножим правую часть равенства (16) на $(1+\lambda^4)$:

$$i\lambda\cdot\hat{u}(\lambda,x_2)=\int_0^{\infty}(1+\lambda^4)\frac{I_1(\lambda,x_2-\xi_2)}{(1+\lambda^4)}\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2{}^4}\right)\hat{f}_2(\lambda,\xi_2)d\xi_2. \qquad (17)$$

В интеграле

$$\hat{f}_2(\lambda,\xi_2)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\xi_1,\xi_2)e^{i\lambda\xi_1}d\xi_1,$$

применяя интегрирование по частям четыре раза, учитывая, свойство дифференцирования преобразования Фурье получим следующее

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\xi_1,\xi_2)e^{i\lambda\xi_1}d\xi_1=\frac{1}{\lambda^4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^4 f_2(\xi_1,\xi_2)}{\partial\xi_1{}^4}e^{i\lambda\xi_1}d\xi_1. \qquad (18)$$

Отсюда (17) примет вид

$$i\lambda\cdot\hat{u}(\lambda,x_2)=\int_0^{\infty}\frac{I_1(\lambda,x_2-\xi_2)}{(1+\lambda^4)}(1+\lambda^4)\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2{}^4}\right)\hat{f}_2(\lambda,\xi_2)d\xi_2=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{I_1(\lambda,x_2-\xi_2)}{(1+\lambda^4)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\xi_1}\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2{}^4}\right)\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_1{}^4}\right)f_2(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2. \qquad (19)$$

Применяя к уравнению (19) обратное преобразование Фурье по переменной λ и используя теорему о свертке, а также свойство дифференцирования преобразования Фурье, получим:

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x_1}\int_0^{\infty}\frac{I_1(\lambda,x_2-\xi_2)}{(1+\lambda^4)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\xi_1}\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2{}^4}\right)\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_1{}^4}\right)f_2(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2d\lambda=$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\lambda(x_1-\xi_1)}I_1(\lambda,x_2-\xi_2)}{(1+\lambda^4)}d\lambda\left\{\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2{}^4}\right)\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_1{}^4}\right)f_2(\xi_1,\xi_2)\right\}d\xi_1d\xi_2,$$

или

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}I_2(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2{}^4}\right)\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_1{}^4}\right)f_2(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2.$$

Отсюда имеем следующее представление решения задачи I:

$$u(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_2{}^4}\right)\left(E+\frac{\partial^4}{\partial\xi_1{}^4}\right)f_2(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 d\zeta, \quad (20)$$

где $I_2(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)$ определено с помощью формулу (6).

Учитывая неравенство (11) и формулу (12), получим

$$\left|\lambda\cdot\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)\right|\le\left(2|\mu|\sqrt{\frac{|\mu|}{\pi}}\right)\cdot\left|\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu)\right|,$$

откуда следует оценка

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\lambda\cdot\hat{\hat{u}}(\lambda,\mu)|^2\,d\mu d\lambda\le\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|2|\mu|\sqrt{\frac{|\mu|}{\pi}}\right|^2\cdot\left|\hat{\hat{f}}_1(\lambda,\mu)\right|^2 d\mu d\lambda\,. \quad (21)$$

Используя свойства дифференцирования преобразование Фурье, неравенство треугольника для норм, а также учитывая (20) и (21), условия наложенные на функцию u получим оценку

$$\|u(x_1,x_2)\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}\le C_0\,\|f_1\|_{W_2^2(\Omega)},$$

где C_0 – некоторая постоянная.

Из которой вытекает единственность решения задачи I .

Литература

1. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972.
2. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 1999. – 702 с.
3. Лаврентьев М.М. Интегральная геометрия и обратные задачи // Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1984. С.81-86.
4. Лаврентьев М.М., Бухгейм А.Л. Об одном классе задач интегральной геометрии // Докл. АН СССР. 1973. Т.311, №1. С. 38-39.
5. Лаврентьев М.М., Бухгейм А.Л. Об одном классе операторных уравнений первого рода // Функцион. анализ и его прил. 1973. Т.7. Вып.4. С.44-53.
6. Мухометов Р.Г. О задаче интегральной геометрии // Математические проблемы геофизики. Вып. 6. Ч. 2. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975. С. 212-242.
7. Бегматов Акр.Х. Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. мат. журнал. 1995. Т. 36. № 2. С. 243-247.
8. Begmatov Akram H. On a class of weakly ill-posed Volterra-type of integral geometry in the three-dimensional space // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 1995. Vol. 3. №3. P. 231-235.
9. Бегматов Акр.Х. Вольтеровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых с особенностями // Сиб. мат. журнал. 1997. Т. 38. № 4. С 723-737.
10. Бегматов Акр.Х. Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершинах // Доклады РАН. 1998. Т. 358. № 2. С. 151-153.
11. Begmatov Akbar H. and Begmatov Akram H. Problems of integral geometry on curves and surfaces in Euclidean space // Ill-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrent'ev et al., Eds., Proceedings of International Conference, VSP, Utrecht-Boston, 2003, 1-18.
12. Begmatov Akram H., Ochilov Z.H. Recovering of function set by integrals along a curve in the plane // Ill-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrent'ev et al., Eds., Proceedings of International Conference, VSP, Utrecht-Boston, 2003, 191-198
13. Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х. Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией // Доклады РАН. – Москва, 2009. 429. – № 3. – С. 295-297.
14. Akram H. Begmatov, M.E. Muminov, Z.H. Ochilov. The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type. Horizon Research Publishing (HRPUB) Corporation, USA, Mathematics and statistics. Vol 3, No 5. 2015. p. 113-120.
15. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1180 с.

UDK:

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ В ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

А.В.Кабулов[1], Э.Урунбаев[2], И.Х.Норматов[3], А.О.Ашуров[3]
[1]*Национальный университет Узбекистана,*
[2]*Самаркандский государственный университет,*
[3]*Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий*

Аннотация. В дискретной математике минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм является одной из необходимых задач. Обычно при минимизации булевых функций применяются логические правила склеивания, поглощения и обобщенного склеивания элементарных конъюнкций. В настоящей работе изложен некоторый метод представления элементарных конъюнкций парами чисел в десятичной системе исчисления (десятичными кодами) и установления правил булевой алгебры над этими кодами.

Ключевые слова: алгоритмы, система, логических уравнений, дискрет, минимизация, логические признаки, булевая функция, логика, дизъюнктивная нормальная форма, элементарная конъюнкции, склеивания, поглощения, десятичных чисел.

Representation of logic operations in decimal calculation system

Abstract. In discrete mathematics, minimizing Boolean functions in the class of disjunctive normal forms is one of the necessary problems. Usually, when minimizing Boolean functions, the logical rules of gluing, absorption, and generalized gluing of elementary conjunctions are applied. In this paper, we describe a method for representing elementary conjunctions by pairs of numbers in the decimal system of calculus (decimal codes) and establishing rules for Boolean algebra over these codes.

Keywords: algorithms, system, logical equations, discrete, minimization, logical signs, Boolean function, logic, disjunctive normal form, elementary conjunction, gluing, absorption, decimal numbers.

Одной из основных задач дискретной математики является минимизация булевых функций. В настоящей работе изложен метод и правила представления элементарных конъюнкций десятичными кодами и выполнения операций склеивания, поглощения и обобщенного склеивания булевой алгебры над этими кодами.

Пусть $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ – исходный алфавит переменны x. Рассмотрим функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$, аргументы которых определены на множестве $E^2=\{0,1\}$ и такие, что $f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in E^2$, когда $\alpha_i\in E^2$ $(i=1,2,...,n)$. Известно, эти функции являются функциями алгебры логики или булевыми функциями.

Выражение

$$K=x_{i_1}^{\sigma_1}\,\&\,...\,\&\,x_{i_r}^{\sigma_r},\ (i_\nu=i_\mu \text{ при } \nu=\mu)$$

называется элементарной конъюнкцией (э.к.), число r – рангом э.к.

Выражение

$$D=\bigvee_{i=1}^{s}K_i(K_i\neq K_j,\ i\neq j),$$

где K_i $(i=1,2,...,s)$ э.к. ранга r_i – дизъюнктивная нормальная форма (д.н.ф.). Каждая булевая функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ реализуется некоторой д.н.ф. $[1]$.

Обычно при минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм применяются следующие правила [2, 3]:

1) склеивание

$$xK\vee\bar{x}K=K;$$

2) поглощение

$$KB\vee K=K;$$

3) обобщенное склеивание

$$\bar{x}K \vee xB = xK \vee xB \vee KB.$$

Для каждой конъюнкции K переменные из X можно разделить на три группы:

$$W_k^1 = \{x : x \in X,\ xK = K\};$$

$$W_k^2 = \{x : x \in X,\ x^\sigma K \neq K,\ \sigma = 0,1\};$$

$$W_k^0 = \{x :\ x \in X,\ \bar{x}K = K\}.$$

Очевидно, что

$$W_k^1 \bigcup W_k^0 \bigcup W_k^2 = X;$$

$$W_k^1 \bigcap W_k^0 \neq \varnothing,\ W_k^1 \bigcap W_k^2 \neq \varnothing,\ W_k^0 \bigcap W_k^2 \neq \varnothing$$

Каждую группу переменных W можно обозначить при помощи бинарного вектора $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ следующим образом:

$$\beta_i = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i \in W; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Количество единиц в векторе $\tilde{\beta}$ назовем нормой и обозначим ее через $N_{\tilde{\beta}}$. Если вектор $\tilde{\beta}$ принят за двоичное число, то его легко перевести в десятичное:

$$r(W) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i 2^{n-i}.$$

Положим $a = r(W_k^2), b = r(W_k^1)$ и $c = r(W_k^0)$. Очевидно, что $a + b + c = 2^n - 1$. Числа a, b, c однозначно определяют конъюнкцию K и будем считать, что пары $(a,b), (a,c), (b,c)$ соответствует э.к. K.

Вводим целочисленную числовую функцию $\Pi(z, y)$, аргументы которой восьмеричные числа. Пусть число z есть $z_1, z_2, ..., z_m$ а $y - y_1, y_2, ..., y_m$ (z_i, y_i - цифры этой системы, $i = \overline{1,m}$). Тогда

$$\Pi(z, y) = \sum_{i=1}^{m} Q_{r_i y_i} 8^{m-i},$$

где Q задается так, как показано в таблице.

$y \setminus z$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	2	2	0	0	2	2
3	0	1	2	3	0	1	2	3
4	0	0	0	0	4	4	4	4
5	0	1	0	1	4	5	4	5
6	0	0	2	2	4	4	6	6
7	0	1	2	3	4	5	6	7

Геометрический смысл этой функции можно выразить следующим образом.

Пусть

$$z = r(W_z); \quad y = (W_y).$$

Допустим

$$W_z \bigcap W_y = W_t,$$

тогда $r(W_t) = \Pi(z, y)$.

Пример:

$$W_z = \{x_2, x_4, x_6\}, \quad W_y = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}.$$

Отсюда

$$r(W_z) = 21; \quad r(W_y) = 46; W_z \bigcap W_y = \{x_4\};$$

$$r(\{x_4\}) = 4; \quad \Pi = (21{,}46) = \Pi(25_8{,}56_8) = 4.$$

Результат этой функции не зависит от расположения переменных, то есть

$$\Pi(z, y) = \Pi(y, z).$$

В дальнейшем конъюнкции и характеризующие их числа будем обозначать так:

$$K(a,b,c), \quad K_i(a_i, b_i, c_i), K_j(a_j, b_j, c_j) \text{ и } K(a_t, b_t, c_t).$$

Теорема 1. Если для двух десятичных чисел *a, b* имеет место

$$\Pi(a,b) = 0 \quad \text{и } a + b \le 2^n - 1, \qquad (1)$$

тогда пара (a,b) соответствует только одной э.к. K, заданной в n - мерном двоичном кубе E_n^2.

Доказательство. Пусть существует такая э.к. K в E_n^2, что

$$r(W_k^2) = a, \ r(W_k^1) = b.$$

Согласно (1) получаем:

$$W_k^2 \bigcap W_k^1 = \varnothing, \ W_k^2 \bigcap W_k^1 \subseteq X,$$

отсюда

$$X \setminus (W_k^2 \bigcup W_k^1) = W_k^0.$$

Следовательно,

$$W_k^0 \bigcap W_k^1 = \varnothing, \quad W_k^0 \bigcap W_k^2 = \varnothing.$$

Единственность конъюнкции заключается в следующем. Допустим пара десятичных чисел (a,b) характеризует две различные элементарные конъюнкции K_i, K_j. По нашему предположению

$$r(W_{k_i}^2) = a, \ r(W_{k_j}^1) = b,$$

$$r(W_{k_j}^2) = a, \ r(W_{k_j}^1) = b.$$

Это означает, что

$$W_{k_i}^2 = W_{k_j}^2, \ W_{k_i}^1 = W_{k_j}^1.$$

Следовательно, $W_{k_i}^0 = W_{k_j}^0$. Тогда получаем $K_i = K_j$. Последнее противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

Выводы:

1. Две конъюнкции K_i и K_j и между собой равны, если соответствующие им десятичные пары равны, то есть

$$a_i = a_j \ (W_{k_i}^2 = W_{k_j}^2), b_i = b_j \quad (W_{k_i}^1 = W_{k_j}^1).$$

2. Одной конъюнкции соответствует только одна пара десятичных чисел.

Теорема 2. Для того, чтобы конъюнкция K_i и K_j склеивались, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие им десятичные пары удовлетворяли условиям

$$a_i = a_j, \ |b_i - b_j| = 2^p \quad \text{и} \quad |N_{b_i} - N_{b_j}| = 1,$$

где P – целое положительное число $(0 \le p \le n-1)$.

Доказательство. Необходимость.

Пусть

$$K_i = x_p K_t, K_j = \overline{x}_p K_t.$$

Тогда

$$W_i^1 = W_t^1 \bigcup \{x_p\}, \quad W_i^2 = W_t^2 \setminus \{x_p\}, \ W_i^0 = W_t^0,$$

$$W_j^1 = W_t^1 \bigcup \{x_p\}, \quad W_j^2 = W_t^2 \setminus \{x_p\}, \; W_j^0 = W_t^0.$$

Получим

$$W_i^1 = W_j^1 \bigcup \{x_p\}, \quad W_i^2 = W_j^2, \; W_j^0 = W_i^0 \bigcup \{x_p\}$$

соответственно

$$a_i = a_j, b_i - b_j = 2^p, \quad N_{b_i} - N_{b_j} = 1.$$

Достаточность. Допустим для э.к. $K_i(a_i, b_i, c_i)$ $K_j(a_j, b_j, c_j)$ имеет место

$$a_i = a_j, \quad b_i - b_j = 2^p, \quad N_{b_i} - N_{b_j} = 1.$$

Тогда

$$W_i^2 = W_j^2, \quad W_i^1 \setminus W_j^1 = \{x_p\}, \; W_i^1 = W_j^1 \bigcup \{x_p\}.$$

Следовательно,

$$W_j^0 = W_i^0 \bigcup \{x_p\}.$$

Существует такая конъюнкция K_t, что

$$W_t^2 = W_i^2 \bigcup \{x_p\}, \quad W_t^1 = W_j^1, \; W_t^0 = W_i^0,$$

то есть

$$K_i = x_p K_t, \; K_j = \overline{x}_p K_t.$$

Очевидное выражение

$$K_i \bigcup K_j = x_p K_t \vee \overline{x} K_t$$

Дает формулу правила склеивания. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $K_i = x_p K_t$ и $K_j = \overline{x} p K_t$, тогда соответствующая десятичная пара конъюнкции K_t вычисляется так:

$$a_t = a_i + 2^p, \quad b_t = \min(b_i, b_j).$$

Теорема 3. Для того, чтобы конъюнкция K_i поглощала K_j, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие им десятичные пары удовлетворяли условиям

$$Л(b_i, b_j) = b_i, \quad Л(c_i, c_j) = c_i \qquad (2)$$

Доказательство. Необходимость. Для того, чтобы K_i поглощала K_j должно быть $K_j = K_i K_t$, тогда

$$W_j^1 = W_i^1 \bigcup W_t^1, \; W_j^0 = W_i^1 \bigcup W_t^0,$$

то есть

$$W_j^1 \bigcap W_i^1 = W_i^1, \; W_j^0 \bigcap W_i^0 = W_i^0.$$

Последние выражения эквивалентны следующим:

$$Л(b_j, b_i) = b_i, \quad Л(c_i, c_j) = c_i$$

Достаточность. Пусть $K_i(a_i, b_i, c_i)$ и $K_j(a_j, b_j, c_j)$. Согласно (2) получаем

$$W_i^0 \bigcap W_j^0 = W_i^1, \; W_i^1 \bigcap W_j^1 = W_i^1,$$

то есть

$$W_j^0 \supseteq W_i^0, \; W_j^1 \supseteq W_i^1.$$

Положим

$$W_j^0 \setminus W_i^0 = W_t^0, \; W_j^1 \setminus W_i^1 = W_i^1.$$

Значит, существует такая конъюнкция K_t, что $K_j = K_i K_t$, а выражение $K_i \bigcup K_j$ дает формулу поглощения. Теорема доказана.

Теорема 4. Для того, чтобы к конъюнкциям K_j и K_i применить правила обобщенного склеивания, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие им десятичные пары удовлетворяли условиям

$$Л(b_i, c_i) = 2^p, \quad Л(b_j, c_j) = 0$$

или

$$Л(b_i, c_j) = 0, \quad Л(b_j, c_j) = 2^p$$

где p – целое положительное число, $0 \le p \le n-1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $K_i(a_i, b_i, c_i), \quad K_j(a_j, b_j, c_j)$ и

$K_i = x_p K_{i_1}, \quad K_j = \bar{x}_p K_{j_1} \quad (K_{i_1} \bigcap K_{j_1} \ne 0).$

Тогда

$$K_i \vee K_j = K_i \vee K_j \vee K_{i_1} \vee K_{j_1};$$

$$W_i^1 = W_{i_1}^1 \bigcup \{x_p\}, \quad W_i^0 = W_{i_1}^0; \quad W_j^1 = W_{j_1}^1, \quad W_j^0 = W_{j_1}^0 \bigcup \{x_p\}.$$

Отсюда следует, что

$$W_i^1 \bigcap W_j^0 = \{x_p\}, \quad W_i^0 \bigcap W_j^1 = \varnothing.$$

Последнее выражения эквивалентны

$$Л(b_i, c_j) = 2^p, \quad Л(c_i, b_j) = 0.$$

Достаточность. По условиям (3) имеем

$$W_i^1 \bigcap W_j^0 = \{x_p\}, \quad W_i^0 \bigcap W_j^1 = \varnothing.$$

Теперь можно записать

$$\left(W_i^1 \bigcup \{x_p\}\right) \bigcap \left(W_{j_1}^0 \bigcup \{x_p\}\right) = \{x_p\},$$

$$W_{i_1}^1 \bigcap W_{j_1}^1 =,$$

$$\left(W_{i_1}^1 \bigcup \{x_p\}\right) \bigcap \left(W_{j_1}^0 \bigcup \{x_p\}\right) = \{x_p\},$$

$$W_{i_1}^1 \bigcap W_{j_1}^1 = \varnothing, \; W_{i_1}^0 = W_i^0, \; W_{j_1}^1 = W_j^1.$$

Отсюда видно, что существуют такие конъюнкции K_{i_1} и K_{j_1}, когда

$$K_{i_1} \wedge K_{j_1} \ne 0, \quad W_{i_1}^0 = W_i^0, \quad W_{i_1}^1 = W_i^1 \setminus \{x_p\},$$

$$W_{j_1}^1 = W_j^1, \quad W_{j_1}^0 = W_j^0 \setminus \{x_p\}, \quad K_i = K_{i_1} x_p, \quad K_j = \bar{x} p K_{j_1}.$$

Следовательно, к формуле $K_i \vee K_j$ правила обобщенного склеивания применимы. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $K_i \vee K_j = K_i \vee K_j \vee K_t$. Тогда десятичная пара (a_t, b_t) конъюнкция K_t вычисляется по следующим формулам:

$$a_t = Л(a_i, a_j) + 2^p;$$

$$b_t = b_i + b_j - Л(b_i, b_j).$$

Теорема 5. Элементарные конъюнкции K_i и K_j не ортогональны, то есть, $K_i \cdot K_j \ne 0$, тогда и только тогда, когда

$$Л(b_i, c_j) = Л(b_j, c_i) = 0.$$

Доказательство теоремы приводится аналогично теоремам 3 и 4.

Если $K_i \cdot K_j \neq 0$ тогда э.к. $K_t = K_i \cdot K_j$ соответствует паре (a_t, b_t), где

$$a_t = Л(a_i, a_j); \quad b_t = b_i + b_j - Л(b_i, b_j).$$

Теорема 6. Элементарные конъюнкции K_i и K_j представляются в виде $K_i = K_{i_1} \cdot K_t, \quad K_j = K_{j_1} \cdot K_t$ тогда и только тогда, когда

$$Л(b_i, b_j) \neq 0 \quad \text{или } Л(c_i, c_j) \neq 0.$$

Доказательство теоремы приводится также аналогично теоремам 3 и 4.

Соответствующая пара (a_t, b_t) конъюнкции K_t вычисляются по формулам:

$$b_t = Л(b_i, b_j); \quad c_t = Л(c_i, c_j).$$

Литература

1. Кабулов В.К. Ракамли автоматлар ва алгоритмлар. Ташкент, «Укитувчи», 1980.
2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М., «Наука», 1979.
3. Журавлев Ю.И. Алгоритм построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики, «Дискретная математика и математические вопросы кибернетики». М., «Энергия», 1975.

UDK: 517

IZOSPEKTRAL SHTURM – LIUVILL CHEGARAVIY MASALALAR OILASI HAQIDA

O. Mirzayev, G‘. Mannonov, H. Normurodov
Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada spektrlari bir xil bo‘lgan har xil Shturm – Liuvill chegaraviy masalalari oilasini qurish algoritmi bayon qilingan.

Kalit so‘zlar: xos qiymat, normallovchi o‘zgarmaslar, integral tenglama.

О семействе изоспектральных краевых задач Штурма – Лиувилля

Аннотация: В настоящей работе излагается алгоритм построения семейства разных краевых задач Штурма – Лиувилля с одинаковым спектром.

Ключевые слова: собственные значения, нормирующие константы, интегральное уравнение.

On isospectral Sturm-Liouvill boundary-volues problems

Abstract: In this paper an algorithm for constructing a family of different Sturm-Liouville boundery-value problems with a same spectrum is presented.

Keywords: eigenvalues, normalization constants, integral equation.

Kirish

Ta’rif – 1. Quyidagi

$$L^0 y \equiv -y'' = \lambda y, \; 0 \le x \le \pi$$

$$y'(0) = 0, \; y'(\pi) = 0,$$

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \; 0 \le x \le \pi$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \; y(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

har xil ko‘rinishdagi Shturm – Liuvill chegaraviy masalalarining spektrlari uchun

$$\sigma(L) = \sigma(L^0) = \left\{ n^2, n \ge 0 \right\}$$

tenglik bajarilsa, ularga izospektral chegaraviy masalalar deyiladi. Bu yerda $q(x) \in C[0, \pi]$ - haqiqiy uzluksiz funksiya, λ - kompleks parametr , h va H haqiqiy sonlar.

Mazkur risolada spektri

$$\sigma(L)=\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}=\{n^2, n\geq 0\}$$

ko‘rinishdagi musbat sonlardan iborat bo‘lgan barcha $L=L(q(x),h,H)$ Shturm – Liuvill chegaraviy masalalarini qurish algoritmi bayon qilingan. Bu turdagi masalalarni o‘rganishda teskari spektral masalani yechshning Gelfand – Levitan usulidan foydalanish maqsadga muvofiq.

1. Teskari spektral masala

Ushbu

$$L(q(x),h,H)y\equiv -y''+q(x)y=\lambda y,\ 0\leq x\leq \pi \tag{1.1}$$

$$y'(0)-hy(0)=0,\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0 \tag{1.2}$$

chegaraviy masalani qaraylik. Bunda $q(x)\in C[0,\pi]$ - haqiqiy uzluksiz funksiya, λ - kompleks parametr, h va H haqiqiy sonlar.

$\varphi(x,\lambda)$ orqali (1.1) differensial tenglamaning

$$\varphi(0,\lambda)=1,\ \ \varphi'(0,\lambda)=h \tag{1.3}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini belgilaylik. U holda quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

1. (1.1), (1.3) Koshi masalasining $[0,\pi]$ kesmada aniqlangan yagona $y(x)=\varphi(x,\lambda)$ yechimi mavjud.

2. x o‘zgaruvchining har bir tayinlangan qiymatida $\varphi(x,\lambda)$, λ bo‘yicha $\frac{1}{2}$ tartibli butun funksiya.

3. $\varphi(x,\lambda)$ yechim uchun

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+\int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t dt \tag{1.4}$$

tasvir o‘rinli. Bu yerda

$$K(x,x)=h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\,. \tag{1.5}$$

Ko‘rinib turibdiki, $\varphi(x,\lambda)$ funksiya (1.2) chegaraviy shartlarning birinchisini, ya’ni $\varphi'(0,\lambda)-h\varphi(0,\lambda)=0$ qanoatlantiradi. Endi $\varphi(x,\lambda)$ funksiyani (1.2) chegaraviy shartlarning ikkinchisiga qo‘yib,

$$\Delta(\lambda)\equiv\varphi'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)=0$$

(1.1), (1.2) chegaraviy masalaning xarakteristik tenglamasini hosil qilamiz.Ma’lumki $\Delta(\lambda)$, λ bo‘yicha butun funksiya bo‘lib, cheksizta oddiy $\lambda=\lambda_n$, $n\geq 0$ haqiqiy nollarga ega. Bu λ_n, $n\geq 0$ ($\Delta(\lambda_n)=0$) haqiqiy sonlar (1.1), (1.2) chegaraviy masalaning xos qiymatlaridan iborat bo‘lib, ularga $\varphi(x,\lambda_n)$, $n\geq 0$ xos funksiyalar mos keladi. Bundan tashqari $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n=0}^{\infty}$ - xos funksiyalar $L^2(0,\pi)$ fazoda to‘la ortaganal sistemani tashkil qiladi.

Ta’rif – 1.1. Quyidagi

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda_n)dx\,,\ n=0,1,2,...$$

musbat sonlarga (1.1), (1.2) chegaraviy masalaning normallovchi o‘zgarmaslari deyiladi.

Ta’rif – 1.2. Ushbu $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ - haqiqiy sonlar ketmma – ketligiga (1.1), (1.2) chegaraviy masalaning spektral xarakteristikalari deyiladi.

Teorema – 1.1. (1.1), (1.2) chegaraviy masalaning $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ - spektral xarakteristikalari quyidagi

$$\sqrt{\lambda_n}=n+\frac{c}{n\pi}+\frac{\gamma_n}{n}\,,\quad \{\gamma_n\}\in l_2\,, \tag{1.6}$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta_n}{n}, \quad \{\beta_n\} \in l_2$$

munosabatlarni qanoatlantiradi. Bu yerda

$$c = h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt \,. \tag{1.7}$$

Teorema – 1.2. (V.A. Marchenko). (1.1), (1.2) chegaraviy masalaning $q(x)$, h va H koeffitseyintlari $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ - spektral xarakteristikalar orqali yagona ravishta aniqlanadi.

Teorema – 1.3 (I.M. Gelfand – B.M. Levitan). Ushbu $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ - haqiqiy sonlar ketma – ketliklari juftligi (1.1), (1.2) ko‘rinishdagi $q(x) \in L^2(0,\pi)$ koeffitseyintli biror Shturm – Liuvill chearaviy masalasining spektral xarakteristikalari bo‘lishi uchun (1.6) shartlarning bajarilishi zarur va yetarli.

Yuqoridagi tasdiqlarning isbotlari ushbu [1], [2] va [3] adabiyotlarda keltirilgan.

Odatda (1.1) va (1.2) ko‘rinishdagi Shturm – Liuvill chegaraviy masalasi quyidagi algoritm bo‘yicha quriladi:

1. (1.6) shartlarni qanoatlantiruvchi $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ - haqiqiy sonlar ketma – ketligi yordamida

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x\cos\sqrt{\lambda_n}t - \frac{1}{\alpha_n^0}\cos nx\cos nt\right\} \tag{1.8}$$

funksiyani aniqlaymiz. Bunda

$$\alpha_n^0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, n \ge 1, \\ \pi, n = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

2. Gelfand – Levitan integral tenglamasini tuzamiz:

$$K(x,t) + F(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s,t)ds = 0, \; 0 < t < x \tag{1.10}$$

3. Izlanayotgan (1.1), (1.2) ko‘rinishdagi chegaraviy masalaning $q(x), h, H$ koeffitsiyentlari quyidagi

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}K(x,x), \tag{1.11}$$

$$h = K(0,0) = -F(0,0), \tag{1.12}$$

$$H = c - h - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt \tag{1.13}$$

formulalar yordamida topiladi.

2. Izospektral chegaraviy masalani qurish algoritmi

Spektral xarakteristikalari ushbu

$$\lambda_n = n^2, n \ge 0; \qquad \alpha_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, n \ge k \\ \alpha_{k-1}, n = k-1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1, n = 1 \\ \alpha_0, n = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

ko‘rinishda bo‘lgan Shturm – Liuvill chegaraviy masalasini tuzish bilan shug‘ullanamiz. Bu yerda $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$ - berilgan musbat sonlar.

Ko‘rinib turibdiki (2.1) formulalar bilan aniqlangan $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ - haqiqiy sonlar ketma - ketliklari teorema - 1.3ning shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun $q(x) = q(x, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}) \in L_2(0, \pi)$, $h = h(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})$, $H = H(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})$ koeffitsiyentli (1.1), (1.2) ko‘rinishdagi k ta parametrli yagona $L(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}) = L(q(x), h, H)$ Shturm – Liuvill chegaraviy masalasi mavjud. Bu holda $L(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})$ chegaraviy masalalar oilasining spektri uchun

$$\sigma(L(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})) = \{n^2, n \geq 0\}$$

munosabato‘rinlibo‘ladi.

Endi ushbu

$$L(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})y = -y'' + q(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})y = \lambda y, \ 0 \leq x \leq \pi \tag{2.2}$$

$$y'(0) - h(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})y(0) = 0, \ \ y'(\pi) + H(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})y(\pi) = 0 \tag{2.3}$$

ko‘rinishidagi k ta parametrli Shturm – Liuvill chegaraviy masalasining $q(x) = q(x, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}) \in L_2(0, \pi)$, $h = h(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})$, $H = H(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})$ koeffitsiyentlarini topish jarayonini bayon qilamiz.

Buning uchun avvalo (1.8) formuladan va (2.1) ko‘rinishdagi spektral xarakteristikalardan foydalanib $F(x,t)$ funksiyani tuzib olamiz:

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n \cos nx \cos nt. \tag{2.4}$$

Bu yerda

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_n^0}, \ \ \alpha_n^0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, n \geq 1, \\ \pi, n = 0. \end{cases}$$

So‘ngra (1.10) integra tenglamadan va (2.4) formuladan foydalanib $K(x,t)$ funksiyani hisoblaymiz:

$$K(x,t) = -F(x,t) - \int_0^x K(x,s)F(s,t)ds = -\sum_{n=0}^{k-1} a_n \cos nx \cos nt -$$

$$-\int_0^x K(x,s)\left\{\sum_{n=0}^{k-1} a_n \cos ns \cos nt\right\}ds =$$

$$= -\sum_{n=0}^{k-1} a_n \cos nt\left\{\cos nx + \int_0^x K(x,s)\cos nsds\right\} = -\sum_{n=0}^{k-1} a_n \cos nt\varphi(x, \lambda_n),$$

ya’ni

$$K(x,t) = -\sum_{n=0}^{k-1} a_n \cos nt\varphi(x, \lambda_n), \tag{2.5}$$

bunda

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos nx + \int_0^x K(x,s)\cos nsds. \tag{2.6}$$

(1.11) formulaga ko‘ra, (2.2) differensial tenglamaning

$$q(x) = q(x, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}) = -2\sum_{n=0}^{k-1} a_n \left(\cos nt\varphi(x, \lambda_n)\right)' \tag{2.7}$$

koeffitsiyentini va (1.12) tenglikdan (2.3) chegaraviy shartlarning birinchisini topamiz:

$$h = h(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}) = -F(0,0) = -\sum_{n=0}^{k-1} a_n. \tag{2.8}$$

Endi (2.6) tasvirni (2.5) formuladan foydalanib, ushbu

$$\varphi\left(x,\lambda_n\right)=\cos nx-\sum_{p=0}^{k-1}a_p\varphi(x,\lambda_p)\left\{\int_0^x\cos nt\cos ptdt\right\},0\le n\le k-1 \tag{2.9}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bundan foydalanib $\varphi'\left(\pi,\lambda_n\right)$ hosilani hisoblaymiz:

$$\varphi'\left(x,\lambda_n\right)=-n\sin x-\sum_{p=0}^{k-1}a_p\varphi'(x,\lambda_p)\left\{\int_0^x\cos nt\cos ptdt\right\}-$$
$$-\sum_{p=0}^{k-1}a_p\varphi(x,\lambda_p)\cos px\cos nx. \tag{2.10}$$

Nihoyat (2.9) va (2.10) formulalardan foydalanib $\varphi\left(\pi,\lambda_n\right)$, $\varphi'\left(\pi,\lambda_n\right)$ ifodalarning qiymatlarini topamiz:

$$\varphi\left(\pi,\lambda_n\right)=\left(-1\right)^n-\sum_{p=0}^{k-1}a_p\varphi(\pi,\lambda_p)\left\{\int_0^\pi\cos nt\cos ptdt\right\}=\left(-1\right)^n-a_n\varphi\left(\pi,\lambda_n\right)\alpha_n^0,$$

$$\varphi\left(\pi,\lambda_n\right)=\frac{\left(-1\right)^n}{1+a_n\alpha_n^0}. \tag{2.11}$$

Xuddi shuningdek (2.10) tasvirda $x=\pi$ deb $\varphi'\left(\pi,\lambda_n\right)$ noma’lumlarning qiymatlarini aniqlaymiz:

$$\varphi'\left(\pi,\lambda_n\right)=-\sum_{p=0}^{k-1}a_p\varphi'(\pi,\lambda_p)\left\{\int_0^\pi\cos nt\cos ptdt\right\}-\left(\sum_{p=0}^{k-1}a_p\varphi(\pi,\lambda_p)\cos p\pi\right)\cos n\pi=$$
$$=-a_n\alpha_n^0\varphi'\left(\pi,\lambda_n\right)-\left(-1\right)^n\sum_{p=0}^{k-1}(-1)^p a_p\varphi(\pi,\lambda_p)$$

ya’ni

$$\varphi'\left(\pi,\lambda_n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{1+a_n\alpha_n^0}\sum_{p=0}^{k-1}\left(-1\right)^p a_p\varphi(\pi,\lambda_p) \tag{2.12}$$

Oxirgi (2.12) tenglikni (2.11) formuladan foydalanib quyidagicha yozish mumkin:

$$\varphi'\left(\pi,\lambda_n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{1+a_n\alpha_n^0}\sum_{p=0}^{k-1}\frac{a_p}{1+a_n\alpha_n^0} \tag{2.13}$$

Ushbu

$$\varphi'(\pi,\lambda_n)+H(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{k-1})\varphi\left(\pi,\lambda_n\right)=0$$

chegaraviy shartdan

$$\varphi'\left(\pi,\lambda_n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{1+a_n\alpha_n^0}\sum_{p=0}^{k-1}\frac{a_p}{1+a_n\alpha_n^0} \tag{2.15}$$

tenglik kelib chiqadi.

Adabyotlar

1. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка // Труды Моск. Матем. об – ва. 1952. Т. 1. С. 327-420.

2. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Известия АН СССР, сер, мат. 1951. Т. 15. С. 309-360.

3. A. B. Hasanov. Shturm – Liuvill chegaraviy masalalari nazariyasiga kirish. 1 – qism. T.: Fan, 2011.

УДК 517.957

Численное решение задачи кросс диффузии с нелокальными граничными условиями и переменной плотностью

З.Р.Рахмонов[1], Ж.Э.Урунбаев[2], Д.И.Ярметова[1]
[1]*Национальный университет Узбекситана*
[2]*Самаркандский государственный университет*
E – mail: zraxmonov@inbox.ru, urin1987@rambler.ru

Аннотация. В работе исследуется асимптотика автомодельных решений нелинейной системы кросс диффузии, связанной с нелокальными граничными условиями. Получен главный член асимптотики автомодельных решений. Для численного исследования рассматриваемой задачи предложен способ выбора подходящего начального приближения для итерационного процесса. Используя асимптотические формулы в качестве начального приближения для итерационного процесса, произведены численные расчеты и анализ результатов.

Ключевые слова: асимптотика, кросс-диффузия, нелинейная система, автомодельное решение, итерация.

Nolokal chegaraviy shartlar bilan berilgan va o‘zgaruvhcan zichlikka ega kross diffuziya masalasini sonli yechish

Annotatsiya. Ushbu maqolada nolokal chegaraviy shartlar bilan bog‘langan nochiziqli kross diffuziya sistemasining avtomodel yechimlari asimptotikasi tadqiq qilingan.Avtomodel yechimlar asimptotikalarining bosh hadlari olingan.Sonli yechishda iteratsion jarayon uchun boshlang‘ich yaqinlashishni tanlash usuli taklif etilgan. Iteratsion jarayon uchun boshlang‘ich yaqinlashish sifatida asimptotik formulalar tanlanib sonli yechimlar olingan va tahlil qilingan.

Kalit so‘zlar:asimptotika, kross-diffuziya, nochiziqli sistema, avtomodel yechim, iteratsion jarayon.

Numerical solution of the cross diffusion problem with nonlocal boundary conditions and variable density

Abstract. In this paper, we study the asymptotic behavior of self-similar solutions of a nonlinear system of cross diffusion coupled via nonlocal boundary conditions. The main term of the asymptotics of self-similar solutions is obtained. For the numerical investigation of the problem is provided a method of selecting suitable initial guess for the iterative process. Using asymptotic formulas as the initial approximation for the iterative process, numerical calculations and analysis of the results are performed.

Keywords: asymptotic, cross-diffusion, nonlinear system, self-similar solution, iterative process.

В настоящей работе исследуются качественные свойства решений нелинейной системы кросс диффузии, связанной с нелинейными граничными условиями

$$|x|^n \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon^{m_1-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad |x|^n \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{m_2-1}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right), \quad x \in R_+, \ t > 0, \tag{1}$$

$$-\upsilon^{m_1-1}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u^{q_1}(0,t), \quad -u^{m_2-1}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}(0,t) = \upsilon^{q_2}(0,t), \ t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \upsilon(x,0) = \upsilon_0(x), \quad x \in R_+, \tag{3}$$

где $m_i > 1,\ q_i > 0\,(i = 1,2),\ u_0$ и $\upsilon_0(x)$ - неотрицательные непрерывные функции с компактным носителем в R_+.

Процесс кросс диффузии (перекрестной диффузии) означает, что пространственное перемещение одного объекта, описываемого одной из переменных, происходит за счет диффузии другого объекта, описываемого другой переменной [6].

Модели кросс диффузии встречаются в различных областях естествознания. Например, в физических системах (физике плазмы) [1-3], в химических системах (динамике электролитических растворов), в биологических системах (кросс-диффузионном транспорте, динамике популяционных систем), в экологии (динамике возрастной структуры леса), в сейсмологии – модель Бурриджа-Кнопоффа, описывающая взаимодействие тектонических плит [4-7]. При исследовании

биологической популяции и движения тектонических плит активно применяются математические модели с кросс-диффузией [4, 5].

Известно, что системы вырождающихся уравнений могут не иметь классическое решение в области, где $u,\ \upsilon \equiv 0$. В этом случае изучается обобщенное решение системы (1), имеющей физический смысл в классе

$$u(x,t),\ \upsilon(x,t) \geq 0,\ \upsilon^{m_1-1}\frac{\partial u}{\partial x},\ u^{m_2-1}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \in C\left(R_+ \times (0,+\infty)\right).$$

и удовлетворяющие системе (1) в смысле распределения [1, 3].

Изучению условий глобальной разрешимости и неразрешимости задачи (1)-(3) при различных значениях числовых параметров посвящено большое количество работ [5-15] (подробно см. в библиографии [6]). Авторы работ [8, 9] изучали условия глобальной разрешимости и неразрешимости по времени решения и установили оценку решения вблизи времени взрыва нелокальной задачи диффузии

$$u_t = u_{xx},\quad \upsilon_t = \upsilon_{xx},\quad x>0,\ 0<T<0, \tag{4}$$

$$-u_x(0,t) = u^{\alpha}\upsilon^{p},\quad -\upsilon_x(0,t) = u^{q}\upsilon^{\beta},\quad 0<t<T, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \upsilon(x,0) = \upsilon_0(x),\ x>0. \tag{6}$$

Доказали, что если $pq \leq (1-\alpha)(1-\beta)$, то всякое решение задачи (4)-(6) является глобальным.

В работе [10] исследованы следующие задачи

$$u_t = \left(u^{k_1}\right)_{xx},\quad \upsilon_t = \left(\upsilon^{k_2}\right)_{xx},\quad x\in R_+,\ t>0, \tag{7}$$

$$-\left(u^{k_1}\right)_x(0,t) = \upsilon^{p}(0,t),\quad -\left(\upsilon^{k_2}\right)_x(0,t) = u^{q}(0,t),\quad t>0, \tag{8}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\quad \upsilon(x,0) = \upsilon_0(x),\quad x\in R_+, \tag{9}$$

Показано, что решение задачи (7)-(8) является глобальным, если $pq \leq (k_1+1)(k_2+1)/4$. Были получены условия для числовых параметров систем (7)-(9), при которых решение задачи взрывается за конечное время.

Также следует отметить работу [11], в которой исследовалась система (7) со следующими краевыми условиями

$$-\left(u^{k_1}\right)_x(0,t) = u^{\alpha}\upsilon^{p}(0,t),\quad -\left(\upsilon^{k_2}\right)_x(0,t) = u^{q}\upsilon^{\beta}(0,t),\quad t>0.$$

Доказали, что $\min\{y_1-r_1, y_2-r_2\} = 0$, где

$$r_1 = \frac{2p+k_2+1-2\beta}{4pq-(k_2+1-2\alpha)(k_1+1-2\beta)},$$

$$r_2 = \frac{2p+k_1+1-2\beta}{4pq-(k_2+1-2\alpha)(k_1+1-2\beta)},$$

$$y_1 = \frac{1-r_1(k_1-1)}{2},\ y_2 = \frac{1-r_2(k_2-1)}{2},$$

является критической экспонентой типа Фуджита.

Данная работа посвящена исследованию асимптотики автомодельного решения задачи (1)-(3). Построены различные автомодельные решения задачи (1)-(3) для случая медленной диффузии ($m_1,\ m_2>1$), являющиеся асимптотикой решений рассматриваемой задачи. Для численного исследования предлагаются способы выбора подходящего начального приближения для итерационного процесса, сохраняющие качественные свойства задачи (1)-(3). Также сконструирован итерационный процесс и проведены численные расчеты, показывающие быструю сходимость к точному решению.

Система уравнений (1) при $m_i > 1\ (i = 1, 2)$ описывает процессы с конечной скоростью распространения возмущений. Уравнения (1) при $u(x,t)$, $\upsilon(x,t) = 0$ являются вырождающимися, поэтому задача (1)-(3) допускает обобщенное решение, не имеющее в точках вырождения необходимой гладкости.

Система (1) имеет ограниченные автомодельные решения с компактным носителем следующего вида

$$\begin{cases} \underline{u}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1} f(\xi), \\ \underline{\upsilon}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2} \varphi(\xi),\ \xi = x(T+t)^{-\gamma} \end{cases} \tag{10}$$

где $T > 0$, $\gamma = \dfrac{q_1 - m_2}{(n+2)(q_1 - m_2) + m_2 - 1} = \dfrac{q_2 - m_1}{(n+2)(q_2 - m_1) + m_1 - 1}$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{(n+2)(q_1 - m_2) + m_2 - 1}$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{(n+2)(q_2 - m_1) + m_1 - 1}$, а функции $\left(f(\xi), \varphi(\xi)\right)$ являются решением следующей задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(\varphi^{m_1 - 1}\dfrac{df}{d\xi}\right) + \beta\xi^{n+1}\dfrac{df}{d\xi} + \alpha_1\xi^n f = 0, \\ \dfrac{d}{d\xi}\left(f^{m_2 - 1}\dfrac{d\varphi}{d\xi}\right) + \beta\xi^{n+1}\xi\dfrac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_2\xi^n\varphi = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} -\varphi^{m_1 - 1}\dfrac{df}{d\xi}(0) = f^{q_1}(0), \\ -f^{m_2 - 1}\dfrac{d\varphi}{d\xi}(0) = \varphi^{q_2}(0), \end{cases} \tag{12}$$

которая получается после подстановки (10) в (1)-(3) и некоторых упрощений. Рассмотрим следующие функции

$$\begin{cases} \tilde{f}(\xi) = \left(a - \xi^{n+2}\right)^{\frac{1}{m_2 - 1}}, \\ \tilde{\varphi}(\xi) = \left(a - \xi^{n+2}\right)^{\frac{1}{m_1 - 1}}, \end{cases} \tag{13}$$

где $a > 0$.

Теорема 1. Пусть $m_1 > 1$ и $m_2 > 1$, тогда решение с компактным носителем системы уравнений (11) при $\xi \to \sqrt[n+2]{a}$ имеет асимптотику

$$\begin{cases} f(\xi) = c_1\tilde{f}(\xi)\left(1 + o(1)\right), \\ \varphi(\xi) \square c_2\tilde{\varphi}(\xi)\left(1 + o(1)\right), \end{cases} \tag{14}$$

где $c_1 = \left(\dfrac{\gamma(m_2 - 1)}{n+2}\right)^{1/(m_1 - 1)}$, $c_2 = \left(\dfrac{\gamma(m_1 - 1)}{n+2}\right)^{1/(m_2 - 1)}$.

Доказательство. Ищем решение системы уравнений (11) в следующем виде

$$\begin{cases} f(\xi) = \tilde{f}(\xi)w_1(\tau), \\ \varphi(\xi) \square \tilde{\varphi}(\xi)w_2(\tau), \end{cases} \tag{15}$$

где $\tau = -\ln\left(a - \xi^{n+2}\right)$, $w_1(\tau)$, $w_2(\tau)$ - неотрицательные и ограниченные функции, $\tau \to \infty$ при $\xi \to a^{\frac{1}{n+2}}$. После подстановки (15) в (11) получим следующую систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}L_1\left(w_1,w_2\right)+\left(\dfrac{e^{-\tau}}{(n+2)\left(a-e^{-\tau}\right)}-\dfrac{1}{m_2-1}\right)L_1\left(w_1,w_2\right)+\dfrac{\beta}{(n+2)}\left(\dfrac{w_1}{m_2-1}-w_1'\right)-\dfrac{\alpha_1}{(n+2)^2}\dfrac{e^{-\tau}}{\left(a-e^{-\tau}\right)}w_1=0, \\ \dfrac{d}{d\tau}L_2\left(w_1,w_2\right)+\left(\dfrac{e^{-\tau}}{(n+2)\left(a-e^{-\tau}\right)}-\dfrac{1}{m_1-1}\right)L_2\left(w_1,w_2\right)+\dfrac{\beta}{(n+2)}\left(\dfrac{w_2}{m_1-1}-w_1'\right)-\dfrac{\alpha_2}{(n+2)^2}\dfrac{e^{-\tau}}{\left(a-e^{-\tau}\right)}w_2=0, \end{cases} \tag{16}$$

где $L_1\left(w_1,w_2\right)=w_2^{m_1-1}\left(\dfrac{w_1}{m_2-1}-w_1'\right)$, $L_2\left(w_1,w_2\right)=w_1^{m_2-1}\left(\dfrac{w_2}{m_1-1}-w_2'\right)$.

Отметим, что изучение решений последней системы уравнений является равносильным изучению тех решений системы уравнений (11), каждое из которых в некоторой промежутке $\left[\tau_0,+\infty\right)$, удовлетворяет неравенствам:

$$w_1\left(\tau\right)>0,\ \frac{w_1}{m_2-1}-w_1'\neq 0,$$

$$w_2\left(\tau\right)>0,\ \frac{w_2}{m_1-1}-w_2'\neq 0.$$

Покажем, что решения $\left(w_1\left(\tau\right),w_2\left(\tau\right)\right)$ системы уравнений (16) имеют конечные пределы при $\tau\to+\infty$. Пусть

$$\begin{cases} h_1\left(\tau\right)=L_1\left(w_1,w_2\right), \\ h_2\left(\tau\right)=L_2\left(w_1,w_2\right). \end{cases} \tag{17}$$

Тогда систему (16) приведем к виду

$$\begin{cases} h_1'\left(\tau\right)=-\left(\dfrac{e^{-\tau}}{(n+2)\left(a-e^{-\tau}\right)}-\dfrac{1}{m_2-1}\right)h_1\left(\tau\right)-\dfrac{\gamma}{(n+2)}\left(\dfrac{w_1}{m_2-1}-w_1'\right)+\dfrac{\alpha_1}{(n+2)^2}\dfrac{e^{-\tau}}{\left(a-e^{-\tau}\right)}w_1=0, \\ h_2'\left(\tau\right)=-\left(\dfrac{e^{-\tau}}{(n+2)\left(a-e^{-\tau}\right)}-\dfrac{1}{m_1-1}\right)h_2\left(\tau\right)-\dfrac{\gamma}{(n+2)}\left(\dfrac{w_2}{m_1-1}-w_1'\right)+\dfrac{\alpha_2}{(n+2)^2}\dfrac{e^{-\tau}}{\left(a-e^{-\tau}\right)}w_2=0, \end{cases}$$

Для анализа решений последней системы уравнений рассмотрим следующие вспомогательные функции

$$\begin{cases} G_1\left(\tau,\kappa_1\right)=-\left(\dfrac{e^{-\tau}}{(n+2)\left(a-e^{-\tau}\right)}-\dfrac{1}{m_2-1}\right)\kappa_1-\dfrac{\gamma}{(n+2)}\left(\dfrac{w_1}{m_2-1}-w_1'\right)+\dfrac{\alpha_1}{(n+2)^2}\dfrac{e^{-\tau}}{\left(a-e^{-\tau}\right)}w_1=0, \\ G_2\left(\tau,\kappa_2\right)=-\left(\dfrac{e^{-\tau}}{(n+2)\left(a-e^{-\tau}\right)}-\dfrac{1}{m_1-1}\right)\kappa_2-\dfrac{\gamma}{(n+2)}\left(\dfrac{w_2}{m_1-1}-w_1'\right)+\dfrac{\alpha_2}{(n+2)^2}\dfrac{e^{-\tau}}{\left(a-e^{-\tau}\right)}w_2=0, \end{cases}$$

где κ_1, κ_2 - действительные числа. Видно, что в соответствующей правой части последнего тождества функций $G_1\left(\tau,\kappa_1\right)$, $G_2\left(\tau,\kappa_2\right)$ сохраняют знак, т.е. удовлетворяют одно из неравенств

$$\begin{gathered} G_1\left(\tau,\kappa_1\right)>0,\ G_2\left(\tau,\kappa_2\right)>0, \\ G_1\left(\tau,\kappa_1\right)<0,\ G_2\left(\tau,\kappa_2\right)<0, \end{gathered} \tag{18}$$

в некотором промежутке $\left[\tau_{\kappa_1},+\infty\right)\times\left[\tau_{\kappa_2},+\infty\right)$, $\tau_{\kappa_1},\tau_{\kappa_2}\in\left[\tau_0,+\infty\right)$. Допустим, что для функций $G_1\left(\tau,\kappa_1\right)$, $G_2\left(\tau,\kappa_2\right)$ пределы при $\tau\to+\infty$ не существуют. Тогда в силу колеблемости функций

$G_1(\tau,\kappa_1)$, $G_2(\tau,\kappa_2)$, прямая $\overline{G}_i=\kappa_i\ (i=1,2)$ пересекает бесконечное число раз их графиками на интервале $\left[\tau_{\kappa_1},+\infty\right)\times\left[\tau_{\kappa_2},+\infty\right)$. Но, на интервале $\left[\tau_{\kappa_1},+\infty\right)\times\left[\tau_{\kappa_2},+\infty\right)$ выполняется одно из неравенств (18) и поэтому пересечение их графиков бесконечное число раз невозможно. Следовательно, графики функций $G_1(\tau,\kappa_1)$, $G_2(\tau,\kappa_2)$ пересекают прямую $\overline{G}_i=\kappa_i\ (i=1,2)$ на интервале $\left[\tau_{\kappa_1},+\infty\right)\times\left[\tau_{\kappa_2},+\infty\right)$ только один раз. Тогда, для функций $G_1(\tau,\kappa_1)$, $G_2(\tau,\kappa_2)$ существует предел при $\tau\to+\infty$. Следуя (17) для $G_1(\mu_1,\chi)$, $G_2(\mu_2,\psi)$, имеем

$$\begin{cases} G_1=w_2^{m_1-1}\left(\dfrac{w_1}{m_2-1}-w_1'\right)=\left(w_2^0\right)^{m_1-1}\dfrac{w_1^0}{m_2-1}+o(1),\\ G_2=w_1^{m_2-1}\left(\dfrac{w_2}{m_1-1}-w_2'\right)=\left(w_1^0\right)^{m_2-1}\dfrac{w_2^0}{m_1-1}+o(1). \end{cases}$$

Поэтому необходимо, чтобы

$$\begin{cases} \lim\limits_{\tau\to+\infty}\left(\dfrac{e^{-\tau}}{(n+2)\left(a-e^{-\tau}\right)}-\dfrac{1}{m_2-1}\right)\kappa_1+\dfrac{\gamma}{(n+2)}\left(\dfrac{w_1}{m_2-1}-w_1'\right)-\dfrac{\alpha_1}{(n+2)^2}\dfrac{e^{-\tau}}{\left(a-e^{-\tau}\right)}w_1=0,\\ \lim\limits_{\tau\to+\infty}\left(\dfrac{e^{-\tau}}{(n+2)\left(a-e^{-\tau}\right)}-\dfrac{1}{m_1-1}\right)\kappa_2+\dfrac{\gamma}{(n+2)}\left(\dfrac{w_2}{m_1-1}-w_1'\right)-\dfrac{\alpha_2}{(n+2)^2}\dfrac{e^{-\tau}}{\left(a-e^{-\tau}\right)}w_2=0, \end{cases}$$

Отсюда, с учетом следующего предельного перехода

$$\lim_{\tau\to+\infty}\frac{e^{-\tau}}{a-e^{-\tau}}=0,$$

легко убедиться в том, что $w_1^0=\left(\dfrac{\gamma(m_2-1)}{n+2}\right)^{1/(m_1-1)}$, $w_2^0=\left(\dfrac{\gamma(m_1-1)}{n+2}\right)^{1/(m_2-1)}$ при $\tau\to+\infty$.

Теперь построим численную схему, основанную на метод конечных разностей. Для этого уравнения система (1) аппроксимируется со вторым порядком точности по пространственным координатам и с первым порядком по *t*. Построим итерационный процесс, вовнутренних шагов итерации значения узлов вычисляются методом прогонки. Известно, что выбор подходящего начального приближения для итерационного процесса в общем случае является основной трудностью численного решения нелинейной задачи. При решении конкретных задач используются функции, отражающие некоторые свойства искомого решения и полученное на основе качественного анализа нелинейной задачи. Эта трудность, в зависимости от значения числовых параметров уравнений, преодолевается путем удачного выбора начального приближения, в качестве которого при вычислениях брались выше установленные асимптотические формулы. На основе выше приведенных результатов были произведены численые расчеты. Ниже приведем численные схемы и некоторые результаты вычислительных экспериментов.

Рассмотрим систему уравнений (1) с начальными данными (3) и краевыми условиями (2) и

$$\begin{cases} u(b,t)=\phi_1(t),\\ \upsilon(b,t)=\phi_2(t), \end{cases}$$

Для удобства перепишем систему (1) следующим образом

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(K(\upsilon)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right),\\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(B(u)\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}\right), \end{cases} \tag{19}$$

где $K(\upsilon)=\upsilon^{m_1-1}$, $B(u)=u^{m_2-1}$.

Теперь построим равномерную сетку S_h по x с шагом h:

$$S_h=\left\{x_i=i\cdot h,\ h>0,\ i=1,2,\ldots,k,\ k\cdot h=b\right\},$$

и временную сетку

$$V_\tau=\left\{t_j=j\cdot\tau,\ \tau>0,\ j=1,2,\ldots,k,\ k\cdot\tau=T,\ T>0\right\}.$$

Построим разностную схему. Для этого используем метод баланса и неявную разностную схему:

$$\begin{cases}|x_i|^n\dfrac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\dfrac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(g)\left(y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}\right)-a_i(g)\left(y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1}\right)\right],\\ |x_i|^n\dfrac{g_i^{j+1}-g_i^j}{\tau}=\dfrac{1}{h^2}\left[c_{i+1}(y)\left(g_{i+1}^{j+1}-g_i^{j+1}\right)-c_i(y)\left(g_i^{j+1}-g_{i-1}^{j+1}\right)\right],\end{cases}\tag{20}$$

$i=2,3,\ldots,k-1,\ \ j=0,1,\ldots,k-1,$

$$\begin{cases}y_i^0=u(x_i,0),\\ g_i^0=\upsilon(x_i,0),\end{cases}\qquad i=0,1,\ldots,k,\tag{21}$$

$$\begin{cases}-a_1(g)\dfrac{y_1^{j+1}-y_0^{j+1}}{h}=\left(y_0^j\right)^{q_1},\\ -c_1(y)\dfrac{g_1^{j+1}-g_0^{j+1}}{h}=\left(g_0^j\right)^{q_2},\end{cases}\qquad j=0,1,\ldots,k-1,\tag{22}$$

$$\begin{cases}y_n^j=\phi_1\left(t_j\right),\\ g_n^j=\phi_2\left(t_j\right),\end{cases}\qquad j=2,3,\ldots,k.\tag{23}$$

где $a(g)$, $c(y)$ вычисляются по одной из следующих формул

$$\text{а)}\ \begin{cases}a_i(g)=K\left(\dfrac{g_i+g_{i-1}}{2}\right),\\ c_i(g)=B\left(\dfrac{y_i+y_{i-1}}{2}\right),\end{cases}\tag{24}$$

$$\text{б)}\ \begin{cases}a_i(g)=\dfrac{K(g_i)+K(g_{i-1})}{2},\\ c_i(y)=\dfrac{B(y_i)+B(y_{i-1})}{2}.\end{cases}\tag{25}$$

Видно, что системы алгебраических уравнений (20) нелинейны относительно y^{j+1} и g^{j+1}. Для численного решения таких систем нелинейных уравнений применимы различные итерационные методы. Используем для них метод простой итерации:

$$\begin{cases}|x_i|^n\dfrac{\overset{s+1}{y}{}_i^{j+1}-\overset{s}{y}{}_i^j}{\tau}=\dfrac{1}{h^2}\left[a_{i+1}\left(\overset{s}{g}\right)\left(\overset{s+1}{y}{}_{i+1}^{j+1}-\overset{s+1}{y}{}_i^{j+1}\right)-a_i\left(\overset{s}{g}\right)\left(\overset{s+1}{y}{}_i^{j+1}-\overset{s+1}{y}{}_{i-1}^{j+1}\right)\right],\\ |x_i|^n\dfrac{\overset{s+1}{g}{}_i^{j+1}-\overset{s}{g}{}_i^j}{\tau}=\dfrac{1}{h^2}\left[c_{i+1}\left(\overset{s}{y}\right)\left(\overset{s+1}{g}{}_{i+1}^{j+1}-\overset{s+1}{g}{}_i^{j+1}\right)-c_i\left(\overset{s}{y}\right)\left(\overset{s+1}{g}{}_i^{j+1}-\overset{s+1}{g}{}_{i-1}^{j+1}\right)\right],\end{cases}\tag{26}$$

где $s=0,1,2,\ldots$.

Известно, что итерационные методы требуют подходящего начального приближения, обеспечивающего быструю сходимость к точному решению и сохраняющего физический смысл задач. При этом в качестве подходящих начальных приближений выбираются выше полученные асимптотические формулы.

Значения начальной итерации для каждого шага по времени $\overset{s+1}{y}_i$, $\overset{s+1}{g}_i$ берутся из предыдущего шага по времени: $\overset{0}{y}{}^{j+1} = y^j$, $\overset{0}{g}{}^{j+1} = g^j$. При счете по итерационной схеме задается точность итерации, при которой процесс продолжается до тех пор, пока не выполняются условия

$$\begin{cases} \max\limits_{0\le i\le n}\left|\overset{s+1}{y}_i - \overset{s}{y}_i\right| < \varepsilon, \\ \max\limits_{0\le i\le n}\left|\overset{s+1}{g}_i - \overset{s}{g}_i\right| < \varepsilon. \end{cases}$$

Введем обозначения $\overline{y}_i = y_i^{j+1}$, $\overline{g}_i = y_i^{j+1}$. Тогда разностные уравнения (26) можно записать в виде

$$\begin{cases} \overset{s}{A}_{1i}\,\overset{s+1}{\overline{y}}_{i-1} - \overset{s}{C}_{1i}\,\overset{s+1}{\overline{y}}_i + \overset{s}{B}_{1i}\,\overset{s+1}{\overline{y}}_{i+1} = -\overset{s}{F}_{1i}, \\ \overset{s}{A}_{2i}\,\overset{s+1}{\overline{y}}_{i-1} - \overset{s}{C}_{2i}\,\overset{s+1}{\overline{y}}_i + \overset{s}{B}_{2i}\,\overset{s+1}{\overline{y}}_{i+1} = -\overset{s}{F}_{2i}, \end{cases} \tag{27}$$

где A_{1i}, A_{2i}, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, C_{2i}, F_{1i}, F_{2i} учитывая формулы (25), определяются следующим образом:

$$\overset{s}{A}_{1i} = \frac{\tau}{h^2\left|x_i\right|^n} a_i\left(\overset{s}{g}\right) = \frac{\tau}{2h^2\left|x_i\right|^n}\left(\left(\overset{s}{g}{}_i^{j+1}\right)^{m_1-1} + \left(\overset{s}{g}{}_{i-1}^{j+1}\right)^{m_1-1}\right),$$

$$\overset{s}{A}_{2i} = \frac{\tau}{h^2\left|x_i\right|^n} c_i\left(\overset{s}{y}\right) = \frac{\tau}{2h^2\left|x_i\right|^n}\left(\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^{m_2-1} + \left(\overset{s}{y}{}_{i-1}^{j+1}\right)^{m_2-1}\right),$$

$$\overset{s}{B}_{1i} = \frac{\tau}{h^2\left|x_i\right|^n} a_{i+1}\left(\overset{s}{g}\right) = \frac{\tau}{2h^2\left|x_i\right|^n}\left(\left(\overset{s}{g}{}_{i+1}^{j+1}\right)^{m_1-1} + \left(\overset{s}{g}{}_i^{j+1}\right)^{m_1-1}\right),$$

$$\overset{s}{B}_{2i} = \frac{\tau}{h^2\left|x_i\right|^n} c_{i+1}\left(\overset{s}{y}\right) = \frac{\tau}{2h^2\left|x_i\right|^n}\left(\left(\overset{s}{y}{}_{i+1}^{j+1}\right)^{m_2-1} + \left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^{m_2-1}\right),$$

$$\overset{s}{C}_{1i} = \frac{\tau}{h^2\left|x_i\right|^n}\left(a_i\left(\overset{s}{g}\right) + a_{i+1}\left(\overset{s}{g}\right)\right) + 1,$$

$$\overset{s}{C}_{2i} = \frac{\tau}{h^2\left|x_i\right|^n}\left(c_i\left(\overset{s}{y}\right) + c_{i+1}\left(\overset{s}{y}\right)\right) + 1,$$

$$\overset{s}{F}_{1i} = \overset{s}{y}{}_i^{j+1},$$

$$\overset{s}{F}_{2i} = \overset{s}{g}{}_i^{j+1}.$$

Для численного решения системы алгебраических уравнений (27) применяется метод прогонки. Согласно методу прогонки

$$\begin{cases} \overline{y}_i = \alpha_{1i}\left(\beta_{1i} + \overline{y}_{i+1}\right), \\ \overline{g}_i = \alpha_{2i}\left(\beta_{2i} + \overline{g}_{i+1}\right), \end{cases} \tag{28}$$

где α_{1i}, α_{2i}, β_{1i}, β_{2i} - коэффициенты, которые вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{cases} \alpha_{1i+1} = \dfrac{B_{1i}}{C_{1i} - \alpha_{1i} A_{1i}}, \\ \alpha_{2i+1} = \dfrac{B_{2i}}{C_{2i} - \alpha_{2i} A_{2i}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_{1i+1} = \dfrac{A_{1i}\beta_{1i} + F_{1i}}{C_{1i} - \alpha_{1i} A_{1i}}, \\ \beta_{2i+1} = \dfrac{A_{2i}\beta_{2i} + F_{2i}}{C_{2i} - \alpha_{2i} A_{2i}}, \end{cases}$$

где $i = 1, 2, \ldots n$. Значения α_{10}, α_{20}, β_{10}, β_{20} находятся из краевых условий (22).

Используя вышеизложенные численные схемы, проведен вычислительный эксперимент. Приведем некоторые результаты численных экспериментов. Шаг сетки достаточно мелкий h=0.05, число узлов k=2500 и точность итерации задается $\varepsilon = 10^{-3}$.Счет проводился до t=2 с шагом $\tau = 0.02$. В качестве начального приближения для итерационного процесса брались формулы (10), (14).

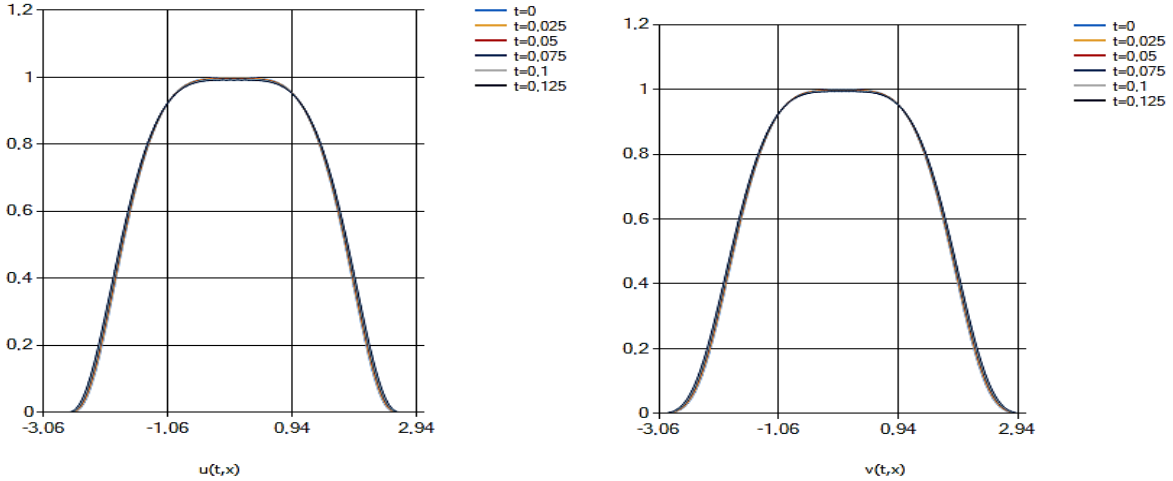


Рис. 1. Численное решение задачи (1)-(3) при n=2, $q_1 = 4.75,\ q_2 = 5.5,\ m_1 = 1.15,\ m_2 = 1.35$.

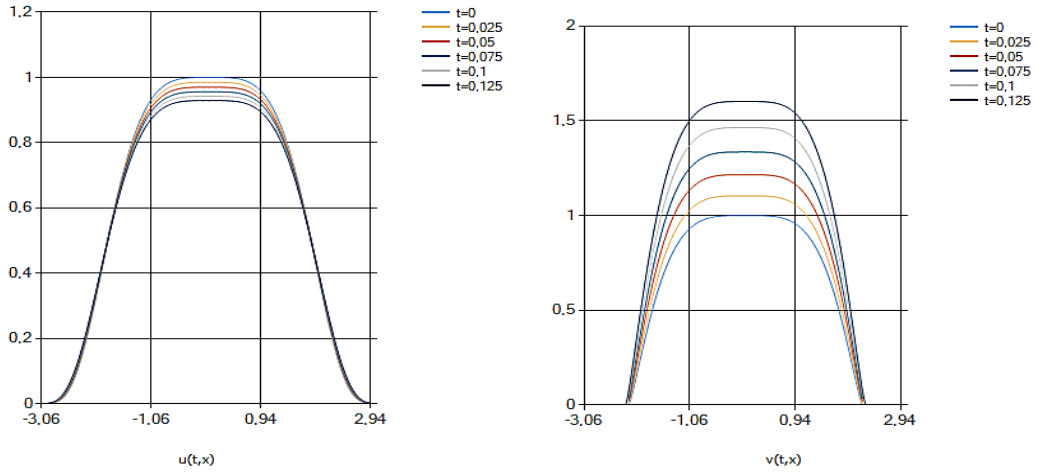


Рис. 2. Численное решение задачи (1)-(3) при n=2, $q_1 = 1.75,\ q_2 = 1.95,\ m_1 = 1.55,\ m_2 = 1.65$.

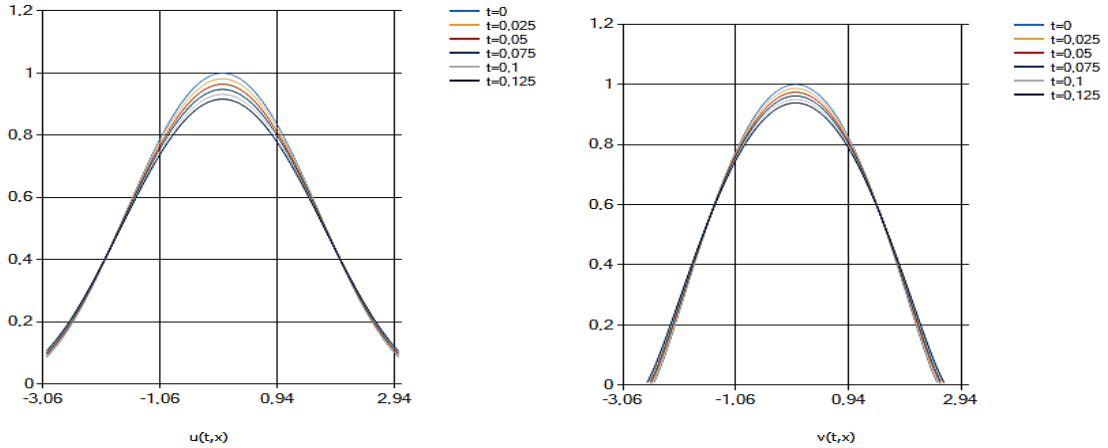


Рис. 3. Численное решение задачи (1)-(3) при n=2, $q_1 = 1.8,\ q_2 = 2.3,\ m_1 = 1.75,\ m_2 = 1.25$.

На рис. 1-3 представлены графики результатов численного решения задачи (1)-(3) при $m_i > 1\ (i = 1,2)$, соответствующей случаю медленной диффузии. При $m_i > 1\ (i = 1,2)$, как следует из асимптотических формул (10), (14) и графиков, перемещение объекта происходит с конечной скоростью. Глубина проникновения диффузионной волны зависит от времени и фронта волны (точка, в которой $\underline{u}(x,t)$, $\underline{\upsilon}(x,t)$ обращаются в нуль) для каждой среды, находящейся в конечной точке: $x_\phi = a^{\frac{1}{n+2}}(T+t)^{\gamma} < \infty$.

Литература

1. Wu, Z.Q., Zhao, J.N., Yin, J.X. and Li, H.L. Nonlinear Diffusion Equations, Singapore: World Scientific, 2001.
2. Арипов М.М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. - Ташкент, Фан, 1988.
3. Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН, т.42, Вып. 2 (254), 1987, 135–176.
4. Murray J.D. *Mathematical Biology*, 3rd ed., Berlin: Springer, 2002-2003.
5. Malchow H, Petrovskii SV, Venturino E. Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: theory, models, and simulations. London:Chapman & Hall/CRC Press; 2008.
6. M.A. Tsyganov, V.N. Biktashev, J. Brindley, A.V. Holden, G.R. Ivanitsky. Waves in cross-diffusion systems – a special class of nonlinear waves, UFN, 2007, vol. 177, issue 3, 275-300.
7. Levine H. The role of critical exponents in blowup theorems, *SIAM Rev.*, 32(2), 1990, 262-288.
8. Wang S., Xie C. H, Wang M X. Note on critical exponents for a system of heat equations coupled in the boundary conditions. J Math Analysis Applic, 1998, 218: 313–324.
9. Wang S, Xie C H, Wang M X. The blow-up rate for a system of heat equations completely coupled in the boundary conditions. Nonlinear Anal, 1999, 35: 389–398.
10. Quiros F, Rossi J D. Blow-up set and Fujita-type curves for a degenerate parabolic system with nonlinear conditions. Indiana Univ Math J, 2001, 50: 629–654.
11. Zheng S N, Song X F, Jiang Z X. Critical Fujita exponents for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux. J Math Anal Appl, 2004, 298: 308–324.
12. Rakhmonov Z. On the properties of solutions of multidimensional nonlinear filtration problem with variable density and nonlocal boundary condition in the case of fast diffusion //Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2016, 9(2), 236–245.
13. Рахмонов З. Оценки решений нелинейной системы уравнений теплопроводности с переменной плотностью и с нелокальным граничным условием // Вестник НУУз, №1(2), 2016, 145-154.
14. Aripov M.M., Matyakubov A.S. To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form of polytrophic filtration in variable density. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics,2017, 8(3), 317-322.
15. Aripov M.M., Matyakubov A.S. Self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system with variable density: explicit estimates and asymptotic behavior. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics,2017, 8(1), 5-12.

УДК 37:646.0

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ЭКСПЕРТНОЙ ОЦЕНКИ ВЫБОРА ЗНАЧИМОСТИ СВОЙСТВ ТКАНЕЙ ДЛЯ СПЕЦОДЕЖДЫ

М.К.Расулова[1], Ш.Л.Мамасолиева[2]
[1]*Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности*
[2]*Самаркандский государственный университет*

Аннотация. В статье рассматриваются требования к рекомендуемому виду одежды специального назначения и определен перечень требований к основному материалу. В результате метода математического анализа для экспертной оценки выявлены наиболее значимые свойства тканей для выполнения конструкторско-технологических требований.

Ключевые слова: материал, требование, свойства, спецодежда, метод, экспертная оценка, конструкторско-технологическое требование.

Maxsus kiyimbop gazlama xususiyatlarining ahamiyatlisini tanlashda ekspert baholash uchun matematik tahlil metodini qo‘llash

Annotatsiya. Maqolada tavsiya etiladigan maxsus kiyim turiga bo‘lgan talablar ko‘rib chiqildi va asosiy gazlamaga talablar ro‘yxati aniqlandi. Ekspert baholash uchun matematik tahlil metodini qo‘llash natijasida konstruktorlik-texnologik talablarni bajarish uchun gazlama xususiyatlarining eng ahamiyatlilari belgilandi.

Kalit so‘zlar: gazlama, talab, xususiyat, maxsus kiyim, metod, eksport baholash, konstruktorlik-texnologik talab.

Application of the method of mathematical analysis for expert assessment of the selection of significance of the properties of fabrics for workwear

Abstract. The article discusses the requirements for the recommended type of special purpose clothing and defines a list of requirements for the basic material. As a result of the method of mathematical analysis for expert evaluation revealed the most significant properties of fabrics to meet the design and technological requirements.

Keywords: material, demand, properties, working clothes, method, expert review, technological design requirement.

При изготовлении комплекта одежды специального назначения в массовом производстве большую роль играют требования к основной ткани.Разработка требований к материалу для изделия - одна из важных систем швейного производства, работа, которой, в значительной мере, определяет качество швейных изделий, надежность и эффективность работы всей системы.

Материал должен иметь соответствующую нормам для группы тканей специального назначения ширину, толщину, поверхностную плотность.

Исходя из вышеизложенного, целью наших исследований был выбор показателей качества ткани и определение их значимости с использованием метода математического анализа.

Изучение показало [1], что выделяют шесть групп комплексных показателей качества материалов для спецодежды: общие (стандартные), конструкторско-технологические, эргономические, эксплуатационные, эстетические и экономические.

Учитывая требования, предъявляемые к рекомендуемому изделию – комплекту специального назначения – был определён перечень требований к основной ткани.

Для определения значимости требований к тканям изготовленных спецодежд был проведен опрос среди рабочих сервисного обслуживания города Ташкента [2-3].

Результаты работы по данному этапу представлены в форме таблицы 1. Наиболее значимые требования обозначаются цифрой один, наименее значимые цифрой пять.

Таблица 1

Значимость требований к основной ткани

Наименование ткани	Требование к тканям и их значимость				
	эстетические	конструкторско-технологические	гигиенические	эксплуатационные	экономические
Ткань для спецодежды-габардин	4	1	5	2	3

Из таблицы 1 видно, что наибольшую значимость имеют конструкторско-технологические требования. Материал должен обладать минимальной несминаемостью, жесткостью, осыпаемостью, прорубаемостью и раздвигаемостью нитей.

Также значимыми требованиями к материалам для спецодежды являются требования надежности, так как срок эксплуатации комплекта составляет 1-3 года. Ткани должны обладать износостойкостью, способностью к формообразованию и формозакреплению, устойчивостью к растяжению, к пиллингообразованию, к стирке или химчистке.

Не менее важными являются экономические показатели, материал должен быть доступен по цене, иметь оптимальную для раскладки ширину, быть ремонтопригодным и позволять легко за ним ухаживать.

Не последними по значимости являются эстетические требования, цвет ткани для спецодежды должен подбираться с учетом специализации рабочих, сезона, направления моды, соответствовать полу, возрасту, художественному образу, силуэту, форме модели по пластике, фактуре.

Наименьший показатели значимости – гигиенические, так как комплект спецодежды для осенне-зимнего сезона не является нижним слоем в пакете одежды. Материалы для осенне-зимнего сезона должны обладать хорошими теплозащитными свойствами. Так же материал должен обладать малой пылеемкость. и электризуемостью.

Составлен перечень характеристик свойств, удовлетворяющих установленным требованиям (таблица 2).

Таблица 2

Перечень характеристик свойств, удовлетворяющих установленным требованиям к основному материалу

Группы требований	Характеристики (показатели) свойств
1.Общие (стандартные)	волокнистый состав, поверхностная плотность, линейная плотность нитей, ширина, толщина
2.Конструкторско-технологические	толщина, ширина, поверхностная плотность, формовочная способность, несминаемость, жесткость, драпируемость, прорубаемость, осыпаемость, усадка при влажно-тепловой обработке, тангенциальное сопротивление .
3.Эргономические (гигиенические)	воздухопроницаемость, гигроскопичность, электризуемость, пылеемкость паропроницаемость, водопроницаемость, гигроскопичность, суммарное тепловое сопротивление, теплопроводность, теплоемкость
4. Эксплуатационные	разрывная нагрузка, разрывное удлинение, стойкость к истиранию по плоскости, по сгибам, при многократном растяжении, изгибе, пиллингуемость, несминаемость, устойчивость к светопогоде, стирке, химической чистке, молестойкость, устойчивость окраски к различным видам воздействий .
5. Эстетические	цвет, блеск, фактура, туше, вид переплетения, отделка, соответствие направлению моды .
6. Экономические	стоимость, легкость ухода за изделием, ремонтопригодность, ширина .

Наиболее значимой группой требований для выбранного материала будут являться конструкторско-технологические требования, однако, не все из них имеют одинаковую значимость. Чтобы установить, какие свойства материалов при их выборе следует учитывать в первую очередь, а какими можно при необходимости пренебречь, следует выделить наиболее значимые базовые значения показателей. Для этого следует применить метод экспертной оценки [4]. В эксперименте участвовали преподаватели кафедры «Конструирование и технология швейных изделий», «Текстильное материаловедение» и специалисты швейного производства ООО «Нурафшон Нур». В качестве объекта исследований была выбрана хлопчатобумажная ткань отечественного производства.

Группе из семи экспертов предложено определить значимость свойств ткани X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7и X_8, обеспечивающих выполнение конструкторско-технологическихтребований при изготовлении спецодежды: X_1 – жесткость ткани; X_2 –несминаемость; X_3 –осыпаемость; X_4 – поверхностная плотность; X_5 – толщина; X_6 – усадка; X_7 – фактура; X_8 – ширина.

Наиболее важному свойству присваивается ранг (*R-1*), менее важному – (*R-2*), самому незначительному – (*R-8*)

Результаты оценки значимости свойств экспертами приведены в таблице 3.

Таблица 3

Результаты экспертной оценки значимости свойств хлопчатобумажной ткани для изготовления спецодежды

Шифр экспертов, j	Ранговые оценки и значимость свойств									Tj
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	$\sum R$	
1	2	3	5	1	8	4	7	6	36	0
2	1	4	3	7	6	5	2	8	36	0
3	4	3	6	1	7	2	8	5	36	0
4	4	1	8	3	6	2	5	7	36	0
5	7	2	1	4	8	3	5	6	36	0
6	3	5	2	8	6	1	7	4	36	0
7	1	2	6	3	5	7	8	4	36	0
S_i	21	20	31	27	46	24	42	41	252	0
γ_i	0,17	0,18	0,12	0,13	0,07	0,15	0,09	0,09	1,00	-
$\gamma_к$	0,27	0,28	-	0,21	-	0,24	-	-	1,00	-
$\beta_к$	1,3	1,3	-	1	-	1,1	-	-	-	-
$\left(S_i - \bar{S}\right)$	-10,5	-11,5	-0,5	-4,5	14,5	-7,5	10,5	9,5	-	-
$\left(S_i - \bar{S}\right)^2$	110,25	132,25	0,25	20,258	210,25	56,25	110,25	90,25	730	-

Сумму рангов каждого эксперта определим по формуле [5]:

$$\sum_{i=1}^{n} R = 0{,}5n(n+1)\ , \tag{1}$$

где n – количество рангов.

$$\sum_{i=1}^{n} R = 0{,}5 \cdot 8(8+1) = 36\ .$$

Определим коэффициент относительной значимости γ_i для каждого свойства по формуле:

$$\gamma_i = \frac{1}{S_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S_i}}\ , \tag{2}$$

где S_i – сумма рангов для каждого i-го свойства

$$\gamma_1 = \frac{1}{S_1 \sum_{i=n}^{n} \frac{1}{S_i}} = \frac{1}{21 \sum_{i=n}^{n} \frac{1}{21} + \frac{1}{20} + \frac{1}{31} + \frac{1}{27} + \frac{1}{46} + \frac{1}{24} + \frac{1}{42} + \frac{1}{41}} = \frac{1}{21 \cdot 0{,}279} = \frac{1}{5{,}86} = 0{,}17$$

Наиболее значимыми, по мнению экспертов, являются свойства X_1, X_2, X_4, X_6,, так как для них выполняется условие

$$\gamma_i \geq \frac{1}{n}. \tag{3}$$

$\frac{1}{8} = 0{,}13$; тогда $\gamma_i \geq \frac{1}{n} \geq 0{,}13$

Для каждого из этих выделенных (оставленных) свойств так же определяют коэффициент значимости $\gamma_к$ по формуле

$$\gamma_к = \frac{1}{S_к \sum_{к=1}^{n} \frac{1}{S_к}}\ , \tag{4}$$

Вычислим

$$\gamma_{k1} = \frac{1}{S_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{S_k}} = \frac{1}{21 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{21} + \frac{1}{20} + \frac{1}{27} + \frac{1}{24}} = \frac{1}{21 \cdot 0{,}177} = \frac{1}{3{,}71} = 0{,}27$$

Относительную весомость $\beta_к$ оставленных свойств рассчитывают какотношение коэффициента значимости оставленного свойства $\gamma_к$ к минимальному из коэффициентов значимости оставленных свойств $\gamma_{\min}$:

$$\beta_к = \frac{\gamma_к}{\gamma_{\min}}. \qquad (5)$$

Минимальный коэффициент значимости имеет свойство X_4.

$$\gamma_{\min} = \gamma_{k4} = 0{,}21$$

$$\beta_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_{\min}} = \frac{0{,}28}{0{,}21} = 1{,}3$$

Для подсчета коэффициента согласия *W* для каждого свойства определяется: $\left(S_i - \overline{S}\right)$ и $\left(S_i - \overline{S}\right)^2$ где $\overline{S}$ - средняя сумма рангов для всех показателей.

$$\overline{S} = \frac{252}{8} = 31{,}5$$

Для определения согласованности экспертных оценок определяем коэффициент согласия (конкордации) *W*по формуле:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(S_i - \overline{S}\right)^2}{\frac{1}{12}m^2\left(n^3 - n\right) - m\sum_{j=1}^{m}T_j} \qquad (6)$$

учитывая, что $T_j = 0$

$$W = \frac{730}{\frac{1}{12}7^2(8^3 - 8) - 0} = \frac{730}{2058} = 0{,}35$$

Для оценки значимости коэффициента согласия *W* находим критерий χ^2:

$$\chi^2 = Wm(n-1), \qquad (7)$$

который сопоставляем с табличным значением критерия $\chi^2_{\text{табл.}}$ при степени свободы $S = n - 1$.

$$\chi^2 = 0{,}35 \cdot 7(8-1) = 17{,}15$$

при $S = n - 1 = 7$ $\chi^2_{\text{òàáë}} = 14{,}1$.

Так как $\chi^2 = 17{,}15 > 14{,}1$ мы получаем согласованное мнение семи экспертов.

Полученные результаты позволяют построить диаграмму ранжирования характеристик свойств, удовлетворяющих рассматриваемую группу требований (рис. 1).

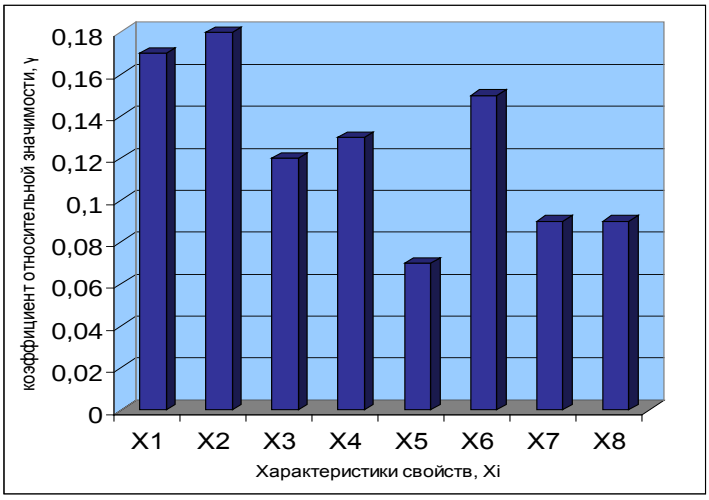


Рисунок 1.– Диаграмма ранжирования характеристик свойств, обеспечивающих выполнение конструкторско-технологические требования

Из диаграммы (Рис.1) видно, что, по мнению экспертов, наиболее значимыми показателями тканей являются: X_1 – жесткость, X_2 – несминаемость, X_4 – поверхностная плотность, X_6 – усадка. Остальные показатели имеют меньшую значимость свойств, обеспечивающих выполнение конструкторско-технологических требований.

Литература

1. Кокеткин П.П. Одежда. Спрвочник. М.:МГУДТ, 2001. – С. 202.
2. Расулова М.К. и др.Изучение свойств и подбор тканей для разработки новой спецодежды с учетом эргономических движений автослесарей. Журнал «Проблемытекстиля». 2013. № 2. – С. 36-41.
3. Rasulova M.K., Tashpulatov S.Sh. About designing the working clothes based on the anthropological characteristics of man's body. International Journal of European science review, ISSN 2310-5577, Vienna, Austria, Number 1-2 (2017), January-February. p.p.238-240.
4. Сидняев Н.И., Вилисова Н.Т. Введение в теорию планирования эксперимента. М.:МГУДТ, 2011. – С. 186.
5. Современный эксперимент: подготовка, проведение, анализ результатов. Под ред. Глудкина О.П.. М.: 1997. – С. 132.

УДК 517.946

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА НА ПЛОСКОСТИ

Д.С.Шодиев
Самаркандский государственный университет

Аннотация. В работе доказана теорема единственности и получена оценка условной устойчивости, а также построено приближенное решение задачи методом квазиобращения и регуляризации по Тихонову.

Ключевые слова. Задача Коши, уравнения Лапласа, приближенное решение, оценка устойчивости.

Tekislikda Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi haqida

Annotasiya. Ishda yagonalik teoremasi isbotlangan va shartli turg'unlik bahosi olingan, hamda kvaziyechim va Tixonov ma'nosidagi regulyarizasiya usulidan foydalanib taqribiy yechim qurilgan.

Kalit so'zlar. Koshi masalasi, Laplas tenglamasi, taqribiy yechim, turg'unlik bahosi

Of the Cauchy problem for the Laplace equations on a plane.

Abstract. In this paper, a uniqueness theorem is proved, and an estimate of conditional stability is obtained, and an approximate solution is constructed by the method of quasi-derivation and Tikhonov regularization**.**

Keywords. Cauchy problem, Laplace equation, Approximate solution, stability estimate.

В работе доказана теорема единствинности и условной устойчивости. Методом квазиобрашения и регуляризации Тихонова построено приближеное решение. Как известно, решение задачи Коши для уравнения Лапласа единственно, но неустойчиво [6]. Устойчивость плоской задачи в классе ограниченных решений впервые доказал Карлеман [1]. Оценки, характеризующие устойчивость пространственной задачи в классе ограниченных решений, впервые был получен М.М.Лаврентьевым [2].

Пусть $U(x,y)$ является в области $\Omega=\left\{(x,y)\in R^2,\ 0<x<\pi,\ 0<y<1\right\}$ решением уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

Постановка задачи. Найти решения уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее следующим

$$U(x,0)=f(x),\quad U_y(x,0)=g(x),\quad 0\le x\le\pi \tag{2}$$

начальным и

$$U(0,y)=0,\quad U(\pi,y)=0,\quad 0\le y\le 1 \tag{3}$$

граничным условиям.

Задача (1)-(3) относится к некорректно поставленным задачам математической физики, т.е. отсутствует непрерывная зависимость решения от данных .

Применяя к задаче (1)-(3) метод Фурье находим решение :

$$U(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(y)\sin kx,$$

где $U_k(y)=f_k chky+\frac{1}{k}g_k shky,\quad f_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kxdx,\quad g_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\sin kxdx$.

Некорректность задачи. Пусть $f(x)=\frac{1}{k}\sin kx,\ g(x)=0$, тогда решение задачи (1)-(3) можно представить в виде $U(x,y)=\frac{1}{k^2}shky\sin kx$.

Легко заметить, что $\|f\|=\frac{1}{k}$ где $\|f\|=\max_{x\in[0,\pi]}|f(x)|$. Для любого $y>0$ можно найти $c>0,\ c=const$ так,что $\|U\|>c$. Отсюда следует некорректность задачи.

Теорема 1. (Об условной устойчивости). Пусть существует решение $U\in C^2(\overline{\Omega})$ задачи (1)-(3). Тогда верна следующая оценка условной устойчивости:

$$\int_0^{\pi}U^2(x,y)dx\le C(y)\left(\int_0^{\pi}U^2(x,0)dx+|\alpha|\right)^{1-y}\left(\int_0^{\pi}U^2(x,1)dx+|\alpha|\right)^{y}-|\alpha|$$

где

$$C(y)=e^{2y(1-y)},\quad \alpha=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(U_x^2(x,0)dx-U_y^2(x,0))dx.$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(y)=\int_0^{\pi}U^2(x,y)dx.$$

Можно показать, что функция $\varphi(y)$ непрерывна и имеет соответствующие производные высокого порядка. Вычислим производные первого и второго порядка от функции $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y)=2\int_0^{\pi}U(x,y)U_y(x,y)dx,\ \varphi''(y)=2\int_0^{\pi}U_y^2(x,y)dx+2\int_0^{\pi}U(x,y)U_{yy}(x,y)dx.$$

Преобразуя второй член последнего равенства используя уравнение (1) и учитывая граничные условия, имеем

$$\int_0^{\pi}U(x,y)U_{yy}(x,y)dx=-\int_0^{\pi}U(x,y)U_{xx}(x,y)dx=(UU_x)(0,y)-(UU_x)(\pi,y)+$$

$$+\int_0^{\pi}U_x^2(x,y)dx=\int_0^{\pi}U_x^2(x,y)dx.$$

Теперь вычислим следующие производные:

$$\frac{d}{dx}(\int_0^{\pi}U_x^2(x,y)dx)=2\int_0^{\pi}U_x(x,y)U_{xy}(x,y)dx=2(U_xU_y)(0,y)-2(U_xU_y)(\pi,y)-$$

$$-2\int_0^{\pi}U_y(x,y)U_{xx}(x,y)dx=2\int_0^{\pi}U_y(x,y)U_{yy}(x,y)dx=\frac{d}{dy}(\int_0^{\pi}U_y{}^2(x,y)dx).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dy}(\int_0^{\pi}U_x^2(x,y)dx)=\frac{d}{dy}(\int_0^{\pi}U_y^2(x,y)dx).$$

После интегрирования получим

$$\int_0^\pi U_x^2(x,y)dx = \int_0^\pi U_y^2(x,y)dx + 2\alpha,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}(\int_0^\pi (U_x^2(x,0) - U_y^2(x,0))dx).$$

Подставляя полученное выражение в $\varphi''(y)$ выводим, что

$$\varphi''(y) = 4\int_0^\pi U_x^2(x,y)dx + 4\alpha.$$

Введем вспомогательную функцию $\Phi(y) = \ln(\varphi(y) + |\alpha|)$. Вычислим производные первого и второго порядка от этой функции:

$$\Phi'(y) = \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y) + |\alpha|},$$

$$\Phi''(y) = \frac{\varphi''(y)(\varphi(y) + |\alpha|) - (\varphi'(y))^2}{(\varphi(y) + |\alpha|)^2} =$$

$$= \frac{(4\int_0^\pi U_x^2(x,y)dx + 4\alpha)(\int_0^\pi U^2(x,y)dx + |\alpha|) - (2\int_0^\pi U(x,y)U_y(x,y)dx)^2}{(\int_0^\pi U^2(x,y)dx + |\alpha|)^2} =$$

$$= \frac{4\alpha\int_0^\pi U^2(x,y)dx + 4\alpha|\alpha|}{(\int_0^\pi U^2(x,y)dx + |\alpha|)^2} = \frac{4\alpha}{\int_0^\pi U^2(x,y)dx + |\alpha|} > 0 \geq -4.$$

При выводе последнего неравенства мы использовали неравенство Коши-Буньяковского. Из дифференциального неравенства $\Phi''(y) \geq -4$ следует , что

$$\Phi(y) \leq \Phi(0)(1-y) + \Phi(1)y + 2y(1-y),$$

$$\ln(\varphi(y) + |\alpha|) \leq (1-y)\ln(\varphi(0) + |\alpha|) + y(\ln(\varphi(1) + |\alpha|) + 2y(1-y).$$

$$\varphi(y) + |\alpha| \leq e^{2y(1-y)}(\varphi(0) + |\alpha|)^{1-y}(\varphi(1) + |\alpha|)^y.$$

$$\int_0^\pi U^2(x,y)dx \leq C(y)(\int_0^\pi U^2(x,0)dx + |\alpha|)^{1-y}(\int_0^\pi U^2(x,1)dx + |\alpha|)^y - |\alpha|,$$

где

$$C(y) = e^{2y(1-y)}, \alpha = \frac{1}{2}\int_0^\pi (U_x^2(x,0) - U_y^2(x,0))dx.$$

Теорема доказана**.**

Введем обозначение $M = \left\{U \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega); \|U(x,1)\| + \|U_x(x,1)\| \leq m\right\}$.

Теорема 2. (О единственности решения). Пусть решение задачи существует и $U(x,y) \in M$. Тогда решение задачи (1)-(3) единственно.

Доказательство. Пусть существует два решения $U_1(x,y)$ и $U_2(x,y)$ задачи (1)-(3). Причем $U_1(x,y), U_2(x,y)$ удовлетворяет уравнение (1) с одинаковыми условиями (2)-(3). Тогда очевидно $U(x,y) = U_1(x,y) - U_2(x,y)$ удовлетворяет также уравнение (1) с однородными начальными и краевыми условиями.

$$U(0,y)=0, U(\pi,y)=0, 0\le y\le 1. \qquad U(x,0)=0, U_y(x,0)=0, 0\le x\le \pi.$$

Из теоремы 1 имеем: $\int_0^\pi U^2(x,y)dx\le 0$. Отсюда получим $U(x,y)=0$ т.е. $U_1(x,y)=U_2(x,y)$.

Теорема доказана**.**

Введем приближенные данные:

$$U(x,0)=f_\varepsilon(x), U_y(x,0)=g_\varepsilon(x), U(0,y)=U(\pi,y)=0.$$

Пусть $U_\varepsilon(x,y)$ решение задачи этой задачи.

Теорема3. Пусть решение задачи (1)-(3) существует и

$$U(x,y)\in M,\ \ U_\varepsilon(x,y)\in M,\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\in M,\ \frac{\partial U_\varepsilon(x,y)}{\partial x}\in M,$$

при этом выполняются неравенства

$$\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|_{W_2^2[0,\pi]}<\varepsilon\ \|g(x)-g_\varepsilon(x)\|_{W_2^1[0,\pi]}<\varepsilon,\ \|f'(x)-f'_\varepsilon(x)\|_{W_2^2[0,\pi]}<\varepsilon,$$

$$\|g'(x)-g'_\varepsilon(x)\|_{W_2^1[0,\pi]}<\varepsilon.$$

Тогда для решения задачи (1)-(3)и его производной имеет место оценки

$$\int_0^\pi (U(x,y)-U_\varepsilon(x,y))^2dx\le C(y)(2\varepsilon^2)^{1-y}(2m^2+\varepsilon^2)^y, \tag{4}$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial U_\varepsilon(x,y)}{\partial x}\right)^2dx\le C(y)(2\varepsilon^2)^{1-y}(2m^2+\varepsilon^2)^y.$$

Доказательство. Рассмотрим разность $V(x,y)=U(x,y)-U_\varepsilon(x,y)$ очевидно что $V(x,y)$ (1) с условиями

$$V(x,0)=f(x)-f_\varepsilon(x), V_y(x,0)=g(x)-g_\varepsilon(x), V(0,y)=V(\pi,y)=0.$$

Согласно теоремы 1 имеем:

$$\int_0^\pi (U(x,y)-U_\varepsilon(x,y))^2\le C(y)\left(\int_0^\pi (U(x,0)-U_\varepsilon x,0))^2dx+|\alpha|\right)^{1-y}\left(\int_0^\pi (U(x,1)-U_\varepsilon(x,1))^2dx+|\alpha|\right)^y.$$

Отсюда получим

$$\int_0^\pi V^2(x,y)dx\le C(y)\left(2\varepsilon^2\right)^{1-y}\left(2m^2+\varepsilon^2\right)^y.$$

Неравенство (4) доказано, анологично доказывается оценка для производной.

Метод квазиобращения. Пусть решение задачи существует и удовлетворяет условиям

$$U(x,y)\in M,\quad f(x)=0,\quad \|g(x)-g_\varepsilon(x)\|_{W_2^1[0,\pi]}\le\varepsilon,\quad \varepsilon>0.$$

Рассмотрим в качестве решения и его производной исходной задачи следующую функцию зависящую от α ($\alpha>0$, $\alpha-$параметр регуляризации):

$$U^\alpha(x,y)=\sum_{k=1}^\infty U_k(y)e^{-\alpha k^2y}\sin kx,$$

$$\frac{\partial U^\alpha(x,y)}{\partial x}=\sum_{k=1}^\infty U_k(y)e^{-\alpha k^2y}k\cos kx.$$

Для приближенного решения и его производной по приближенным данным рассматривается функции:

$$U_\varepsilon^\alpha(x,y)=\sum_{k=1}^\infty U_{k\varepsilon}(y)e^{-\alpha k^2y}\sin kx,$$

$$\frac{\partial U_\varepsilon^\alpha(x,y)}{\partial x}=\sum_{k=1}^{\infty}U_{k\varepsilon}(y)e^{-\alpha k^2 y}k\cos kx.$$

Оценим по норме разность между точным и регуляризованным решением по приближенным данным :

$$\left\|U(x,y)-U_\varepsilon^\alpha(x,y)\right\|\le\left\|U(x,y)-U^\alpha(x,y)\right\|+\left\|U^\alpha(x,y)-U_\varepsilon^\alpha(x,y)\right\|,$$

$$\left\|\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial U_\varepsilon^\alpha(x,y)}{\partial x}\right\|\le\left\|\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial U^\alpha(x,y)}{\partial x}\right\|+\left\|\frac{\partial U^\alpha(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial U_\varepsilon^\alpha(x,y)}{\partial x}\right\|.$$

При условии $U(x,y)\in M$ оценим разность:

$$\left\|U(x,y)-U^\alpha(x,y)\right\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}g_k^2 sh^2 ky(1-e^{-\alpha k^2 y})^2.$$

Для нахождения условного экстремума используем метода Лагранжа

$$\gamma(k)=\frac{mshky}{shk}(1-e^{-\alpha k^2 y})\le me^{k(y-1)}(1-e^{-\alpha k^2 y})\le m\alpha k^2 ye^{k(y-1)}=\beta(k)$$

$$\beta(k)=m\alpha k^2 ye^{k(y-1)},\ \beta'(k)=2m\alpha kye^{k(y-1)}+m\alpha k^2 y(y-1)e^{k(y-1)}=0$$

или $k=\dfrac{2}{1-y}$.Тогда $\max\limits_k\gamma(k)\le\max\limits_k\beta(k)=\dfrac{4m\alpha y}{e^2(1-y)^2}$.

$$\left\|U(x,y)-U^\alpha(x,y)\right\|^2\le\frac{16m^2\alpha^2y^2}{e^4(1-y)^4}.$$

Теперь оценим второе слагаемое

$$\left\|U^\alpha(x,y)-U_\varepsilon^\alpha(x,y)\right\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sh^2ky}{k^2}e^{-2\alpha k^2 y}(g_k-g_{k\varepsilon})^2.$$

$$\frac{shky}{k}e^{-\alpha k^2 y}=\frac{1}{2k}e^{ky}(1-e^{-2ky})e^{-\alpha k^2 y}\le e^{ky-\alpha k^2 y}=\left\{\forall\alpha>0,\ k^2(1-\alpha k^2)\le\frac{1}{4\alpha}\right\}\le e^{\frac{y}{4\alpha}}.$$

$$\left\|U^\alpha(x,y)-U_\varepsilon^\alpha(x,y)\right\|^2\le e^{\frac{y}{2\alpha}}\sum_{k=1}^{\infty}(g_k-g_{k\varepsilon})^2=e^{\frac{y}{2\alpha}}\left\|g-g_\varepsilon\right\|^2\le e^{\frac{y}{2\alpha}}\varepsilon^2.$$

Из правой части последнего неравенства для любых $\varepsilon>0$ найдем $\inf\limits_{\varepsilon>0}\left\{\dfrac{4m\alpha y}{e^2(1-y)^2}+e^{\frac{y}{4\alpha}}\varepsilon\right\}=\varphi(\alpha),\quad y\ne1$ отсюда находим значение α .

Аналогично доказывается

$$\left\|\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial U_\varepsilon^\alpha(x,y)}{\partial x}\right\|\le\frac{4m\alpha y}{e^2\left(1-y\right)^2}+e^{\frac{y}{4\alpha}}\varepsilon,\ y\ne1.$$

Регуляризация Тихонова. Приближенное решение и его производной по точным данным построим следующим образом:

$$U_N(x,y)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}g_k shky\sin kx,$$

тогда

$$\frac{\partial U_N(x,y)}{\partial x}=\sum_{k=1}^{N}g_k shky\cos kx.$$

Приближенное решение задачи по приближенным данным и его производную построим следующим образом:

$$U_N{}^\varepsilon(x,y)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}g_k^\varepsilon shky\sin kx,$$

тогда

$$\frac{\partial U_N{}^{\varepsilon}(x,y)}{\partial x}=\sum_{k=1}^{N} g_k^{\varepsilon} shky\cos kx.$$

Оценим разность между точным и приближенным решением по приближенным данным, и его производной:

$$\left\|U(x,y)-U_N^{\varepsilon}(x,y)\right\|\le\left\|U(x,y)-U_N(x,y)\right\|+\left\|U_N(x,y)-U_N^{\varepsilon}(x,y)\right\|,$$

$$\left\|\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial U_N^{\varepsilon}(x,y)}{\partial x}\right\|\le\left\|\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial U_N(x,y)}{\partial x}\right\|+\left\|\frac{\partial U_N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial U_N^{\varepsilon}(x,y)}{\partial x}\right\|.$$

Рассмотрим выражение

$$\left\|U_N(x,y)-U_N^{\varepsilon}(x,y)\right\|^2=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}sh^2ky(g_k-g_k^{\varepsilon})^2\le sh^2Ny\sum_{k=1}^{N}(g_k-g_k^{\varepsilon})^2\le sh^2Ny\left\|g-g^{\varepsilon}\right\|^2\le\frac{e^{2Ny}}{4}\varepsilon^2.$$

Оценим выражение

$$\left\|U(x,y)-U_N(x,y)\right\|^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}g_k^2sh^2ky\le\frac{m^2sh^2(N+1)y}{sh^2(N+1)}\le\frac{m^2}{4}e^{2(N+1)(y-1)}.$$

$$\left\|U(x,y)-U_N^{\varepsilon}(x,y)\right\|\le\frac{m}{2}e^{(N+1)(y-1)}+\frac{e^{Ny}}{2}\varepsilon.$$

Из правой части последнего неравенства для любых $\varepsilon>0$ найдем $\inf\limits_{\varepsilon>0}\left\{\frac{m}{2}e^{(N+1)(y-1)}+\frac{e^{Ny}}{2}\varepsilon\right\}=\varphi(N).$ Отсюда находим значение N.

Аналогично доказывается оценка для производной

$$\left\|\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial U_N^{\varepsilon}(x,y)}{\partial x}\right\|\le me^{(N+1)(y-1)}+\frac{1}{2}e^{2Ny}\varepsilon^2.$$

Литература

1. Carleman T., Les functions quasi analytiques, Paris, 1926.

2. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа //Доклады Ак. наук СССР,102, №2(1955), С.205-206.

3. Лаврентьев М.М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, НГУ 1973.71с.

4. Фаязов К.С. Хисоблаш математикаси,математик физика ва анализнинг нокоррект масалаларини ечиш усуллари. Тошкент, ЎзМУ, 2001, 100 бет.

5. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Сибирское научное ииздательство, Новосибирск 2009, 450 с.

6. Ярмухамедов Ш. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши //Математические заметки , 2008. –Т. 83, выпуск 5.- С. 763-778.

УДК 519.21

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОРОДНОГО И ИЗОТРОПНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ

С.И.Халикулов
Самаркандский государственный университет

Аннотация. Исследуется проблема аппроксимации однородных и изотропных случайных полей с ограниченными спектрами. Для таких полей получено спектральное представление однородного и изотропного случайного поля на плоскости.

Ключевые слова: проблема, спектр, однородное, изотропное, случайное поле, аппроксимация, плоскость.

Текисликдаги бир жинсли ва изотроп тасодифий майдонннинг спектрал ифодаси

Аннотация. Чегараланган спектрли бир жинсли ва изотроп тасодифий майдонларнинг аппроксимацияси тадқиқ этилади. Бундай майдонлар учун текисликдаги бир жинсли ва изотроп тасодифий майдоннинг спектрал ифодаси олинган.

Калит сўзлар: муаммо, спектр, биржинсли, изотроп, тасодифий майдон, аппроксимация, текислик.

Spectral representation of a homogeneous and isotropic random field on a plane

Abstracts.The problem of approximation of homogeneous and isotropic random fields with limited spectra is investigated. For such fields, a spectral representation of a uniform and isotropic random field on a plane is obtained.

Keywords: problem, spectrum, homogeneous, isotropic, random field, approximation, plane.

Пусть $\xi(t,s)$ действительно однозначное однородное изотропное случайное поле на плоскости, непрерывное в среднем квадратическом. Это означает, что $M\xi(t,s)=const$ (будем предпологать в дальнейшем $M\xi(t,s)=0$) и

$$M\xi(t_2,s_2)\xi(t_1,s_1)=B(\rho)$$

где $\rho=\sqrt{(t_2-t_1)^2+(s_2-s_1)^2}$.

Как известно, корреляционна функция однородного и изотропного случайного поля, непрерывного в среднем квадратическом, допускает представление

$$B(\rho)=\int_0^\infty J_0(\lambda_\rho)d\Phi(\lambda), \tag{1}$$

где $\Phi(\lambda)$ ограниченная неубывающая функция на $[0,+\infty)$, $J_0(x)$-бесселевая функция с нулевым индексом.

Обозначим через (ρ,φ) полярные координаты точки (t,s). По теореме косинусов

$$\rho=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Имеет место следующее равенство

$$J_0\left(\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}\right)=\sum_{m=0}^\infty \nu_m J_m(r_1)J_m(r_2)\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

где $\nu_m=\begin{cases}2, & m\neq 0\\ 1, & m=0\end{cases}$.

Которое называется формулой сложения для бесселевой функции $J_0(x)$.

В силу (1) и теоремы сложения имеем

$$\mathrm{M}\xi(t_2,s_2)\xi(t_1,s_1)=\sum_{m=0}^\infty v_m\cos m(\varphi_1-\varphi_2)\int_0^\infty J_m(\lambda_{r_2})J_m(\lambda_{r_1})d\Phi(\lambda). \tag{2}$$

Применяя к (2) теорему Карунена об интегральном преставления случайных функции, получим следующее утверждение.

Теорема 1. Однородное и изотропное случайное поле $\xi(r,\varphi)$ непрерывное в среднем квадратическом допускает представление

$$\xi(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{v_m}\left\{\cos m\varphi\int_0^{\infty}J_m(\lambda r)Z_m^{'}(d\lambda)+\sin m\varphi\int_0^{\infty}J_m(\lambda r)Z_m^2(d\lambda)\right\} \tag{3}$$

где $Z_m^1(\bullet)$ и $Z_m^2(\bullet)$ - две последовательности мер на $[0,+\infty)$ с ортогональными значениями такое, что

$$Mz_m^i(s_1)z_k^i(s_2)=\sigma_m^k\sigma_i^j\int_{s_1\cap s_2}d\Phi(\lambda), \tag{4}$$

$$\left(i=\overline{1,2};\ j=\overline{1,2};m=0,1,...;\ k=0,1,...\right),$$

$$Mz_m^i(s)=0.$$

Равенство (4) называется спектральным разложением случайного поля.

Будем говорить, что спектр случайного поля $\xi(r,\varphi)$ сосредоточен в круге радиуса $\tilde{R}$, если $\Phi(\lambda)=const$ при $\lambda\geq\tilde{R}$. Спектральное разложение такого поля имеет вид

$$\xi(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{v_m}\left\{\cos m\varphi\int_0^{\tilde{R}}J_m(\lambda r)z_m^{'}(d\lambda)+\sin m\varphi\int_0^{\tilde{R}}J_m(\lambda r)z_m^2(d\lambda).\right.$$

Теорема 2. При любом $\tilde{R}$ однородное и изотропное случайное поле $\xi(r,\varphi)$представимо в виде суммы

$$\xi(r,\varphi)=\alpha_{\tilde{R}}(r,\varphi)+\beta_{\tilde{R}}(r,\varphi),$$

где $\alpha_{\tilde{R}}(r,\varphi)$ однородное и изотропное случайное поле, спектр которого сосредоточен в круге радиуса $\tilde{R}$,

$$\mathrm{M}\left|\beta_{\tilde{R}}(r,\varphi)\right|^2=\int_{\tilde{R}}d\Phi(\lambda),$$

$$\mathrm{M}\alpha_{\tilde{R}}(r,\varphi)\beta_{\tilde{R}}(r,\varphi)=0.$$

Теорема следует из равенства (3). Достаточно положит

$$\alpha_{\tilde{R}}(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{v_m}\left\{\cos m\varphi\int_0^{\tilde{R}}J_m(\lambda r)z_m^{'}(d\lambda)+simm\varphi\int_0^{\tilde{R}}J_m(\lambda r)z_m^2(d\lambda),\right.$$

$$\beta_{\tilde{R}}(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{v_m}\left\{\cos m\varphi\int_{\tilde{R}}^{+\infty}J_m(\lambda r)z_m^{'}(d\lambda)+\sin m\varphi\int_{\tilde{R}}^{+\infty}J_m(\lambda r)z_m^2(d\lambda)\right\}$$

и принять вовниманию равенство

$$\sum_{m=0}^{\infty}v_mJ_m^2(\lambda r)=1\cdot$$

Случайное поле $\xi(t,s)$ как однородное случайное поле допускает также представление в виде стохастического интеграла

$$\xi(t,s)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\lambda_1t+\lambda_2s)}z(d\lambda_1,d\lambda_2)$$

по ортогональной случайной мере $Z(\cdot,\cdot)$ на плоскости.

предположим, что $\xi(t,s)$ однородное и изотропное случайное поле, спектр которого сосредоточен в круге радиуса $\tilde{R}$. Обозначим через $\chi_{\tilde{R}}(\lambda_1,\lambda_2)$ характеристическую функцию круга радиуса $\tilde{R}$.

$$\chi_{\tilde{R}}(\lambda_1,\lambda_2)=\begin{cases}1, & \lambda_1^2+\lambda_2^2\le\tilde{R}^2,\\ 0, & \lambda_1^2+\lambda_2^2>\tilde{R}^2.\end{cases}$$

Тогда представление (5) примет вид

$$\xi(t,s)=\int_{-\tilde{R}}^{\tilde{R}}\int_{-\tilde{R}}^{\tilde{R}}\chi_{\tilde{R}}(\lambda_1,\lambda_2)e^{i(\lambda_1 t+\lambda_2 s)}z(d\lambda_1,d\lambda_2).$$

Разложим функцию

$$\chi_R(\lambda_1,\lambda_2)\exp\{i(\lambda_1 t+\lambda_2 s)\}$$

в ряд Фурье в квадрате $[-R,R]\times[-R,R]$.

Это разложение имеет вид

$$\chi_R(\lambda_1,\lambda_2)\exp\{i(\lambda_1 t+\lambda_2 s)\}=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}C_{k_1,k_2}\exp\left\{i\frac{\pi}{R}(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2)\right\}$$

где

$$C_{k_1,k_2}=\frac{1}{2R^2}\iint\limits_{\lambda_1^2+\lambda_2^2\le R^2}\exp\left\{i\left[\lambda_1\left(t-\frac{\pi}{R}k_1\right)+\lambda_2\left(s-\frac{\pi}{R}k_2\right)\right]\right\}d\lambda_1 d\lambda_2. \tag{6}$$

Перейдём в (6) к полярным координатам

$$\lambda_1=\rho\cos\varphi,$$
$$\lambda_1=\rho\sin\varphi.$$

Получим

$$C_{k_1,k_2}=\frac{1}{2R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi}\exp\left\{ip\left[\left(t-\frac{\pi}{R}k_1\right)\cos\varphi+\left(s-\frac{\pi}{R}\right)\sin\varphi\right]\right\}\rho d\rho d\varphi.$$

После несложных преобразований, принимая во внимание равенства

$$J_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ex\rho\{i\,z\cos\varphi\}\,d\varphi,$$

$$\int_0^1 r\,J_0(a\,r)\,d\,r=\frac{1}{a}J_1(a),$$

получим

$$C_{\kappa_1,\kappa_2}=\frac{\pi}{2R}\frac{J_1\left(R\sqrt{\left(t-\kappa_1\frac{\pi}{R}\right)^2+\left(s-\kappa_2\frac{\pi}{R}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(t-\kappa_1\frac{\pi}{R}\right)^2+\left(s-\kappa_2\frac{\pi}{R}\right)^2}}.$$

Следовательно,

$$\chi_R(\lambda_1\lambda_2)ex\rho\{i(\lambda_1 t+\lambda_2 s)\}=$$

$$=\frac{\pi}{2R}\sum_{\kappa_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\kappa_2=-\infty}^{\infty}\frac{J_1\left(R\sqrt{\left(t-\kappa_1\frac{\pi}{R}\right)^2+\left(s-\kappa_2\frac{\pi}{R}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(t-\kappa_1\frac{\pi}{R}\right)^2+\left(s-\kappa_2\frac{\pi}{R}\right)^2}}\exp\left\{i\frac{\pi}{R}(\kappa_1\lambda_1-\kappa_2\lambda_2)\right\}.$$

Литература

1. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. – Киев: Вища школа, 180.-208 с.
2. Pogany T. An approach to the sampling theorem for continuous time processes. Austral. J. Statist. -1989. -31, No3. – P. 427-432.
3. Халикулов С.И. Об аппроксимации однородных случайных полей случайными полями с ограниченным спектром. Деп. вУкр НИИНТИ 27.10.92, № 1758 – Ук 92-40 с.

UDK 517.946

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ПЛОСКОСТИ

И. Э. Ниёзов, О.Каршибоев
Самаркандский государственный университет
E-mail: iqboln@mail.ru, okarshiboevsher@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача аналитического продолжения решения систем уравнений теории упругости в плоской области по её значениям и значениям её напряжений на части границы этой области, т.е. расматривается задача Коши.

Ключевые слова. системы теории упругости**,** интегральная формула, функция Карлемана, матрица Карлемана, задача Коши.

Elastiklik nazariyasi sistemasi uchun Koshi masalasi

Annotasiya: Bu ishda elastiklik nazariyasi tenglamalari sistemasi yechimini tekislikdagi sohada yechimning soha chegarasining musbat o‘lchovli qismida berilganiga ko‘ra sohaning ichiga topish masalasi qaraladi. Bunday masalaga Koshi masalasi deyiladi.

Kalit so‘zlar: elastiklik nazariyasisistemasi, integral formula, Karleman funksiyasi, Karleman matritsasi, Koshi masalasi.

The Cauchy problem for the system of the elasticity

Abstrakt. In this paper we consider the problem of analytical continuation of solutions to the system of the elasticity in a bounded domain from their values and values of their strains on a part of the boundary of this domain, i.e., we study the Cauchy problem.

Key words: system theory of elasticity, Carleman function, Carleman matrix, the Cauchy problem.

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системуравнений теории упругости в плоской области по её значениям и значениям её напряжений на частиграницы этой области, т.е. расматривается задача Коши.

Так как во многих реальных задачах часть границы недоступно для измерений ни смещений, ни напряжений либо известны лишь интегральные характеристики. При экспериментальном исследовании напряженно - деформированного состояния натурных конструкций, измерение можно произвести только на доступных участках, т.е. компоненты смешений и напряжений заданы лишь на части границы.

По этому возникает необходимость рассмотрения задачи продолжения решения системы уравнений теории упругости в области по её значениям и значениям её напряжений на части поверхности границы.

Система уравнений теории упругости эллиптическая. Соответственно задача Коши для таких систем является некорректной. Решение существует, единственен, но не устойчиво, т.е., решение не устойчиво относительно малого изменения данных. В некорректных задачах существование решение и принадлежности её к классу корректности [1] предполагается в априори.

В данной работе на основе метода функции Карлемана [2] и работ[3]- [7] строится регуляризованное решение задачиКоши для системы уравнений теории упругости для областейспециального вида.

В статье рассматриваются вопросы регуляризации задачи Коши для систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)$ точки Евклидова пространства E^2 и D область в E^2 с кусочно-гладкой границей ∂D , S -часть ∂D , $\Sigma=\partial D\setminus S.$

Пусть2− компонентныйвектор-функция$U(x)=(u_1(x),u_2(x))$удовлетворяет в области D системы уравнений теории упругости [8]:

$$\mu\Delta U(x)\ +\ (\lambda+\mu)\ grad\, div\, U(x)=0, \qquad (1)$$

где коэффициенты λ,μ ($\mu\neq 0$, $\lambda\neq -2\mu$) характеризующие среды.

Вектор-функцию $U(y)$ называем регулярной в D, если она непрерывна вместе со своими частными производными второго порядка в D и первого порядка на $\overline{D}\ =\ D\cap\partial D.$

Постановка задачи. Требуется определить регулярное решение U системы (1) в области D исходя из её данных Коши, заданных на S:

$$U(y)=f(y),\quad T(\partial_y,n(y))U(y)=g(y),\quad y\in S, \qquad (2)$$

где $T(\partial_y,n(y))$ оператор напряжения определяемый равенством

$$T_{ij}(\partial_y,n)=\mu\ \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial n}+\lambda\, n_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j}+\mu\, n_j(y)\frac{\partial}{\partial y_i},\quad i,j=1,2,$$

$n(y)=(n_1(y),\ n_2(y))-$ внешный единичный вектор нормали к поверхности ∂D в точке y, где $f(y)=(f_1(y),\ f_2(y))$ и $g(y)=(g_1(y),\ g_2(y))-$ заданные непрерывные вектор-функции на $S.\ \delta_{kj}$ -символ Кронекера.

Нам известно, что для ругулярное решение системы (1) верна интегральное представление [8], т.е.:

$$U(x)=\int_{\partial D}(\Psi(y-x)\{T(\partial_y,n)U(y)\}-\{T(\partial_y,n)\Psi(y-x)\}^{*}U(y))ds_y,\ x\in D, \qquad (3)$$

где, «*» у матрице означает операцию транспонирование, а $\Psi(y-x)$ - матрица фундаментальных решений статики теории упругости:

$$\Psi(y-x)=\left\|\lambda'\delta_{kj}\cdot\ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right)+\frac{\mu'(y_k-x_k)(y_j-y_j)}{r^2}\right\|_{2\times 2}.$$

где $\lambda'=\dfrac{(\lambda+3\mu)}{(4\pi\mu(\lambda+2\mu))},\ \ \mu'=\dfrac{(\lambda+\mu)}{(4\pi\mu(\lambda+2\mu))}.$

Определения.Матрицей Карлемана задачи (1), (2) называется $(2\times 2)-$ матрица $\Pi(y,x,\sigma)$, зависящая от двух точек y,x и положительного числового параметра σ, удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$1)\ \Pi(y,x,\sigma)=\Psi(y-x)+G(y,x,\sigma),$$

где матрица $G(y,x,\sigma)$ удовлетворяет по переменный y системе (1) всюду в области D, $\Psi(y-x)$ матрица фундаментальных решений системе (1);

$$2)\ \int_{\partial D\setminus S}\left(|\Pi(y,x,\sigma)|+|T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)|\right)ds_y\leq\varepsilon(\sigma),$$

где $\varepsilon(\sigma)\to 0,$ при $\sigma\to\infty;\ |\Pi|-$ евклидова норма матрицы $\Pi=\|\Pi_{ij}\|_{2x2}$, т.е., $|\Pi|=(\sum_{i,j=1}^{2}\Pi_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$ в частности $|U|=\left(\sum_{k=1}^{2}(u_k^2)\right)^{\frac{1}{2}}.$

Из определения матрицы Карлемана и формулы Грина получим

Теорема 1. *Всякое регулярное решение* $U(x)$ *системы (1) в области* D *представима в виде*

$$U(x)=\int_{\partial D}(\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y,n)U(y)\}-\{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}^{*}U(y))ds_y,\ x\in D, \qquad (4)$$

где $\Pi(y,x,\sigma)-$ *матрица Карлемана.*

Используя матрицу Карлемана, легко вывести оценку устойчивости решения задачи Коши (1), (2), а также указать метод эффективного решения этой задачи.

С целью построения приближенного решения задачи (1), (2) построим матрицу Карлемана следующим образом:

Пусть D- ограниченная односвязная областей, в E^2 с кусочно-гладкой границей $\partial D = SU\, l$, где $S-$ гладкая крывая лежащая в верхней полуплоскости $y_2>0$, аl –конечный отрезок вещественной оси.

$$\Pi(y,x,\sigma) = \left\|\Pi_{kj}(y,x,\sigma)\right\|_{2\times 2} = \left\|\lambda'\delta_{kj}\Phi(y,x,\sigma) - \mu'(y_j - x_j)\frac{\partial\Phi(y,x,\sigma)}{\partial y_k}\right\|_{2\times 2},$$

$$2\pi K(x_2)\Phi(y,x,\sigma) = \int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{\exp(\sigma w)}{w - x_2}\cdot\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},$$

где $w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_2$, $\alpha = |x_1 - y_1|$.

Введем следующие обозначения

$$U_\sigma(x) = \int_S [\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y,n)U(y)\} - \{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}^* U(y)]ds_y,$$

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_S [\Pi(y,x,\sigma)g_\delta(y) - \{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}^* f_\delta(y)]ds_y,$$

где $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$ непрерывные приближения на S функции $U(y)$ и $T(\partial_y,n)U(y)$, такое что

$$\max_S |f(y) - f_\delta(y)| + \max_S |T(\partial_y,n)U(y) - g_\delta(y)| \le \delta,\ 0<\delta<1.$$

Верна

Теорема 2. *Пусть $U(x)$ - регулярное решение уравнения (1) в области D и удовлетворяет на $l = \partial D \setminus S$ граничному условию*

$$|U(y)| + |T(\partial_y,n)U(y)| \le M,\ y\in l. \qquad (5)$$

Тогда, $x\in D$, $\sigma\ge 1$ справедливы неравенства

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \le MC(x)\sigma^2\exp(-\sigma x_2),$$

где $C(x) = C(\lambda,\mu)\int_{\partial D}\frac{ds_y}{|x-y|}$, $C(\lambda,\mu)-$ *постоянные, зависящие только от* λ,μ.

Теорема 3. *Пусть $U(x)-$ регулярная решения системы (1) в области D, удовлетворяющее (5) в $\partial D\setminus S$. Тогда справедлива оценка*

$$|u(x) - u_{\sigma\delta}(x)| \le M\,C(\lambda,\mu,x)\ \delta^{x_2/x_2^0}\ln\left(\frac{M}{\delta}\right), \qquad x\epsilon D$$

где$\sigma = (x_2^0)^{-1}\ln\left(\frac{M}{\delta}\right)$, $x_2^0 = \max_D x_2$, $C(\lambda,\mu,x) = C(\lambda,\mu)\int_{\partial D}|\ln r + r^{-1}|ds_y$, $r = |y-x|$.

Литература

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. 92 с.

2. Ярмухамедов Ш.Я. О задаче Коши для уравнения Лапласа //ДАН СССР. 1977. Т.235. № 2.С.281-283.

3. O. I. Makhmudov, I. E. Niyozov, N.Tarkhanov. The Cauchy Problem of Couple-Stress Elasticity.Contemporary Mathematics.AMS, V455, 2008.pp 297-310.

4. O. I. Makhmudov, I. E. Niyozov. The Cauchy problem for the Lame system in infinite domainsin R^m. Journal of inverse and Ill-PosedProblems.V14.N9.2006.pp.905-924(20).

5. МахмудовО.И. , НиёзовИ.Э. О задаче Коши для многомерной системы уравнений Ламэ. Из. ВУЗ. Математика. 2006. N4 (527). с.41-50.

6. O. I. Makhmudov, I. E. Niyozov. Regularization of a solution to the Cauchy Problem for theSystem of Thermoelasticity. Contemporary Mathematics. AMS, PrimaryV382, 2005,74F05, 35Q72.

7. Махмудов О. И., Ниёзов И.Э. Задача Коши для системы уравнений установившихся колебаний моментной теории упругости. Узб. Математический журнал. 2008. №4.

8. Купрадзе В.Д., Бурчуладзе Т.В., Гегелия Т.Г. и др. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения. М.: Наука, 1976.

УДК 517.957 + 519.67+ 519.63

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ BLOW-UP РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

А.С.Матякубов[1], Д.Р.Раупов[2]
[1]Национальный университет Узбекистана
[2]Институт пожарной безопасности МВД Республики Узбекистан
E-mail: almasa@list.ru, raupov.dilmurod@mail.ru

Аннотация. В данной статье изучается blow-up свойства решений нелинейных параболических систем уравнений недивергентного вида с источником. Построена автомодельная система уравнений, изучена асимптотическое поведение решений нелинейной системы, в зависимости от значения численных параметров системы.

Ключевые слова: асимптотика, кросс-диффузия,горение, нелинейная система, автомодельное решение, недивергентная форма.

Nodivergent ko‘rinishdagi chiziqsiz parabolik sistema blow-up hossaga ega yechimi asimptotikasi

Annotatsiya. Ushbu maqolada parabolik tipdagi manbaga ega nodivergent chiziqsiz tenglamalar sistemasining Blow-up xossaga ega yechimlari o‘rganilgan. Avtomodel tenglamalar sistemasi qurilgan va chiziqsiz sistemaning sonli parametrlari qiymatlariga bog‘liq holda avtomodel yechim asimptotikalari olingan.

Kalit so‘zlar:asimptotika, kross-diffuziya, yonish, chiziqsiz sistema, автомодельечим, nodivergent forma.

Asymptotic behavior of blow-up solutions of nonlinear parabolic system non-divergence form

Abstract. In this paper we study the properties of blow-up solutions of nonlinear parabolic systems of non-divergent form with a source. A self-similar system of equations is constructed, the asymptotic behavior of the solutions of a nonlinear system is studied.

Keywords: asymptotic, cross-diffusion, combustion, nonlinear system, self-similar solution, non-divergent form.

Введение

Режимы с обострением являются промежуточной асимптотикой реальных очень быстрых процессов, наблюдаемых в природе. Горение в режиме с обострением обладает рядом интересных свойств, стимулирующих их подробное исследование. К ним относится парадоксальное явление локализации тепла, при котором тепло и горение не распространяются в холодную среду. В области локализации происходит интенсивное энерговыделение и температура стремится к бесконечности за конечное время,а вне этой области температура либо равна нулю, либо ограниченна. Последнее определяется характером начальных данных. В среде возникают нестационарные диссипативные структуры - интенсивные процессы горения, локализованные на отдельных участках среды.

Режимы с обострением и явление локализации имеют место в широком классе задач математической физики. По ним существует обширная библиография, обзоры даны в [8]-[11]. Конечно, в природе не существует процессов, в которых какая-либо величина растет до бесконечности. Но все особенности режимов с обострением, как показано в работах [12], проявляются, когда величины увеличиваются по закону обострения в конечное число раз и это число определяется свойствами рассматриваемой нелинейной среды.

Распределение температуры в области локализации может иметь сложный немонотонный характер, т. е. в среде могут развиваться структуры разной сложности [8], [9]. В одномерном случае показано, что собственными функциями (с.ф.) нелинейной автомодельной задачи определяют все типы структур и волн в среде с заданными параметрами [9].

Основное внимание будет уделено тем свойствам решений, которые не имеют аналогов в теории режимов с обострением, развитой ранее для одного квазилинейного параболического

уравнения. При этом обсуждаются также вопросы, связанные с эффективностью автомодельного метода исследования. Оказывается, не всегда неограниченные автомодельные решения, которые удается построить для систем со степенными нелинейностями, «ответственны» за асимптотическую стадию развития режимов с обострением. Бывает так, что асимптотическая эволюция процесса горения описывается автомодельными решениями совсем других уравнений, т.е. возникают приближенных автомодельных решений.

Рассмотрим в области $Q=\{(t,x):0<t<T,\ 0<x<b\}$ нелинейную систему параболических уравнений недивергентного вида с кросс-диффузией

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=v^{\alpha_1}\nabla\left(u^{m_1-1}\nabla u\right)+u^{\beta_1},\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=u^{\alpha_2}\nabla\left(v^{m_2-1}\nabla u\right)+v^{\beta_2},\end{aligned}\tag{1}$$

с начальными и краевыми условиями

$u(0,x)=u_0(x)\ge 0,\ v(0,x)=v_0(x)\ge 0,\ \forall x\in R^N$

где $m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - положительные числа, $\nabla=grad_x(\cdot)$, $u=u(t,x)\ge 0$, $v=v(t,x)\ge 0$ - искомое решение.

Определение. Решения, удовлетворяющие условию

$$\max_{x\in\Omega} u(t,x)\to+\infty,$$

при $t\to T_0^-$ называются режимами с обострением (или неограниченными), где Ω - ограниченная область в R^N, T_0^- - максимальная время существования решения.

Для построения автомодельной системы для (1) предлагается алгоритм нелинейного расщепления, для чего решения системы (1) ищется в виде

$$u(t,x)=(T-t)^{q_1}w(\tau(t),r),\ v(t,x)=(T-t)^{q_2}\varphi(\tau(t),r),\ r=|x|\tag{2}$$

$$q_1=-\frac{1}{1-\beta_1},\ q_2=-\frac{1}{1-\beta_2}$$

$$\tau(t)=\begin{cases}\int(T-t)^{\frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}}dt, & \frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1\ne 0\\ \mathrm{Ln}(T-t), & \frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1=0\end{cases}\tag{3}$$

В дальнейшем система (1) исследуется при выполнении условия

$$\frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}=\frac{m_2-1}{1-\beta_2}+\frac{\alpha_2}{1-\beta_1},\ \frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1>0$$

Тогда относительно (w,φ) получим систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial\tau}&=\varphi^{\alpha_1}\nabla\left(w^{m_1-1}\nabla w\right)-b_1\tau^{-1}\left(w^{\beta_1}+w\right)=0,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}&=w^{\alpha_2}\nabla\left(\varphi^{m_2-1}\nabla\varphi\right)-b_2\tau^{-1}\left(\varphi^{\beta_1}+\varphi\right)=0,\end{aligned}\tag{4}$$

где $b_i=\dfrac{q_i}{q_i(m_i-1)+q_{3-i}\alpha_i},\quad i=1,2$

А затем введя (4) преобразование

$$w(\tau,x)=f(\xi),\quad \varphi(\tau,x)=\phi(\xi),\quad \xi=\frac{\|x\|}{(T-t)^{\frac{1}{2}}} \tag{5}$$

получим автомодельную систему уравнений

$$\varphi^{\alpha_1}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f^{m_1-1}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{df}{d\xi}-b_1\left(f^{\beta_1}+f\right)=0,$$

$$f^{\alpha_2}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\phi^{m_2-1}\frac{d\phi}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{d\phi}{d\xi}-b_2\left(\phi^{\beta_1}+\phi\right)=0, \tag{6}$$

Ниже займемся изучением асимптотики решений автомодельных уравнений для системы (6). Для чего преобразуем исходную систему к относительно легко поддающемуся исследованию виду.

Для получения такой вспомогательной системы уравнений применим к уравнениям (6) следующее преобразования

$$f(x)=\bar{f}(\xi)\,y_1(\eta),\ \phi(x)=\bar{\phi}(\xi)\,y_2(\eta) \tag{7}$$

где

Мы будем рассматривать неотрицательные решения системы уравнений (6), удовлетворяющих следующим условиям:

$$f'(0)=0,\ \phi'(0)=0, f(\infty)=0,\ \phi(\infty)=0 \tag{8}$$

$$\bar{f}(\xi)=\left(a+\xi^2\right)^{p_1},\ \bar{\phi}(\xi)=\left(a+\xi^2\right)^{p_2},\ a>0,\ \eta=\ln\left(a+\xi^2\right),$$

$p_i=\dfrac{m_{3-i}-\alpha_i-1}{(m_1-1)(m_2-1)-\alpha_1\alpha_2}$, $y_1(\eta), y_2(\eta)$ -искомые функции.

Тогда система (6) приводиться к виду

$$y_{3-i}^{\alpha_i}\frac{d}{d\eta}\left(Ly_i\right)+a_{i1}(\eta)\,y_{3-i}^{\alpha_i}Ly_i+a_{i2}\left(a_{i0}y_i+\frac{dy_i}{d\eta}\right)+$$
$$+a_{i3}(\eta)\,y_i+a_{i4}(\eta)y_i^{\beta_i}=0,(i=1,2) \tag{9}$$

в котором

$$a_{i0}(\eta)=p_i,\ a_{i1}(\eta)=\frac{Ne^{\eta}}{2(e^{\eta}-a)}-1+p_im_i,\quad a_{i2}(\eta)=\frac{1}{4},\ a_{i3}(\eta)=-\frac{b_ie^{\eta}}{4(e^{\eta}-a)},$$

$$a_{i4}(\eta)=-\frac{b_ie^{s_i\eta}}{4(e^{\eta}-a)},\quad Ly_i=y_i^{m_i-1}\left(p_iy_i+\frac{dy_i}{d\eta}\right),\ s_i=p_i(\beta_i-1)+1,\ (i=1,2)$$

Мы будем рассматривать неотрицательные решения системы уравнений (6), удовлетворяющих следующим условиям:

$$f'(0)=0,\ \phi'(0)=0, f(\infty)=\infty,\ \phi(\infty)=\infty \tag{10}$$

$$\bar{f}(\xi)=\left(a-\xi^2\right)^{p_1},\ \bar{\phi}(\xi)=\left(a-\xi^2\right)^{p_2},\ a>0,\ \eta=-\ln\left(a-\xi^2\right),$$

$p_i=\dfrac{m_{3-i}-\alpha_i-1}{(m_1-1)(m_2-1)-\alpha_1\alpha_2}$, $y_1(\eta), y_2(\eta)$ - искомые функции.

Тогда система (6) приводиться к виду

$$y_{3-i}^{\alpha_i}\frac{d}{d\eta}\left(Ly_i\right)+a_{i1}(\eta)\,y_{3-i}^{\alpha_i}Ly_i+a_{i2}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}y_i\right)+$$
$$+a_{i3}(\eta)\,y_i+a_{i4}(\eta)y_i^{\beta_i}=0,(i=1,2) \tag{11}$$

в котором

$$a_{i0}(\eta)=-p_i,\ a_{i1}(\eta)=\frac{Ne^{-\eta}}{2(e^{-\eta}-a)}-1+p_im_i,\quad a_{i2}(\eta)=\frac{1}{4},\ a_{i3}(\eta)=-\frac{b_ie^{-\eta}}{4(e^{-\eta}-a)},$$

$$a_{i3}(\eta)=-\frac{b_ie^{-s_i\eta}}{4(e^{-\eta}-a)},\quad Ly_i=y_i^{m_i-1}\left(\frac{dy_i}{d\eta}-p_iy_i\right),\ s_i=p_i(\beta_i-1)+1,\ (i=1,2)$$

Основные результаты

Введем обозначения

$$b_{i1}(\eta)=\left(\frac{N}{2}-1+p_im_i\right)p_i,\quad b_{i2}(\eta)=\frac{p_i-b_i}{4},\ c_{i1}(\eta)=\left(p_im_i-1\right)p_i,$$

$$c_{i2}(\eta)=-\frac{p_i}{4},\ c_{i3}(\eta)=\frac{-b_i}{4a},(i=1,2)$$

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть в случай быстрой диффузии $\beta_i>1,\ p_i<0\,(i=1,2)$ и $\frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1>0$. Тогда решение систему уравнения (1) имеет асимптотику при $\xi\to\infty$ $U(t,x)=A(T-t)^{q_1}\left(a+\xi^2\right)^{p_1}y_1(\eta),\ V(t,x)=B(T-t)^{q_2}\left(a+\xi^2\right)^{p_2}y_2(\eta),$ (12)

где $y_i(\eta)=y_i^0+o(1),\ 0<y_i^0<+\infty,\ (i=1,2)$ и $y_i^0,(i=1,2)$ являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$b_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+b_{i2}=0,\ (i=1,2)$$

Доказательство. Полагая в системе (9)

$$v_i(\eta)=y_i^{m_i-1}\left(\frac{dy_i}{d\eta}-a_{i0}y_i\right),\ (i=1,2) \tag{13}$$

получим тождества

$$\begin{aligned}v_i'&=-a_{i1}(\eta)v_i(\eta)-a_{i2}(\eta)y_{3-i}^{\alpha_i}y_i^{1-m_i}v_i(\eta)-\\&-a_{i3}(\eta)y_i^{\beta_i}y_{3-i}^{-\alpha_i}-a_{i4}(\eta)y_iy_{3-i}^{-\alpha_i}=0,(i=1,2)\end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\begin{aligned}g_i(\lambda_i,\eta)&=-a_{i1}(\eta)\lambda_i-a_{i2}(\eta)y_{3-i}^{-\alpha_i}y_i^{1-m_i}\lambda_i-\\&-a_{i3}(\eta)y_i^{\beta_i}y_{3-i}^{-\alpha_i}-a_{i4}(\eta)y_iy_{3-i}^{-\alpha_i},\ (i=1,2)\end{aligned}$$

где $\lambda_i\in R,\ (i=1,2)$

Пусть $\frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1>0$. Тогда функция $g_i(\lambda_i,\eta),\ (i=1,2)$ сохраняет знак на некотором промежутке $[\eta_1,+\infty)\subset[\eta_0,+\infty)$ при каждом фиксированном значении $\lambda_i\ (i=1,2)$ отличном от значений удовлетворяющих системе

$$\begin{aligned}&-a_{i1}^0\lambda_i-a_{i2}^0\left(y_i^0\right)^{1-m_i}\left(y_{3-i}^0\right)^{-\alpha_i}\lambda_i-\\&-a_{i3}^0\left(y_i^0\right)^{\beta_i}\left(y_{3-i}^0\right)^{-\alpha_i}-a_{i4}^0y_i^0\left(y_{3-i}^0\right)^{-\alpha_i}=0,\ (i=1,2)\end{aligned}$$

Отсюда ввиду

$$\lim_{\eta\to+\infty} a_{i1}(\eta)=\frac{N}{2}-1+m_1p_1;\ \lim_{\eta\to+\infty} a_{i2}(\eta)=\frac{1}{4};$$

$$\lim_{\eta\to+\infty} a_{i3}(\eta)=0;\ \lim_{\eta\to+\infty} a_{i4}(\eta)=\frac{-b_i\cdot q_i}{4};\ (i=1,2)\ \text{при}\ \beta_i>1;\ p_i<0$$

следует, что функция $g_i(\lambda_i,\eta),\ (i=1,2)$ сохраняет знак на промежутке $[\eta_1,+\infty)\subset[\eta_0,+\infty)$, где $\lambda_i\neq 0,\ (i=1,2)$.

По предположению функция $v_i(\eta),(i=1,2)$ согласно (13) и имеет предел при $\eta\to+\infty$. Тогда $y_i'(\eta),\ (i=1,2)$ имеет предел при $\eta\to+\infty$, причем, равный нулю. Тогда $v_i(\eta)=y_i^{m_i-1}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}y_i\right)=a_{i0}\left(y_i^0\right)^{m_i}+o(1),\ (i=1,2)$ при $\eta\to+\infty$ и в силу (14) производная функции $v_i(\eta),\ (i=1,2)$ имеет предел, при $\eta\to+\infty$, который очевидно равен нулю.

Следовательно, необходимо, чтобы

$$\lim_{\eta\to+\infty}\left(a_{i1}(\eta)v_i(\eta)+a_{i2}(\eta)y_{3-i}^{-\alpha_i}y_i^{1-m_i}v_i(\eta)+a_{i3}(\eta)y_i^{\beta_i}y_{3-i}^{-\alpha_i}+a_{i4}(\eta)y_i\,y_{3-i}^{-\alpha_i}\right)=0,$$

$i=1,2$.Отсюда легко убедиться, что система (9) имела решения $\left(y_1(\eta),\ y_2(\eta)\right)$ с конечным равным нулю пределом при $\eta\to+\infty$ необходимо, чтобы соблюдалось условия теоремы 1.

Следовательно, в силу введенного преобразований (2), (5), (7) решение системы уравнений (1) при $\xi\to+\infty$ имеет асимптотики (12).

Теорема 2. Пусть $\frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1>0$. Для того чтобы система (9) имело решения

$$\left(y_1(\eta),\ y_2(\eta)\right)\ \text{вида}\ y_i(\eta)=y_i^0+o(1),\ \eta\to\infty,\ (i=1,2) \tag{15}$$

где $0<y_i^0<+\infty,\ (i=1,2)$ необходимо, чтобы соблюдалось одно из следующих условий:

1. $p_i=\frac{1}{1-\beta_i},\ y_i^0,(i=1,2)$ - являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$c_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+c_{i2}+c_{i3}z_i^{\beta_i-1}=0,\ (i=1,2)$$

2. $p_i<\frac{1}{1-\beta_i},\ p_im_i>1,\ y_i^0,(i=1,2)$ -являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$c_{i1}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+c_{i2}=0,\ (i=1,2)$$

3. $p_1=\frac{1}{1-\beta_i},\ p_2<\frac{1}{1-\beta_2},\ p_2m_2>1,\ y_i^0,(i=1,2)$ -являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_{11}z_1^{m_1-1}z_2^{\alpha_1}+c_{12}+c_{13}z_1^{\beta_1-1}=0\\ c_{21}z_2^{m_2-1}z_1^{\alpha_2}+c_{22}=0\end{cases}$$

3. $p_1<\frac{1}{1-\beta_i},\ p_2=\frac{1}{1-\beta_2},\ p_1m_1>1,\ y_i^0,(i=1,2)$ -являются соответственно корнями $z_i,(i=1,2)$ системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_{11} z_1^{m_1-1} z_2^{\alpha_1} + c_{12} = 0 \\ c_{21} z_2^{m_2-1} z_1^{\alpha_2} + c_{22} + c_{23} z_2^{\beta_2-1} = 0 \end{cases}$$

Следствие 1. Обобщенное решение систему уравнения (1) имеет асимптотику при

$$|x| \to a^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}},$$

$$U(t,x) = z_1 (T-t)^{q_1} \left(a - |x| \tau^{-\frac{1}{2}} \right)^{p_1} (1+o(1)),\ U(t,x) = z_2 (T-t)^{q_2} \left(a - |x| \tau^{-\frac{1}{2}} \right)^{p_2} (1+o(1)),$$

где $z_1, z_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ - определенные выше константы.

Результаты даёт возможность получить следующую оценку для свободной границы $|x(t)| \le \left[\frac{a}{b} \right]^{\frac{1}{2}} (T-t)^{\frac{b}{2}}$, где $b = \frac{\alpha_1}{1-\beta_2} + \frac{m_1-1}{1-\beta_1} + 1.$

Заключение.

В статье исследовано blow-upрешений нелинейных параболических систем уравнений недивергентного вида с источником. Построена автомодельная система уравнений, изучена асимптотическое поведение решений нелинейной системы, в зависимости от значения численных параметров системы.

Литература

1. Мэтьюз Дж.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование Matlab. "Диалектика", 2001. - 720 с.
2. Lu Haihua. Global existence and blow-up analysis for some degenerate and quasilinear parabolic systems. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2009, No. 49, pp. 1-14.
3. Raimbekov J.R.. The Properties of the Solutions for Cauchy Problem of Nonlinear Parabolic Equations in Non-Divergent Form with Density. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2015, 8 (2), pp. 192-200.
4. Sadullaeva Sh.A. Numerical Investigation of Solutions to a Reaction-Diffusion System with Variable Density. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2016, V. 9 (1), pp. 90-101
5. Aripov M., Rakhmonov Z. On the behavior of the solution of a nonlinear multidimensional polytropic filtration problem with a variable coefficient and nonlocal boundary condition. Contemporary Analysis and Applied Mathematics, Vol. 4, № 1, 2016, 23-32
6. Aripov M., Matyakubov A.S.. To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form. International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology, Vol. 3 Issue 8, 2016, p. 533–537.
7. Арипов М., Матякубов А.С. Эффект конечной скорости распространения возмущения для модели кросс-диффузионных систем недивергентного вида. Вестник НУУз, №2, 2016, с. 94-102.
8. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации.- В кн.: Современные пробл. матем. физ. и вычисл. матем. М.: Наука, 1983, с. 217—243.
9. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде.- Ж. вычисл. матем. и матем.. физ., 1983, т. 23, № 2, с. 380-390.
10. Курдюмов С. П., Змитренко Н. В. N- и S-режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением.-Прикл. механ. и техн. физ., 1977, № 1. с. 3-23.
11. Самарский А. А. и др. Горение нелинейной среды в виде сложных структур. - Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 6, с. 1330-1333
12. Змитренко Я. В. и др. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия проявления ее в эксперименте.- Препринт ИПМатем. АН СССР. М , 1977, № 103.

UDK.517.518

FUNKSIONAL OPERATORLARNING JAMLANUVCHI FUNKSIYALAR FAZOSIDA BIR TOMONLAMA TESKARILANUVCHANLIK SHARTLARI

Sh.A.Urolov
Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Samarqand filiali

Annotatsiya. Mazkur ishda $\mathrm{L_p}(\Gamma), 1 < p < \infty$ fazoda siljishli funktsional operatorning siljish chekli sondagi qo‘zg‘almas nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lganda bir tomonlama teskarilanuvchanlik kriteriyasi olingan.

Kalit so‘zlar: diffeomorfizm, operator, teskarilanuvchan, norma, kontr, qo‘zg‘almas, invariant, fazo.

Условие односторонней обратимости функциональных операторов в пространстве суммируемых функции

Аннотация. В данной работе в пространствах $\mathrm{L_p}(\Gamma), 1 < \mathrm{p} < \infty$ получен критерии односторонней обратимости функциональных операторов со сдвигом, имеющим конечное множество периодических точек.

Ключевые слова: диффеоморфизм, оператор, обратимости, нормы, задний, фиксированный, инвариантный, пространство.

Functional operators one way conditions of to be opposite in the space of accumulative function

Abstract. In this article provided in the space of $\mathrm{L_p}(\Gamma), 1 < p < \infty$ gained of one sided reversibility movable functional operators which have a finite set of periodic points

Keywords: diffeomorfizm, operator, reverse, norms, rear, fixed, invariant, space.

Γ −sodda silliq yopiq kontir, $\alpha - \Gamma$ kontirni o‘zini o‘ziga akslantiruvchi diffeomorfizm (siljish) bo‘lib, yo‘nalishni saqlovchi (to‘g‘ri) va chekli sondagi Λ qo‘zg‘almas nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lsin.

Bu ishda $L_p(\Gamma), 1 < p < \infty$ fazoda quyidagi ko‘rinishdagi siljishli funktsional operatorlarning bir tomonlama teskarilanuvchanlik shartlari o‘rganiladi.

$$A = a(t)I + b(t)W \qquad (1)$$

bu yerda$a(t), b(t) \in C(\Gamma)$, I − birlik operator, W − siljish operatori. $(W\varphi)(t) = \varphi([\alpha(t)]$, $t \in \Gamma$

Ma’lumki ([1] . 24-28-betlar) α −siljishning qo‘zg‘almas nuqtalari τ_j $(j = \overline{1,s})\Gamma$ ko‘ntirni o‘zaro kesishmaydigan α ga nisbatan invariant bo‘lgan yoylarga ajraladi. γ −shu yoylarning biri bo‘lsin. Aniqlik uchun $\gamma = (\tau_+, \tau_-)$ deb faraz qilaylik. Bu yerda $\tau_+(\tau_-)$ tortuvchi (itaruvchi) qo‘zg‘almas nuqta ([1] . 24-28-betlar)

Osonlik bilan ko‘rish mumkinki A operatorning $L_p(\Gamma)$ fazoda o‘ngdan (chapdan) teskarilanuvchanligi uning bir vaqtda har bir $L_p(\gamma)$ fazoda o‘ngdan (chapdan) teskarilanuvchanligiga ekvivalent bo‘ladi.

$$h(\tau) = |a(\tau)| - |\alpha'(\tau)|^{-\frac{1}{p}}|b(\tau)|\,, \alpha_0(t) = t\,, \alpha_n(t) = \alpha\big(\alpha_{n-1}(t)\big), n \in N$$

belgilashlarni kiritamiz.

A −operator uchun quidagi tasdiq o‘rinli.

Teorema.Aoperator$L_p(\gamma)$ − fazoda faqat o‘ngdan teskarilanuvchi bo‘lishi uchun

$$h(\tau_+) < 0 \;\;,\;\; h(\tau_-) > 0 \qquad (1)$$

$$\forall\, t \in \gamma\,,\; \exists\, k_0 \in \mathrm{Z}\,, \forall\, k < k_0\;, a\big(\alpha_k(t)\big) \neq 0\,, \forall\, k > k_0\,, b(\alpha_k(t)) \neq 0 \qquad (2)$$

va faqat chapdan teskarilanuvchi bo‘lishi uchun

$$h(\tau_+) > 0 \;\;,\;\; h(\tau_-) < 0 \qquad (1')$$

$$\forall\, t \in \gamma\,, \exists\, k_0 \in \mathrm{Z}\,, \forall\, k > k_0\;, a\big(\alpha_k(t)\big) \neq 0\,, \forall\, k < k_0\,, b(\alpha_k(t)) \neq 0 \qquad (2')$$

shartlarningning bajarilishi zarur va yetarli.

Teoremani isbotini o‘ngdan teskarilanuvchi bo‘lgan holda bajaramiz.Chapdan teskarilanuvchi bo‘lgan hol shunga o‘xshash isbotlanadi.

Teoremani isbotlashdan oldin ba’zi bir yordamchi tasdiqlarni keltiramiz.

1-lemma.Agar $A-$ operaor $L_p(\gamma)$ fazoda faqat o‘ngdan (chapdan) teskarilanuvchi bo‘lsa, u holda

$$h(\tau_+) < 0 \ , \ h(\tau_-) > 0$$
$$h(\tau_+) > 0 \ , \ h(\tau_-) < 0$$

Bu tasdiqning isboti [2] yoki [4] ishdagi 1- lemmadan bevosita kelib chiqadi.

Quyidagi belgilashlarni keltiramiz

$X-$ banax fazosini $Y-$ banax fazosiga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatorlar fazosini $\mathcal{Z}(X,Y)-$ orqali; $\xi = \{\xi_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ ko‘rinishdagi ketma – ketliklar to‘plamida normani $\|\xi\| = (\sum|\xi_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ tenglik orqali kiritilganda hosil bo‘lgan banax fazosini l_p- orqali; l_p fazoda $(\cup\xi)_k = \xi_{k+1}$ tenglik orqali aniqlanuvchi siljish operatorni $U-$ orqali; $\gamma-$ daaniqlangan qiymatlari l_p- da bo‘lgan va $\gamma-$ da o‘lchovli funksyalar to‘plamida norma

$$\|\varphi\| = (\int_\gamma \|\varphi(t)\|^p|dt|)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

tenglik orqali aniqlanganda hosil bo‘lgan fazoni $L_p(\gamma, l_p)-$ orqali belgilaymiz

$\gamma-$yoyning ixtiyoriy x nuqtasini olib chetki nuqtalari x va $\alpha(x)$ bo‘lgan yoyni $\delta-$ orqali belgilaymiz.

$L_p(\gamma)$ni$L_p(\delta, l_p)$ ga akslantiruvchi

$$(\mathfrak{S}\varphi)(t) = \{\varphi[\alpha_k(t)]\}_{-\infty}^{+\infty}$$

izomorfizmnianiqlaymiz

$$L_p(\delta, l_p)\text{ni}L_p(\delta, l_p) \quad \text{ga akslantiruvchi} \quad D_A = \mathfrak{S}A\mathfrak{S}^{-1}$$

operator – funksiyani qaraylik.

Bu akslantirish $t \in \delta$ nuqtada

$$D_A(t) = diag\{a(\alpha_k(t))\}_{-\infty}^{+\infty} - diag\{b(\alpha_k(t))\}_{-\infty}^{+\infty}$$

qiymatni qabul qiladi.

[3] ishda A operatorning $L_p(\gamma)$ da o‘ngdan (chapdan) teskarilanuvchi bo‘lishi uchun $D_A(t)$ operator – funksiyaning har bir $t \in \delta$ nuqtada o‘ngdan (chapdan) teskarilanuvchan bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlangan.

Demak, A operatorning bir tomonlama teskarilanuvchanlik kriteriyasini olish uchun $D_A(t)$ operatorning har bir $t \in \delta$ nuqtada bir tomonlama teskarilanuvchi bo‘lishligi kriteriyasini olish yetarli bo‘lar ekan.

Endi teoremaning isbotiga o‘tamiz. (1) shartning zaruriyligi 1- lemmadan kelib chiqadi. (2) shartning zaruriyligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik (2) shart bajarilmasin. (2) shartning inkori quyidagi korinishda bo‘ladi.

$$\exists\, t_0 \in \delta\,, \forall k_0 \in \mathrm{Z}\,, \exists\, n < k_0 \ , a(\alpha_n(t_0)) = 0\,, yoki\ \exists\, l \geq k_0\,, b(\alpha_l(t_0)) = 0 \qquad (3)$$

(1) shartlarga ko‘ra yetarli katta k larda $b(\alpha_k(t_0)) \neq 0$ bo‘lganligi uchun, eng katta $l-$ nomer topilib $b(\alpha_l(t_0)) = 0$ bo‘ladi. $k_0 = l + 1$deb olsak ixtiyoriy $k \geq k_0$ da $b(\alpha_k(t_0)) \neq 0$ bo‘ladi. (3) ga ko‘ra $\exists n \leq l \ \ a(\alpha_n(t_0)) = 0$ bo‘ladi. Shunday qilib (2) shartning inkori (1) shartning bajarilishini hisobga olsak, quydagi ko‘rinishda bo‘lar ekan

$$\exists n, l \in Z\,,\ n \leq l\,,\ a(\alpha_n(t_0)) = b(\alpha_l(t_0)) = 0 \qquad (4)$$

Umumiylikka zarar keltirmasdan $l > n$ bo‘lganda $l > k \geq n$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $k$lar uchun $b(\alpha_k(t_0)) \neq 0$ deb hisoblaymiz. U holda faqat $\alpha_l(t_0)$ nuqtada noldan farqli qiymat qabul qiluvchi $\{\varphi(\alpha_l(t_0))\} \in l_p$ funksiya $\Im m D_A(t_0)$ ga qarashli bo‘lmaydi. Haqiqatdan ham , agar $g \in l_p$

$$D_A(t_0)g = \varphi$$

tenglamaning yechimi bo‘lsa, ya’ni

$$a[\alpha_k(t_0)]g[\alpha_k(t_0)] - b[\alpha_k(t_0)]g[\alpha_{k+1}(t_0)] = \varphi[\alpha_k(t_0)] \ , \qquad k \in R$$

tenglamaning yechimi bo‘lsa , u holda (3) ga ko‘ra $\varphi[\alpha_l(t_0)] = 0$

($l > n$bo‘lganda$g[\alpha_{n+1}(t_0)] = \cdots = g[\alpha_{l-1}(t_0)] = 0$ munosabatni hisobga olish kerak) bo‘ladi. Bu esa φ ning tanlanishiga zid.$\Im m D_A(t_0)$ningl_p bilan ustma – ust tushmasligi $D_A(t_0)$ ning

o‘ngdan teskarilanuvchanligiga qarama – qarshi bo‘ladi. Demak A operatorning ham o‘ngdan teskarilanuvchanligiga qarama – qarshi bo‘ladi.

Yetarliligi (1) va (2) shartlar bajarilgan bo‘lsin. Har bir $t \in \delta D_A(t)$ operator – funksiyani $\prod_{\mu}^{-} l_p + \prod_{\mu}^{+} l_p$ fazoda

$$D_A(t) = \begin{pmatrix} \Pi_{\mu}^{-} D_A(t) \Pi_{\mu}^{-} & \Pi_{\mu}^{-} D_A(t) \Pi_{\mu}^{+} \\ 0 & \Pi_{\mu}^{+} D_A(t) \Pi_{\mu}^{+} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda tasvirlash mumkin.

Bu yerda $\Pi_{\mu}^{+}(\Pi_{\mu}^{-}) - l_{\mathrm{p}}$ da proektor operator bo‘lib $k \geq \mu (k < \mu)$ nomerli komponentlarni saqlab, qolgan komponentlarni no‘lgaaylantiradi

$D_A(t)$ni o‘ng tomondan chapdan teskarilanuvchi

$$C = \begin{pmatrix} \Pi_{\mu}^{-} & 0 \\ 0 & \Pi_{\mu}^{+} \mathrm{U}^{-1} \Pi_{\mu}^{+} \end{pmatrix}$$

operatorga ko‘paytirib

$$D_A(t)\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \Pi_{\mu}^{-} D_A(t) \Pi_{\mu}^{-} & \Pi_{\mu}^{-} D_A(t) \Pi_{\mu}^{+} \mathrm{U}^{-1} \Pi_{\mu}^{+} \\ 0 & \Pi_{\mu}^{+} \widetilde{D}_A(t) \Pi_{\mu}^{+} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

ko‘rinishda uchburchakli blok – operatorni olamiz. Bu yerda

$$\widetilde{D}_A(t) = diag\{a(\alpha_k(t))\}_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{U}^{-1} - diag\{b(\alpha_k(t))\}_{k=-\infty}^{+\infty}$$

(1) va (2) shartlar bajarilganda $\Pi_{\mu}^{-} D_A(t) \Pi_{\mu}^{-}$ va $\Pi_{\mu}^{+} \widetilde{D}_A(t) \Pi_{\mu}^{+}$ operatorlarning har bir $t \in \delta$ nuqtada $\prod_{\mu}^{-} l_p \ va \ \prod_{\mu}^{+} l_p$ fazolarda teskarilanuvchanligi kelib chiqadi.

Demak (4) uchburchak shakilda bo‘lganligi uchun $D_A(t)\mathrm{C}$ operator ham teskarilanuvchi bo‘ladi.Bu yerdan esa $D_A(t)$ operatorning har bir $t \in \delta$ da o‘ngdan teskarilanuvchanligi kelib chiqadi.$D_A(t)$ning har bir $t \in \delta$ da o‘ngdan teskarilanuvchanligi A operatorning $L_p(\gamma)$ da o‘ngdan teskarilanuvchanligiga ekvivalent bo‘lganligi uchun A operatorning $L_p(\gamma)$ da o‘ngdan tekarilanuvchanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Adabiyotlar

1. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М: Наука, 1977. – 448с
2. Мардиев Расул, Тошева Наргиза Ахмедовна. Об $n(d)$ – нормальности сингулярных операторов со сдвигом в обобщенных пространствах Гёльдера. Молодой учёный. №2(61). февраль , 2014. – 24 б
3. Мясников А.Г., Сазанов Л.И. О Сингулярные интегральные операторы с некарлемановским сдвигом. АНССР , 1977. –Т .237, № 6. – С . 1289 – 1292 .
4. Mardiyev R. G‘aniyev D. Siljishli funksional operatorlarning bir tomonlama teskarilanuvchanligi haqida. SamDU Ilmiy tadqiqotlar axborotnomasi. №3(73), 02.2012 , 24 – 25 – betlar.

УДК:51

ОБ ОДНОЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВУХЖИДКОСТНЫХ СРЕД С ОДНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Х.Х. Имомназаров[1], С.Б. Куйлиев[2]
[1]Институт вычислительной математики математической геофизики СО РАН
[2]Самаркандский государственный университет
E-mail: imom@omzg.sscc.ru

Аннотация. Получена переопределенная стационарная система дифференциальных уравнений второго порядка. Для двухмерной системы установлена вариационная постановка задачи. Показано, что вариационная задача для системы уравнений двухскоростной гидродинамики корректна в соответствующем пространстве Соболева.

Ключевые слова. двухжидкостная среда, двухскоростная гидродинамика, вариационная постановка задач, корректность задач, пространства Соболева.

Ikki suyuqlikli muhitning umumiy bosimli ikki tezlikli matematik modeli haqida

Annotatsiya. Ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarning statsionar o‘ta aniqlangan sistemasi olingan. Ikki o‘lchamli Sistema uchun masalaning variatsion qo‘yilishi keltirilgan. Ikki tezlikli gidrodinamika tenglamalar sistemasi uchun variatsion masala mos Sobolev fazosida korrekt qo‘yilganligi ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: ikki suyuqlikli muhit, ikki tezlikli gidrodinamika, variatsion masala, korrekt masala, Sobolev fazolari.

On a two-speed mathematical model of two-fluid medium with one pressure

Abstract. An overdetermined stationary system of second-order differential equations is obtained. For the two-dimensional system, a variational statement of the problem is established. It is shown that the variational problem for the system of equations of two-speed hydrodynamics is well-posed in the corresponding Sobolev space.

Keywords. two-fluid medium, two-speed hydrodynamics, variational formulation of problems, wellposedness of problems, Sobolev spaces.

Рассматриваемая в работе равновесная по давлению двухскоростная модель сжимаемой двухфазной среды предполагает наличия равновесия фаз по давлению и температуре. Описываемые в рамках модели двухфазные среды имеют следующую структуру: частицы каждой из фаз движутся друг относительно друга, взаимодействуя между собой как непосредственно, так и посредством соседней фазы. Частицы каждой из фаз совместно составляют двухфазной континуум, единичный объем которого характеризуется двумя плотностями, двумя скоростями, энтропией. Получаемые в результате применения метода законов сохранения [Халатников, 1971; Доровский, 1989; Блохин, Доровский, 1994; Доровский, Перепечко, 1996] уравнения переноса дополняются диссипативными слагаемыми, определяющими необратимые процессы в среде, в том числе, возникающие в связи с учетом межфазного взаимодействия. Для замыкания системы управляющих уравнений модель дополняется уравнениями состояния.

В двухскоростной гидродинамике ключевым является понятие о двухскоростном континууме, в каждой точке которого одновременно присутствует каждая из фаз со своими парциальными плотностями p_1, p_2 и с локально заданными скоростями u_1, u_2. Произвольные частицы среды, при таком подходе, представляются локально сосуществующими взаимно проникающими подсистемами. Выбор функциональной зависимости внутренней энергии $E_0 = E_0(\rho, \rho_1, S, j_0)$ фиксирует термодинамику среды. Внутренняя энергия единицы объема двухфазной среды определяется первым началом термодинамики:

$$dE_0 = TdS + \mu d\rho + qd\rho_1 + (u_1 - u_2, dj_0), \tag{1}$$

где $\rho, \rho_1, \rho_2 -$ плотность среды и соответствующие парциальные плотности фаз, причем $\rho = \rho_1 + \rho_2$; $\mu -$ химический потенциал; q - параметр межфазного взаимодействия; S - энтропия единицы объема, $T -$ температура; $u_1 -$ скорость первой фазы, $u_2 -$ скорость второй фазы, $j_0 = j - \rho u_2$ - относительный импульс, инвариантный относительно преобразования Галилея, $j = \rho_1 u_1 + \rho u_2$ - плотность импульса.

Эволюция плотности двухжидкостной среды и парциальной плотности первой фазы определяются законами сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, j = 0, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + div(\rho_1 u_1) = 0\,. \tag{2}$$

Закон сохранения массы для второй фазы является следствием системы уравнений (2).

Также должны выполняться законы сохранения импульса, энергии и энтропии (в обратимом приближении):

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_i \Pi_{ik} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + div\, F = 0,$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса, E — полная энергия единицы объема, F — обратимый поток энтропии, Q — обратимый поток энергии, S - энтропия единицы объема. Систему уравнений (2), (3) необходимо дополнить уравнением движения второй фазы:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_2, \nabla)u_2 = \alpha \nabla \mu + \beta \nabla T, \tag{4}$$

где вид сил, вызывающих движение фазы, определяется условиями термодинамического равновесия среды: $\nabla \mu = 0$, $\nabla T = 0$, $u_1 = u_2$.

Потоки F, Q, Π_{ik} и давление P определяются однозначно в процессе реализации метода законов сохранения [Халатников, 1971]. Наличие непосредственного взаимодействия частиц фаз приводящее к дополнительному вкладу во внутреннюю энергию $qd\rho_1$, как следствие приводит к дополнительным вкладам $q\rho_1\delta_{jk}$ к тензору плотности потока импульса и $q\rho_1\delta_{ij}u_{1j}$ к потоку энергии:

$$F = \frac{S}{\rho} j,$$

$$Q = \left[\mu + \frac{u_2^2}{2} - \left(u_1, u_2\right) \right] j + \frac{TS}{\rho} j + u_1(u_1, j - \rho u_2) + q\rho_1 u_{1j}, \tag{5}$$

$$\Pi_{ik} = \rho_1 u_{1i} u_{1k} + \rho_2 u_{2i} u_{2k} + P\delta_{ik} + q\rho_1\delta_{jk},$$

$$P = -E_0 + TS + \mu\rho + \left(u_1 - u_2\right)(j - \rho u_2).$$

При этом для коэффициентов α, β справедливы соотношения $1 + \alpha = 0$, $\beta = \frac{S}{\rho}$, а тензор напряжений определяется стандартным образом $\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} - q\rho_1\delta_{jk}$.

Учет диссипативных процессов приводит к появлению дополнительных необратимых потоков в уравнениях баланса полного импульса и энергии:

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \left(\Pi_{ik} + \pi_{1ik} + \pi_{2ik} \right) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \partial_i \left(Q_i + W_i \right) = 0 \cdot \tag{7}$$

где потоки Q, Π_{ik} определяются формулами (5), $W -$ необратимый поток энергии, $\pi_{1ik}, \pi_{2ik} -$ необратимые потоки импульса.

В уравнение движения второй фазы следует ввести силу межфазного взаимодействия f^{∂}:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_2, \nabla)u_2 = -\nabla \mu - \frac{S}{\rho} \nabla T + f^{\partial}, \tag{8}$$

а в уравнении на энтропию добавляется диссипативный поток f_q и диссипативная функция R

$$\frac{\partial S}{\partial t} + div\left(\frac{S}{\rho} j + f_q \right) = \frac{R}{T}. \tag{9}$$

Процедура согласования уравнений (6)-(9) с первым началом термодинамики (1) приводит к определению потока энергии и, согласно теории Онсагера, к виду диссипативной функции. Перейдем к величинам $e = \frac{E}{\rho}$, $s = \frac{S}{\rho}$ полной энергии и энтропии, отнесенным к единице массы. Уравнения двухскоростной динамики сжимаемых двухфазных сред с термодинамикой среды, задаваемой зависимостью $e = e(\rho_1, \rho_2, u_1, u_2, s)$, в поле силы тяжести могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + div(\rho_1 u_1) = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + div(\rho_2 u_2) = 0,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u_1, \nabla)u_1 = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \frac{\rho_2}{\rho}\nabla q - \frac{\rho_2}{\rho} f^{\partial} + f_1 + g, \tag{10}$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_2, \nabla)u_2 = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\rho_2}{\rho}\nabla q + f^{\partial} + f_2 + g.$$

Энтропия переносится со средней скоростью двухфазного потока $\frac{j}{\rho}$:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\left(j, \nabla\right)s = -\frac{1}{\rho} div\, f_q + \frac{R}{\rho T} \tag{11}$$

где диссипативная функция R определяется соотношением:

$$R = f^{\partial}(u_1 - u_2)^2 + f_q \nabla T + \pi_{1ik} u_{1ik} + \pi_{2ik} u_{2ik}\,.$$

Пренебрегая эффектами, связанными с объемной вязкостью, получаем соотношения для диссипативных потоков $\pi_{1ik} = \eta_1 u_{1ik}$, $\pi_{2ik} = \eta_2 u_{2ik}$ и приходим к следующему виду диссипативной функции:

$$R = \rho_2 b(u_1 - u_2)^2 + \lambda \frac{1}{T}\left(\nabla T\right)^2 + 2v\left(\nabla T, (u_1 - u_2)\right) + \eta_1 u_{1ik}^2 + \eta_2 u_{2ik}^2 \tag{12}$$

Диссипативные потоки f^{∂}, f_q, f_1, f_2 определяются соотношениями:

$$f^{\partial} = b(u_1 - u_2) + \frac{1}{\rho_2} v\nabla T,$$
$$f_q = \lambda \frac{1}{T}\nabla T + v(u_1 - u_2). \tag{13}$$
$$f_{1i} = \frac{1}{\rho_1}\partial_k\left(\eta_1 u_{1ik}\right) + \frac{v}{\rho_1}\partial_i T\,, \quad f_{2i} = \frac{1}{\rho_2}\partial_k\left(\eta_2 u_{2ik}\right) - \frac{v}{\rho_2}\partial_i T\,.$$

В уравнениях (10)-(13): ρ_1, ρ_2, u_1, u_2 - парциальные плотности и скорости фаз соответственно; $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $j = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2$ - плотность и импульс двухфазной среды; $u_{1ik} = \frac{1}{2}\left(\partial_k u_{1i} + \partial_i u_{1k} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\mathrm{div}\mathbf{u}_1\right)$, $u_{2ik} = \frac{1}{2}\left(\partial_k u_{2i} + \partial_i u_{2k} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\mathrm{div}\mathbf{u}_2\right)$ — тензоры скоростей деформации; $g -$ ускорение свободного падения; $P -$ давление, $q -$ параметр межфазного взаимодействия, вводящий второе давление в двухфазной среде.

Кинетические коэффициенты межфазного трения b, сдвиговой вязкости фаз η_r, теплопроводности двухфазной среды λ и коэффициент v являются функциями термодинамических параметров. Эффекты объемной вязкости не учитываются.

Уравнения состояния двухфазной среды, замыкающие динамические уравнения (10)-(13), считаются заданными (см. [5]).

Линейная стационарная система уравнений двухскоростной гидродинамики.

В отсутствие массовых сил $g = 0$ система уравнений (10) в обратимом гидродинамическом приближении имеет решение $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\rho_1 = \rho_1^0$, $\rho_2 = \rho_2^0$ для покоящейся смеси жидкостей с равномерным давлением $P = P^0$ и параметром межфазного взаимодействия $q = q^0$, парциальными плотностями ρ_1^0, ρ_2^0 и температурой T.

Линеаризуем уравнения (10) относительно гидродинамического фона $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\rho_1 = \rho_1^0$, $\rho_2 = \rho_2^0$ и рассмотрим случай, когда отсутствует межфазное взаимодействие между подсистемами:

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \rho_1 = \rho_1^0 + \rho_1^1,\ \rho_2 = \rho_2^0 + \rho_2^1,\ P = P^0 + P^1.$$

Подставив эти выражения в (10) и для сокращения записи, далее вместо обозначений u_1^1, u_2^1, ρ_1^1, ρ_2^1 будем использовать u_1, u_2, ρ_1, ρ_2. Тогда в стационарном случае получим

$$\begin{gathered} div\ u_1 = 0, \qquad div\ u_2 = 0, \\ \nu_1 \Delta u_1 = \nabla P - \rho^0 f, \\ \nu_2 \Delta u_2 = \nabla P - \rho^0 f. \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь сдвиговые вязкости фаз ν_1, ν_2 являются положительными постоянными. Полученная система является переопределенной системой уравнений в частных производных. Изучению краевых задач для таких переопределенных систем уравнений в частных производных посвящена работа [6-10].

Постановка двумерной задачи

Пусть Ω - ограниченная область R^2 с Липшицевой непрерывной границей Γ, и пусть Ω' - дополнение к $\overline{\Omega}$. Рассмотрим стационарную систему двухжидкостной среды с равновесием фаз по давлению (14) в Ω' со следующими граничными условиями:

$$u_1 = q_1, \quad u_2 = q_2 \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{15}$$

с условием бесконечности на u_i $i = 1, 2,$ которые обращаются в ноль и удовлетворяют соотношениям [11]

$$\int_{\Omega'} \|\nabla u\|^2 dx < \infty, \qquad \int_{\Omega'} \frac{1}{\omega^2} \|u\|^2 dx < \infty$$

для соответствующей весовой функции ω, которая зависит от размерности, которые обращаются в ноль на бесконечности. Массовая сила $f = (f_1,\ f_2)$ задана в двойственном пространстве скоростей, а граничное значение q_i $i = 1, 2,$ принадлежит пространству $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^2$. $\nabla -$ оператор градиента по $x = (x_1,\ x_2)$.

Вариационная постановка

В данном пункте будем выполнять преобразования, связанные с системой (14), (15), предполагая, что все функции обладают необходимой гладкостью. Заметим, что правые части дивергентных уравнений в (14) должны удовлетворять определенным условиям согласования. Действительно, применяя формулу векторного анализа $div\ rot\, v = 0$ получим, что

$$div\ \Delta v = div\, grad\, (div\ v) = \Delta (div\ v) \tag{16}$$

Далее, действуя на два последних векторных уравнений в (14) оператором дивергенции, получим уравнения

$$\Delta p = \rho\, div\ f\ ,$$

Граничные функции q_i в (15.3) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\int_{\Gamma} q_i \cdot n ds = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{17}$$

где $n -$ единичный вектор внешней нормали к границе Γ.

Следуя [11-14], введем следующие пространства Соболева

$$W_0^1(\Omega') = \left\{ u \in \mathscr{D}'(\Omega') : (\lg r)^{-1} u \in L^2(\Omega'), \nabla u \in L^2(\Omega') \right\},$$

$$W_0^2(\Omega') = \left\{ u \in \mathscr{D}'(\Omega') : \rho(r)^{-2} (\lg r)^{-1} u \in L^2(\Omega'),\right.$$

$$\rho(r)^{-1}\left(\lg r\right)^{-1}\nabla u\in L^2(\Omega'), D^2u\in L^2(\Omega')\Big\}$$

$$W_1^1(\Omega')=\left\{u\in\mathscr{D}'(\Omega'):u\in L^2(\Omega'),\ \rho(r)\nabla u\in L^2(\Omega')\right\},$$

$$W_{-1}^1(\Omega')=\left\{u\in\mathscr{D}'(\Omega'):\rho\left(r\right)^{-2}u\in L^2(\Omega'),\ \rho\left(r\right)^{-1}\nabla u\in L^2(\Omega')\right\}.$$

Все эти пространства снабжены своими естественными нормами и полунормами. $\rho(r)=(1+r^2)^{\frac{1}{2}}$ и $\lg r=\ln(1+r^2)$, $r=r(x)$ - расстояние до начала координат.

Как известно [11], что $W_1^1(\Omega')$ не содержит многочленов, и что $W_0^1(\Omega')$ и $W_{-1}^1(\Omega')$ содержат P_0, и что $W_0^2(\Omega')$ содержит P_1.

Теперь перейдем к неоднородной внешней задаче Стокса для системы уравнений двухскоростной гидродинамики. Так как $\mathbf{f}\in\left(W_0^{-1}(\Omega')\right)^2$, $\mathbf{q}_i\in\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^2$ и $\nu_i>0$, i=1,2, можно найти $\mathbf{u}_i\in\left(W_0^1(\Omega')\right)^2$ и $p\in L^2\left(\Omega'\right)$ такие, что

$$\nu_1\Delta u_1-grad\ p=-\rho f,\quad div\ u_1=0\ \text{ в }\ \Omega' \tag{18}$$

$$\nu_2\Delta u_2-grad\ p=-\rho f,\quad div\ u_2=0\ \text{ в }\ \Omega' \tag{19}$$

$$u_1=q_1,\ u_2=q_2\qquad \text{на}\qquad \Gamma \tag{20}$$

Как и в ограниченном случае, задача (18)-(20) имеет эквивалентную вариационную формулировку:

Найти $u_i\in\left(W_0^1(\Omega')\right)^2$ и $p\in L^2\left(\Omega'\right)$ так, что

$$\nu_1\left(\nabla u_1,\nabla v_1\right)-(p,\ div\ v_1)=\rho\left\langle f,v_1\right\rangle\qquad\forall v_1\in\left(\overset{0}{W}{}_0^1(\Omega')\right)^2, \tag{21}$$

$$div\ u_1=0\ \text{ в }\ \Omega', \tag{22}$$

$$u_1\big|_\Gamma=q_1,\qquad \text{на}\quad \Gamma \tag{23}$$

$$\nu_2\left(\nabla u_2,\nabla v_2\right)-(p,\ div\ v_2)=\rho\left\langle f,\ v_2\right\rangle\qquad\forall v_2\in\left(\overset{0}{W}{}_0^1(\Omega')\right)^2, \tag{24}$$

$$div\ u_2=0\ \text{ в }\ \Omega', \tag{25}$$

$$u_2\big|_\Gamma=q_2,\qquad \text{на}\qquad \Gamma \tag{26}$$

Ввиду условия inf-sup [14, 15]

$$\inf_{p\in L^2(\Omega')}\ \sup_{\mathbf{w}\in\left(\overset{0}{W}{}_0^1(\Omega')\right)^2}\frac{\int\limits_{\Omega'}p\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}dx}{\|p\|_{0,\Omega'}\|\mathbf{w}\|_{1,0,\Omega'}}\geq\frac{1}{K},$$

где K - положительная постоянная.

Следовательно, задача (21)-(26) эквивалентна следующей задаче:

Найти $u_i\in\left(W_0^1(\Omega')\right)^2$ так, что

$$\nu_1\left(\nabla u_1,\nabla v_1\right)=\rho\left\langle f,v_1\right\rangle\qquad\forall v_1\in V, \tag{27}$$

$$div\ u_1=0\ \text{ в }\ \Omega', \tag{28}$$

$$u_1\big|_\Gamma=q_1,\qquad \text{на}\quad \Gamma \tag{29}$$

$$\nu_2\left(\nabla u_2,\nabla v_2\right)=\rho\left\langle f,v_2\right\rangle\qquad\forall v_2\in V, \tag{30}$$

$$div\ u_2 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega', \tag{31}$$

$$u_2\big|_{\Gamma} = q_2, \qquad \text{на} \qquad \Gamma \tag{32}$$

В формулах (27) и (30) обозначено гильбертово пространство:

$$V = \left\{ v \in \left(\overset{0}{W}{}_0^1(\Omega') \right)^2 : \quad div\ v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega' \right\}.$$

В данной работе доказана следующая

Теорема. Предположим, что $\Omega \subset R^2$ имеет непрерывную липшицеву границу Γ, которая необязательно связана, но не имеет внутренней связанной компоненты. Тогда для массовой силы f заданной в пространстве $\left(W_0^{-1}(\Omega')\right)^2$ и функции q_i $i = 1, 2,$ заданных в пространстве $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^2$ задача (1)-(3) имеет единственное решение $(\mathbf{u}_i, p) \in \left(W_0^1(\Omega')\right)^2 \times L^2(\Omega')$, которое непрерывно зависит от данных, т.е.

$$\|\mathbf{u}_i\|_{1,0,\Omega'} + \|p\|_{0,\Omega'} \le C\left[\|\mathbf{f}\|_{-1,0,\Omega'} + \|\mathbf{q}_i\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \right].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-51-41002).

Литература

1. Халатников И. М. Теория сверхтекучести. – Москва: Наука, 1971.
2. Доровский В.Н. Континуальная теория фильтрации / В.Н. Доровский // Геология и геофизика. – 1989. – №7. – С. 39-45.
3. Блохин А.М., Доровский В.Н. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. – Новосибирск, 1994.
4. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Гидродинамическая модель раствора в трещиновато-пористых средах // Геология и геофизика. – 1996. – Т. 37. – №9. – С. 123-134.
5. Френкель, Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Известия АН СССР. Серия география и геофизика. – 1944. – Т. 8. – С. 133-149.
6. Гудович И.С., Крейн С.Г. О некоторых краевых задачах, эллиптических в подпространстве // Мат. сб. 1971. Т. 84(126), № 4. С. 595–606.
7. Жураев Д.А., Жиан-Ган Тан, Имомназаров Х.Х., Урев М.В. Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухжидкостной среде // УзбМЖ, 2016, No.3, с. 58-69.
8. Урев М.В., Имомназаров Х.Х., Жиан-Ган Тан Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // СибЖВМ, 2017, т. 20, No. 4, с. 425-437.
9. Урев М.В., Имомназаров Ш.Х. Классическое решение одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // СЭМИ, 2018, №. 15, С. 1621-1629.
10. Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Маматкулов М.М., Черных Е.Г. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Сиб. журн. индустр. матем., 2014, т. 17, № 4, с. 60-66.
11. Girault V., Sequeira A. A Well-Posed Problem for the Exterior Stokes Equations in Two and Three Dimensions // Arch. Rational Mech. Anal., 1991, v. 114, pp. 313-333.
12. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга,1998.
13. Girault V. and Raviart P.-A. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
14. Babushka I. The finite element method with Lagrangian multipliers // Numer. Math., 1973, v. 20, pp. 179-192.
15. Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers // R.A.I.R.O., Anal. Numer. R2, 1974, pp. 129-151.

УДК: 517

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОХОЖДЕНИЯ ОБЛАСТИ С РАЗРЫВНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

С. Очилов, Д.Ибрагимова
Самаркандский государственный университет
E-mail: s-ochilov56@mail.ru, Ibragimova_dilshoda@mail.ru

Аннотация. В данной работе исследуются необходимые условия оптимальности времени, которая возникает при необходимости наибыстрейшего вывода объекта из области. Действительно, в реальности в задачах оптимального управления, связанных с экологией, возникает проблема, когда требуется найти траекторию некоторой динамической системы, которая минимальное время находится в заражённой области, причём эта область может перемещаться со временем. К аналогичной постановке может быть сведена задача быстрейшего прохождения самолётом грозового фронта при его внезапном, не предсказанном появлении и невозможности обхода. Если в задаче оптимального управления в смысле быстродействия оставить все условия теми же, а в интегральном функционале подынтегральную функцию (непрерывно дифференцируемую) заменить разрывной функцией, мы получаем задачу оптимального управления с разрывным интегралом. Поэтому её исследование представляет определённой трудности. В работе сформулированы и доказаны необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина. Изучены дифференциальные свойства выбранного критерии качества.

Ключевые слова: движение, согласованность, регулярность, оптимальная траектория, вариация, неявная функция, дифференциальные свойства.

Uzlukli integralli kriteriya uchun sohadan optimal o‘tish masalasi

Annotatsiya. Ishda ob’ektni sohadan qisqa muddatda olib chiqish zarurati paydo bo‘lganda vaqtni optimallashtirishning zaruriy shartlari tadqiq qilinadi. Haqiqatan, ekologiya bilan bog‘liq optimal boshqaruv masalalarida dinamik tizimni zararlangan sohada bo‘lish vaqtini minimallashtirish muammosi paydo bo‘ladiki, bu soha vaqt bo‘yicha siljishi mumkin. Bu kabi masalalarga, masalan, to‘satdan paydo bo‘lgan mamaqaldiroq fronti ichida qolgan va uni aylanib o‘tish imkoniyati bo‘lmagan hollarda samolyotni tezlik bilan chiqarish masalasini keltirish ham mumkin. Agar tez ta’sir ma’nosidagi optimal boshqaruv masalasida barcha shartlarni o‘zgarishsiz qoldirib, integralli funksionaldagi integral osti funksiyani (uzluksiz differensiallanuvchi), uzlukli funksiya bilan almashtirsak, sohadan optimal o‘tish masalasiga kelamiz. Integralli funksional uzlukli bo‘lganligi uchun uning tadqiqoti ma’lum bir qiyinchiliklarni keltirib chiqaradi. Ishda optimallikning zaruriy shartlari aniq ifoda qilinib, Pontryaginning maksimum prinsipi ko‘rinishida isbotlandi. Tanlangan sifat kriteriyasining differinsial xossalari o‘rganildi.

Kalit so‘zlar: harakat, kelishuvchanlik, regulyarlik, optimal traektoriya, variatsiya, oshkormas funksiya, differensial xossalar.

Optimal transmission problem for a domain with a discontinuous integral

Abstract. In this work, we study the necessary conditions for optimality of time, which wax, if necessary , the fastest output of an object from a region. Indeed, in reality, in problems of optimal control related to ecology, a problem arises when it is necessary to find the trajectory of some dynamic system by which the minimum time is in the infected area, and this area can move with time. A similar formulation can be reduced to the problem of the fastest passage of an airplane through a thunderstorm front with its sudden, unpredictable appearance and impossibility of getting around. If in the optimal control problem in the sense of speed, all conditions remain the same and in the integral function, we obtain the optimal control problem with a discontinuous integral(continuous integral). Therefore, her study presents certain difficulties. In the paper, the necessary optimality conditions are formulated and proved in the from of the Pontryagin maximum principle. The differential properties of the selected quality criterion are studied.

Keywords: motion, reconciliation, regualarly, optimal trace, variation, implicitly function, difference internal.

В данной работе формулируются и доказываются необходимые условия оптимальности времени прохождения через выпуклую область, когда область начальных состояний динамической системы пересекается с заданной областью. В случае не пересечения задача рассмотрена в (1)

Постановка задачи. Пусть, система уравнений, описывающая движение, линейна, т.е. имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $A, -n \times n -$ матрица, $B - nxr$ матрица, $u(t) \in R^r$, $x(t) -$ траектория из подпространства L пространства абсолютно непрерывных функций. $u(t) -$ управляющая функция, которая может выбираться на отрезке времени $t \in [0,1]$ из множества U. Относительно множества управлений U будем предполагать, что оно из суммируемых функций $u(\cdot)$, для которых решения системы (1) в виде абсолютно непрерывных функции $x(\cdot)$ существует, при этом имеет место формула

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2}$$

Заданы множества $M_0 \subseteq R^n$, $M_1 \subseteq R^n$ и множество $M \subseteq R^n$. Требуется выбрать управление $u(\cdot) \in U$ и начальное условие $x(0) \in M_0$ так, чтобы $x(1) \in M_1$, а время, в течение которого выполняется включение $x(t) \in M$ было бы минимальным.

Предположим, что множество M_0 выпукло и замкнуто, и

$$M_1 = \{x \in R^n: \varphi_j(x) \le 0, j = 1, \dots, m\} \tag{3}$$

где $\varphi_j -$ непрерывно дифференцируемые функции. Их градиенты

$$\varphi'_{jx}(x) = \left\{\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_n}\right\},$$

где $x_i -$ компоненты вектора x, понимаемого как вектор-строка.

Пусть,

$$M = \{x \in R^n: \varphi_0(x) \le 0\},$$

выпуклое множество, где $\varphi_0(x) -$ некоторая функция, зависящая от x.

$$M_0 \subset M, \quad M_1 \cap M = \emptyset.$$

Введением характеристической функции

$$\delta(x,t) = \begin{cases} 1, x \in M, \\ 0, x \notin M \end{cases}$$

исходную задачу можно сформулировать в виде

$$T(x(\cdot)) = \int_0^1 \delta\,(f(x(t),t)dt \to min \tag{4}$$

при условиях

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{5}$$

$$M_0 \subset M, \quad M_1 \cap M = \emptyset, \tag{6}$$

$$x(0) \in M_0, \tag{7}$$

$$x(1) \in M_1, \tag{8}$$

$$u(t) \in U, \ t \in [0,1] \tag{9}$$

Пусть теперь $x^0(t), t \in [0,1] -$ траектория из выделенного класса L. Предположим, что траектория $x^0(t), t \in [0,1]$ пересекает множество $M(t\ )$ и t_*, t^* соответствующие моменты входа траектории в $M(t)$ и выхода из него, тогда

$$\varphi_0(x(t_*)) = 0, \quad \varphi_0(x(t^*)) = 0.$$

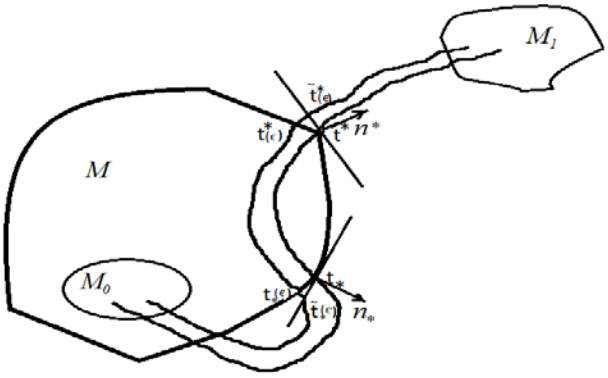


Рис 1. Оптимальная траектория $x^0(\cdot)$ и ее вариация вида $x^0(\cdot) + \varepsilon\delta x(\cdot)$, $\delta x(\cdot) \in L$

Так как множество M выпукло, то через его каждую точку можно провести опорную гиперплоскость. Уравнение этой гиперплоскости запишется так

$$n_*(x - x^0(t_*)) = 0, \quad \varphi_0(x^0(t_*)) = 0, \tag{10}$$

где n_* – вектор-строки нормали опорной гиперплоскости соответствующей граничной точке $x^0(t_*)$ множества *M*. Для дальнейшего использования наложим некоторое условие относительно управлений U и ограничение на траекторию системы (4).

1. Условие согласованности: потребуем выполнения условия

$$n_* B = 0. \tag{11а}$$

2. Условие регулярности: будем говорить, что момент t_* регулярен для траектории $x(\cdot)$, если

$$\varphi_0\big(x^0(t_*)\big) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} n_*\big(x^0(t)\big)|_{t=t_*} = n_* \dot{x}^0(t_*) = n_*\big(Ax^0(t_*) + Bu^0(t_*)\big) = n_* A x^0(t_*) \neq 0 \quad (11б)$$

где n_* – вектор-строки нормали опорной гиперплоскости соответствующей граничной точке $x^0(t_*)$ множества *M*. Введем обозначение

$$\gamma(x^0(\cdot), t_*) = n_* A x^0(t_*)$$

Справедливы соотношения

$$n_*\big(x - x^0(t_*)\big) \leq 0, \qquad n^*\big(x - x^0(t^*)\big) \leq 0, x \in M,$$

где n_*, n^* – векторы-строки нормалей опорных гиперплоскостей соответствующих граничным точкам $x^0(t_*)$, $x^0(t^*)$ множества *M*.

Пусть теперь траектория $x^0(\cdot)$ варьируется, т.е. рассматриваются близкие к ней траектории $x^0(\cdot) + \varepsilon\delta x(\cdot)$, $\delta x(\cdot) \in L$ (рис.1). Очевидно, что (см.рис1.)

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to o}}\left|\frac{t^*(\varepsilon) - t^*(0)}{\varepsilon} - \frac{t_*(\varepsilon) - t_*(0)}{\varepsilon}\right| \leq \lim_{\varepsilon\to o}\left|\frac{\tilde{t}^*(\varepsilon) - t^*(0)}{\varepsilon} - \frac{\tilde{t}_*(\varepsilon) - t_*(0)}{\varepsilon}\right| =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\tilde{t}^*(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} - \frac{d}{d\varepsilon}\tilde{t}_*(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}.$$

Вычислим производную $\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{t}_*(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$. Для этого при $t \in [0,1]$ рассмотрим уравнение

$$g(t,\varepsilon) = n_*\big(x^0(t) + \varepsilon\delta x(t) - x^0(t_*)\big) = 0, \tag{12}$$

которое должно определить $\tilde{t}_*(\varepsilon)$ для малых ε.

Поскольку $g(t_*, 0) = 0$, то уравнение (11) определяет $\tilde{t}_*(\varepsilon)$ как неявную функцию ε. Проверим выполнение условий теоремы о неявных функциях [3]. В силу сделанных предположений $g(t,\varepsilon)$ (см условие согласованности и выражение (11)) непрерывно дифференцируемо по t и ε:

$$\left.\frac{\partial g(t,\varepsilon)}{\partial t}\right|_{\substack{\varepsilon=0\\ t=t_*}} = \gamma(x^0(\cdot), t_*) \neq 0,$$

$$\left.\frac{\partial g(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{\varepsilon=0\\ t=t_*}} = n_*\delta x(t_*).$$

Согласно теореме о неявных функциях [3], функция $\tilde{t}_*(\varepsilon)$ существует и

$$\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{t}_*(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = -\frac{n_*\delta x(t_*)}{\gamma(x^0(\cdot), t_*)}. \tag{13}$$

Рассуждая подобным образом, для производной $\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{t}^*(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$ получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{t}^*(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = -\frac{n^*\delta x(t^*)}{\gamma(x^0(\cdot), t^*)}.$$

Заметим теперь, что функция $\tilde{t}_*(\varepsilon)$ определялась траекторией $x(\cdot)$, моментом t_* и вариацией $\delta x(\cdot)$, следовательно, можно положить

$$\tilde{t}(x^0(\cdot) + \varepsilon\delta x(\cdot), t_*) = \tilde{t}_*(\varepsilon).$$

Тогда, согласно общепринятым обозначениям, величина $\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{t}_*(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$ есть производная $\tilde{t}(x^0(\cdot), t_*)$ по направлению $\delta x(\cdot)$. Окончательно получаем следующий результат:

$$\tilde{t}(x^0(\cdot), \varepsilon\delta x(\cdot), t_*) = -n(x^0(\cdot), t_*)\delta x(t_*), \tag{14}$$

где

$$n(x^0(\cdot), t_*) = \frac{n_*}{n_*\dot{x}^0(t_*)}. \tag{15}$$

Этот результат имеет место и для функции $\tilde{t}^*(\varepsilon)$.

Итак, когда траектория пересекает заданную область один раз, то при вариации траектории $x^0(\cdot)$ производная функционала $T\big(x^0(\cdot)\big) = t^* - t_*$ по направлению $\delta x(\cdot)$ имеет вид

$$T'\big(x^0(\cdot),\delta x(\cdot)\big) = -n(x^0(\cdot),t^*)\delta x(t^*) + n(x^0(\cdot),t_*)\delta x(t_*)$$

Для обобщения полученного результата сделаем некоторые предположения относительно оптимальной траектории $x^0(\cdot)$. Пусть $u^0(\cdot)$ – соответствующее оптимальное управление. Будем предполагать, что существуют такие моменты $t_1 < t_2 < \cdots < t_{2m}$, что

$$\begin{gathered}\varphi_0(x^0(t_i) = 0, \qquad i = 1,\cdots,2m+1,\\ \gamma(x^0(\cdot),t_{2j+1}) > 0, \qquad j = 0,\cdots,m,\\ \gamma(x^0(\cdot),t_{2j}) < 0, \quad j = 1,\cdots,m,\\ \varphi_0(x^0(t) < 0,\ t \in \big(t_{2j},t_{2j+1}\big),\ j = 1,\cdots,m,\\ \varphi_0(x^0(t) < 0,\ t \in [0,t_1).\end{gathered} \tag{16}$$

и внешние нормали $n(x^0(\cdot),t_i)$ к множеству M удовлетворяют условию согласованности:

$$n(x^0(\cdot),t_i)B = 0,\ \ i = 1,\cdots,2m+1.$$

Описанная формулами (14) ситуацию наглядно показана на рис.1. Моменты времени t_i с нечетными индексами обозначают время выхода из M, с четными индексами – моменты входа в M. Общее время нахождения траектории в заданном множестве согласно (16) равно

$$T\big(x^\circ(\cdot)\big) = t_1 + \textstyle\sum_{i=1}^m (t_{2i+1} - t_{2i}) \tag{17}$$

Рассмотрим теперь вариации оптимальной траектории $x^0(\cdot)$ вида $x^0(\cdot) + \varepsilon\delta x(\cdot), \delta x(\cdot) \in L$. Чтобы оценить получающиеся при этом изменения целевого функционала (17), т.е. время прохождения через область, воспользуемся формулами (15) и (16). При вариации траектории моменты времени t_i меняются на $t(x^0(\cdot) + \varepsilon\delta x(\cdot), t_i = t_i(\varepsilon)$, которые трудно вычислить, так как множество Mимеет негладкую границу. На рис 3. показано, что $t_i(\varepsilon) \le \tilde{t}_i(\varepsilon) -$ для моментов выхода и $t_i(\varepsilon) \ge \tilde{t}_i(\varepsilon) -$ для моментов входа в множество M. Учитывая это, при вариации оптимальной траектории оценка сверху производной функционала (17) по направлению $\delta x(\cdot)$ имеет вид

$$\begin{gathered}\tilde{T}'\big(x^\circ(\cdot),\delta x(\cdot)\big) = -n(x^\circ(\cdot),t_1)\delta x(t_1) +\\ + \textstyle\sum_{i=1}^m [-n(x^\circ(\cdot),t_{2i+1})\delta x(t_{2i+1}) + n(x^\circ(\cdot),t_{2i})\delta x(t_{2i})],\end{gathered} \tag{18}$$

где $n(x^\circ(\cdot),t_i) -$ внешняя нормаль к множеству M в точке $x^\circ(t_i)$. Таким образом формула (18) дает оценку производной по направлению. Заметим теперь, что ограничение (*) на конец траектории задано непрерывно дифференцируемыми функциями $\varphi_j, j = 1,\cdots,m$. Поэтому при заданной вариации $\delta x(\cdot)$ получим

$$\tfrac{d}{d\varepsilon}\varphi_j\big(x^\circ(1) + \varepsilon\delta x(1)\big)|_{\varepsilon=0} = \varphi'_{jx}\big(x^\circ(1)\big)\delta x(1) \tag{19}$$

Теперь можно воспользоваться общими необходимыми условиями экстремума [1]. Согласно этим условиям, существуют такие числа $\lambda_0 \ge 0, \lambda_1 \ge 0,\cdots,\lambda_m \ge 0$, не все равные нулю, что

$$\lambda_0\tilde{T}'\big(x^\circ(\cdot),\delta x(\cdot)\big) + \textstyle\sum_{j=1}^m \lambda_j\,\varphi'_{jx}\big(x^\circ(1)\big)\delta x(1) \ge 0, \tag{20}$$

для всех вариаций траектории $x^\circ(\cdot)$ таких, что $\delta x(0) \in M_0 - x^\circ(0)$, $\delta x(\cdot) = x(\cdot) - x^\circ(\cdot)$, $x^\circ(\cdot)$ удовлетворяет уравнениям (1) для всех управлений из заданного множества U. Учитывая формулу (2), получаем

$$\delta x(t) = e^{At}\big(x_0 - x^\circ(0)\big) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\big(u(\tau) - u^0(\tau)\big)d\tau$$

После подстановки в (20) окончательно получаем соотношение

$$\begin{gathered}\Bigg[-\lambda_0 n(x^\circ(\cdot),t_1)e^{At_1} + \sum_{i=1}^m (n(x^\circ(\cdot),t_{2i+1})e^{At_{2i+1}} - n(x^\circ(\cdot),t_{2i})e^{At_{2i}}) +\\ + \textstyle\sum_{j=1}^m \lambda_j\,\varphi'_{jx}\big(x^\circ(1)\big)e^{A\cdot 1}\Bigg]\big(x_0 - x^\circ(0)\big) +\end{gathered} \tag{21}$$

$$+\int_0^1 \left\{ -\lambda_0 \left[n(x^\circ(\cdot),t_1)\sigma(t_1,\tau)e^{At_1} \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{m} [n(x^\circ(\cdot),t_{2i+1})\sigma(t_{2i+1},\tau)e^{At_{2i+1}} - n(x^\circ(\cdot),t_{2i})\sigma(t_{2i},\tau)e^{At_{2i}}] \right]$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, \varphi'_{jx}\big(x^\circ(1)\big)e^{A\cdot 1} \right\} e^{-A\tau}\tau \cdot B(u(\tau)-u^0(\tau))d\tau \geq 0,$$

где $u(\cdot) \in U$, $\sigma(t,\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \leq t, \\ 0, & \tau \geq t. \end{cases}$

Положим теперь

$$\psi(\tau) = \{-\lambda_0[n(x^\circ(\cdot),t_1)\sigma(t_1,\tau)e^{At_1} + \sum_{i=1}^{m}[n(x^\circ(\cdot),t_{2i+1})\sigma(t_{2i+1},\tau)e^{At_{2i+1}} - n(x^\circ(\cdot),t_{2i})\sigma(t_{2i},\tau)e^{At_{2i}}]] + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\, \varphi'_{jx}\big(x^\circ(1)\big)e^{A\cdot 1}\}\, e^{-A\tau}\tau \qquad (22)$$

В этих обозначениях соотношение (21) запишется в виде

$$\psi(0)\big(x_0 - x^\circ(0)\big) + \int_0^1 \psi(\tau)B(u(\tau)-u^0(\tau))d\tau \geq 0,$$
$$x_0 \in M_0, \quad u(\cdot) \in U. \qquad (23)$$

Так как x_0 и $u(\cdot)$ меняются независимо, то из (23) следует, что

$$\psi(0)\big(x_0 - x^\circ(0)\big) \geq 0, \quad x_0 \in M_0,$$
$$\int_0^1 \psi(\tau)B(u(\tau)-u^0(\tau))d\tau \geq 0, \quad u(\cdot) \in U.$$

Отсюда

$$\psi(0)\, x^\circ(0) = \min_{x_0 \in M_0}(\psi(0)x_0) \qquad (24)$$
$$\int_0^1 \psi(\tau)Bu^0(\tau))d\tau = \min_{u(\cdot)\in U}\int_0^1 \psi(\tau)Bu(\tau)d\tau \qquad (25)$$

Исследуем дифференциальные свойства функции $\psi(\tau)$. На отрезках $\tau \in (t_{2i}, t_{2i+1})$, $\tau \in (0, t_1)$ часть выражения (22) стоящая в фигурных скобках, постоянна, так что на этих отрезках поведение функции $\psi(\tau)$ определяется матрицей $e^{-A\tau}\tau$. Дифференцируя (22) по τ, получаем

$$\dot{\psi}(\tau) = -\psi(\tau)A, \quad \tau \in (t_{2i}, t_{2i+1}), \ \tau \in (0, t_1), \ i = 1, \cdots, m. \qquad (26)$$

Наконец формула (22) дает для $\tau = 1$

$$\psi(1) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\, \varphi'_{jx}\big(x^\circ(1)\big) \qquad (27)$$

На основе полученных результатов сформулируем необходимые условия оптимальности в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть $x^0(\cdot)$ и $u^0(\cdot)$ оптимальная траектория и соответствующее ей оптимальное управление в задаче (4) – (9). Если выполнены условие согласованности и, в точках входа в множество M, t_{2i}, $i = 1, 2, \cdots, m$ и выхода из него t_{2i-1}, $i = 1, 2, \cdots, m$, в течение которого выполняется включение $x(t)\epsilon M$ оптимальная траектория регулярна, то существует такие не все равные нулю числа $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, 2, \cdots, m$ и вектор функция $\psi(\tau)$, $\tau \in (0, t_1), \tau \in (t_{2i}, t_{2i-1})$, что имеют место соотношения (24) – (27).

Выводы

Рассматриваемая задача (4) – (9) для динамической системы управления (1) является задачей оптимального управления оптимизации времени нахождения объекта в заданной, стационарной области M.

Математическая формулировка поставленной задачи и примененный метод исследования, основанный на обобщении метода множителей Лагранжа [1] и теории

функционального анализа, в первую очередь теоремы о неявной функции и введением условия согласованности и регулярности относительно управлений и ограничение на траектории системы позволили получения качественные результаты исследований. Они выражены как необходимые условия оптимальности времени вывода области начального состояния и управления в форме принципа максимума Понтрягина. С помощью этих условий можно найти оптимальное управление и соответствующую оптимальную траекторию системы (1).

На основании полученных результатов предложим следующий алгоритм решения задачи (4) – (9):

1. Задание множество начальных, конечных состояний и область, которую должно минимизировать времени вывода объекта.
2. Проверка выполнений условий согласованности и регулярности относительно управлений и ограничение на траектории системы используя формулу (11).
3. При вариации оптимальной траектории получить оценку сверху критерии качества (17) по направлению $\delta x(\cdot)$ по формуле (18).
4. Получение дифференциальные свойства выбранного критерии качества (26) и (27).

Литература

1. Б.Н.Пшеничный, С.Очилов. О задаче оптимального прохождения через заданную область. Кибирнетика и вычисл. техника.- Киев: 1993.вып.99.-с.3-8.
2. Б.Н.Пшеничный. Необходимые условия экстремума. – М.: Наука 1982. -144 с.
3. Л.А.Люстерник., В.И.Соболев. Элементы функционального анализа. – М: Наука. 1965. – 520 с.
4. С.Очилов. О задаче оптимизации времени прохождения через область нелинейной системы., ТАТУ хабарлари, Вестник ТУИТ, TUIT Bulletin, 2/2008.
5. A.N.Shakhidze., S.Ochilov. The necessary conditions in special task speedy passage of area. European Applied Sciences. #12-2013.
6. С.Очилов. Об одной задаче оптимального управления с запаздыванием. Тез.докл.Респ.научн.конф. «Новые результаты математики и их приложения» Самарканд, 14-15 мая, 2018 г.

UDK 519.837.2

DOIRADA QUVISH MASALASIDA O'YINNI TUGATISH VAQTINI BAHOLASH

A.O.Zunnunov
O'zbekiston milliy universiteti
E-mail: zizu.zunnunov@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada tekislikdagi doirada sodda harakatli quvish masalaasi l-tutish ma'nosida qaralgan. O'yinni chekli vaqtda nihoyasiga yetkazishni ta'minlovchi bo'lakli o'zgarmas quvish boshqaruvini qurish strukturasi tahlil qilingan. O'yinni nihoyasiga yetkazish vaqti uchun yuqoridan baho olingan.

Kalit so'zlar: quvish, quvuvchi, qochuvchi, quvuvchi boshqaruvi, qochuvchi boshqaruvi.

Оценка времени завершения в игре преследования на круге

Аннотация. В статье рассматриваются задача преследования с простыми движениями в смысле l-поимки на плоскости в круге. Предложена структура построение кусочно постоянных управлений преследования которая обеспечить завершение игры за конечное время. Получена оценка сверху время игры для завершения преследования.

Ключевые слова: преследование, преследующий, убегающий, управление преследования, управление **убегания**.

ESTIMATED COMPLETION TIME OF PROSECUTING IN THE GAME

Abstract. The article deals with the pursuit problem with simple motions in the sense of l-capture on a plane in a circle. A structure is proposed for constructing piecewise constant persecution directorates which will ensure the completion of the game in a finite time. Established a score above the time of the game to complete the pursuit.

Keywords: pursuit, pursuer, evader, pursuit control, evasion control

Tekislikda r – radiusli D doirada bitta qochuvchi x_0 va bitta quvuvchi x_1 ob'yektlardan iborat "quvish-qochish" masalasini qaraylik. Ularning harakati quyidagicha sodda differensial tenglamalar bilan berilgan bo'lsin

$$\dot{x}_0 = u_0, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \end{pmatrix}; \quad \dot{x}_1 = u_1, \quad x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Umumiylikka zarar yetkazmagan holda shuni aytishimiz joizki, qochuvchi hamda quvuvchilarning $x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}$ va $x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$ koordinatalari biz keyinchalik kiritadigan x^1 va x^2 o'qlardan iborat koordinatalar sistemasi orqali aniqlanadi. Bu yerda u_0 *va* u_1 lar boshqariluvchi parametrlar bo'lib, u_0 –qochuvchi, u_1 –quvuvchi ob'yektlarini boshqaruv parametrlari va ular $u_0 \equiv u_0(t),\ u_1 \equiv u_1(t)$ - o'lchovli funksiya ko'rinishida tanlanadi. Ularning qiymatlari deyarli barcha $t \geq 0$ larda quyidagi cheklovlarni qanoatlantiradi

$$\|u_0\| \leq 1,\ \|u_1\| \leq 1. \tag{2}$$

Bu yerda $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ - $z \in R^2$ dagi oddiy norma, $\langle z, z \rangle$ - skalyar ko'paytma.

Aytib o'tganimizdek r-radiusli doirada x_1 nuqta x_0 nuqtani quvlamoqda. Agar qandaydir chekli vaqt mobaynida ushbu $\|x_1 - x_0\| \leq l,\ l > 0$ (bu yerda l oldindan berilgan son) shart bajarilsa, quvish nihoyasiga yetgan hisoblanadi. Bu holda o'yin l-tutish ma'nosida tugatilgan deyiladi. Quvuvchi- x_1 o'z boshqaruvi yordamida tezroq $\|x_1 - x_0\| \leq l$ shart bajarilishini ta'minlashga harakat qiladi, qochuvchi- x_0 esa o'z boshqaruvi yordamida iloji boricha ko'proq vaqt ushbu shart bajarilmasligini ta'minlashga harakat qiladi.

Differensial o'yinlarga juda ko'p tadqiqotchilarning ishlari bag'ishlangan [1-13]. Differensial o'yinni ta'riflanishi, turli masalalari [1] ishda ko'rilgan, [2] ishda chiziqli differensial o'yinlarda umumiy holda quvish masalasini yechish uchun yetarli shartlar olingan. [3] ish [2] ishni ko'p quvuvchili o'yinlarga umumlashtirishga bag'ishlangan. [4]-[13] ishlar esa sodda differensial o'yinlarga bag'ishlangan. [9] ishda kompaktda sodda quvish-qochish masalasi o'rganilgan. Unda quvuvchilar soni fazo o'lchovi n dan bitta kam, $n-1$ ta bo'lsa qochuvchi quvuvvchilardan kompaktdan chiqib ketmasdan istalgancha vaqt qochib yura olishi, agar quvuvchilar soni n ta bo'lsa ular qochuvchini ustma-ust tushish ma'nosida ushlab olishi isbotlangan. [13] ishda esa tekislikda birlik kvadratda bitta qochuvchi va bitta quvuvchi ishtirokida l-tutish ma'nosida quvish o'rganilgan va o'yinni nihoyasiga yetkazish vaqti uchun yuqoridan baho olingan..

Ushbu ishda tekislikda $(n=2)$ doirada bitta qochuvchi va bitta quvuvchi ishtirokidagi quvish masalasi o'rganildi. Aytib o'tganimizdek [9] ishdan ushbu xususiy holda ustma-ust tushish ma'nosida qochuvchi istalgancha vaqt kvadratdan chiqmasdan quvuvchidan qochib yura olishi kelib chiqadi. Biz ushbu holda l- tutish ma'nosida quuvuvchi o'yinni chekli vaqtda yakunlay olishini doira misolida isbotlaymiz.

1-Teorema. Aytaylik tekislikda $D = \left\{ \left(x^1, x^2\right) : \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 \leq r^2,\ r > 0 \right\}$, r radiusli doirada (1), (2) ko'rinishidagi "quvish-qochish" masalasi qaralayotgan bo'lsin. U holda quvuvchi o'yinni

$$T(l) = \left(\left[\frac{4(r-l)}{l} \right] + 1 \right) \cdot \frac{l}{4} + \sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4} \right) + 2r \tag{3}$$

vaqt oralig'ida nihoyasiga yetkazadi.

Bu yerda $t_2\left(i\frac{l}{4} \right) = 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{il}{4} \right)^2}$, n - x^2 koordinata bo'ylab siljishlar sonidir. Agar $\frac{4(r-l)}{l}$ 0 yoki natural son bo'lsa, $n = \frac{4(r-l)}{l}$ ga teng bo'ladi. Agar $\frac{4(r-l)}{l}$ kasr son bo'lsa, u holda $n = \left[\frac{4(r-l)}{l} \right] + 1$ ga teng bo'ladi. l masala shartida berilgan musbat son, $[m]$ - m sonining butun qismi.

Isbot. A. Masalaning shartiga ko'ra qochuvchi-x_0 va quvuvchi-x_1 ikki o'lchamli fazoda D doirada harakatlanmoqda, ularning maksimal tezliklari teng. O'yin boshida quvuvchi doiraning qaysi nuqtasida joylashganidan qat'iy nazar, quvuvchi joylashgan nuqta va doira markazi orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq doira diametri bo'ylab o'tadi va doirani teng ikki bo'lakka ajratadi. Endi doira

markazidan shu o'tkazilgan diametrga ustma-ust holatda x^1 va shu markazdan diametrga perpendikulyar tarzda x^2 koordinata o'qlarini joylashtiramiz, u holda quvuvchi x^1 koordinata o'qining ustida turgan bo'ladi.

Ushbu holatda quvuvchi va qochuvchining x^1 koordinatalari orasida quyidagi uchta hol ro'y berishi mumkin:

$$1)\quad x_1^1 = x_0^1, \qquad 2)\quad x_1^1 < x_0^1, \qquad 3)\quad x_1^1 > x_0^1. \tag{4}$$

Birinchi holda quvuvchi qochuvchi tomon x^2 koordinata bo'ylab $\tilde{u}_1(t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1^1(t) \\ \tilde{u}_1^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\left(\text{yoki } \tilde{u}_1(t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1^1(t) \\ \tilde{u}_1^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ boshqaruvni qo'llab $\frac{l}{4}$ masofaga siljiydi. Bunday boshqaruvda quvuvchi x_1 nuqtaning harakat tenglamasi

$$\dot{x}_1 = \tilde{u}_1(t) \tag{5}$$

ko'rinishda bo'ladi, endi $x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$ va $\tilde{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (yoki $\tilde{u}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$)ekanligini inobatga olsak (5) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\text{yoki } \begin{pmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \tag{6}$$

(6) tenglamani $x_1^1(0) = x_1^1$; $x_1^2(0) = 0$ boshlang'ich shartda yechib

$$\begin{cases} x_1^1(t) = x_1^1(0) + \int_0^t 0 d\tau = x_1^1, \\ x_1^2(t) = x_1^2(0) + \int_0^t d\tau = t, \end{cases} \qquad \left(\text{yoki} \begin{cases} x_1^1(t) = x_1^1(0) + \int_0^t 0 d\tau = x_1^1, \\ x_1^2(t) = x_1^2(0) + \int_0^t (-1) d\tau = -t, \end{cases} \right) \tag{7}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Xuddi shu paytda x_0 nuqtaning $\tilde{u}_0(t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0^1(t) \\ \tilde{u}_0^2(t) \end{pmatrix}$ (umuman olganda quvuvchi o'yinchiga ma'lum bo'lmagan) boshqaruvi bilan harakat tenglamasi

$$\dot{x}_0 = \tilde{u}_0(t) \tag{8}$$

ko'rinishda bo'ladi. x_0 va $\tilde{u}_0(t)$ lar ko'rinishini inobatga olsak (8) ning yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\begin{cases} x_0^1(t) = x_0^1(0) + \int_0^t \tilde{u}_0^1(\tau) d\tau, \\ x_0^2(t) = x_0^2(0) + \int_0^t \tilde{u}_0^2(\tau) d\tau. \end{cases} \tag{9}$$

Ikkinchi holatda quvuvchi x^1 koordinata musbat yo'nalishida $\tilde{\tilde{u}}_1(t) = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}_1^1(t) \\ \tilde{\tilde{u}}_1^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ boshqaruvni qo'llab harakatlana boshlaydi. Bunday boshqaruvda quvuvchi x_1 nuqtaning harakat tenglamasi (5) ko'rinishda bo'ladi

$$\dot{x}_1 = \tilde{\tilde{u}}_1(t) \tag{10}$$

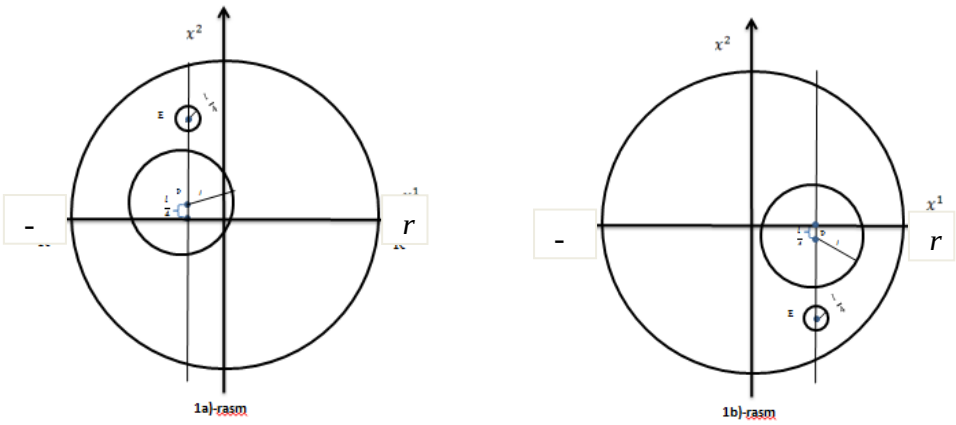
Agar x_1 va $\tilde{\tilde{u}}_1$ lar ko'rinishini, $x_1^1(0)=x_1^1$; $x_1^2(0)=0$ larni inobatga olsak (10) ning yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{11}$$

$$\begin{cases} x_1^1(\mathrm{t}) = x_1^1(0) + \int_0^t d\tau = x_1^1 + \mathrm{t}, \\ x_1^2(\mathrm{t}) = x_1^2(0) + \int_0^t 0 d\tau = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Bu paytda qochuvchi x_0 nuqtaning harakati (9) ko'rinishda bo'ladi.

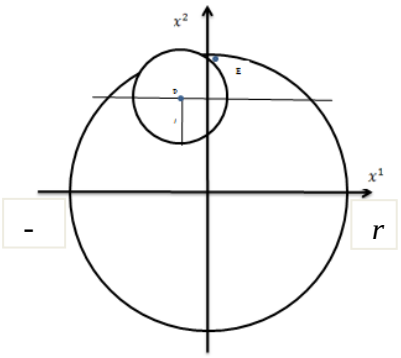
Ma'lum vaqtdan keyin qochuvchi va quvuvchining x^1 koordinatalari ustma-ust tushadi. Bu esa 1-holat deganidir. Demak, quvuvchining keyingi harakati 1-holatdagidek bo'ladi. Ya'ni quvuvchi qochuvchi tomon x^2 koordinata yo'nalishi bo'ylab $\tilde{u}_1(\mathrm{t})$ boshqaruvni qo'llab $\frac{l}{4}$ masofaga siljiydi. Uchinchi holatda quvuvchi x^1 koordinata yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda $\tilde{\tilde{u}}_1(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}_1^1 \\ \tilde{\tilde{u}}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ boshqaruvni qo'llab harakatlana boshlaydi. Ma'lum vaqtdan keyin qochuvchi va quvuvchining x^1 koordinatalari ustma-ust tushadi. Bu esa yana 1-holat deganidir. Quvuvchi qochuvchi tomon x^2 koordinata yo'nalishi bo'ylab $\tilde{u}_1(\mathrm{t})$ boshqaruvni qo'llab $\frac{l}{4}$ masofaga yaqinlashadi va qochuvchining qaysi tomonda joylashganiga qarab, x^1 koordinata bo'ylab ta'qibni xuddi yuqoridagidek davom ettiradi.



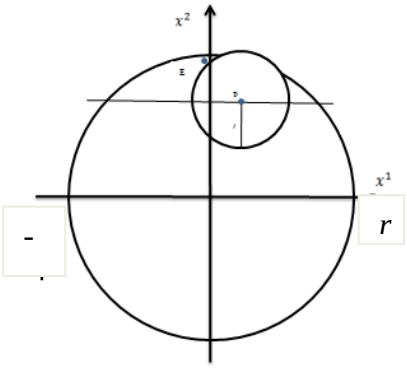
1a)-rasm 1b)-rasm

Ko'rib turganimizdek (1a)-rasm, 1b)-rasm) har uchala holatda ham o'yinchilarni x^1 koordinatalari ustma-ust tushgan va quvuvchini x^2 koordinatasi qochuvchini x^2 koordinatasidan kichik (katta) bo'lganda, quvuvchi qochuvchi turgan nuqtaga qarab x^2 o'q yo'nalishida $\frac{l}{4}$ masofaga siljiydi, mana shu paytda qochuvchi quvuvchini aylanib o'tib x^2 koordinatasini quvuvchining x^2 koordinatasidan kichik (katta) qila olmasligini ko'rsatamiz. Quvuvchining bunday harakati ($\frac{l}{4}$ –vaqt) davomida (7) ga ko'ra qochuvchi o'z holatidan $\frac{l}{4}$ masofaga uzoqlasha oladi, chunki $\|u_0\| \le 1$. U quvuvchini aylanib o'tishi uchun x^1 yo'nalishida kamida l masofa yurishi kerak. Buni esa iloji yo'q, chunki qochuvchi maksimal $\frac{l}{4}$ masofaga yura oladi va shu bilan birga quvuvchining l atrofiga tushmasligi kerak (8),(9). Shunday qilib qochuvchi quvuvchini aylanib o'ta olmaydi. Demak yuqorida qurilgan jarayonni istalgancha davom ettirish mumkin. Va ma'lum vaqtda quvuvchi hamda qochuvchilarning x^1 koordinatalari ustma-ust tushgan holatlar soni $\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1$ ga yetadi. Bu degani endi quvuvchini x^2 koordinata bo'ylab qochuvchi tomon $\frac{l}{4}$ masofaga yurishini hojati yo'q, chunki buni

ilojisi ham yo'q aks holda u kvadratdan tashqariga chiqib ketadi, bu esa o'yin shartiga zid. Shunday qilib quyidagi ikki holatdan biri 2a)-rasm yoki 2b)-rasm ro'y beradi.



2a)-rasm



2b)-rasm

2a)-rasmdagi holatdan quvuvchi nuqta x^1 o'qi musbat yo'nalishi bo'ylab $\tilde{\tilde{u}}_1(t)$ boshqaruvni qo'llab 1 tezlik bilan harakat qiladi (10),(11) va ko'pi bilan $t_2\left(n\frac{l}{4}\right)$ vaqtda o'yinni nihoyasiga yetkazadi. 2b)-rasmdagi holatdan quvuvchi nuqta x^1 o'qi manfiy yo'nalishi bo'ylab $\tilde{\tilde{\tilde{u}}}_1(t)$ boshqaruvni qo'llab 1 tezlik bilan harakat qiladi va ko'pi bilan $t_2\left(n\frac{l}{4}\right)$ vaqtda o'yinni nihoyasiga yetkazadi (12). Shunday qilib quvuvchi o'yinni qochuvchi o'z boshqaruvini qanday qurishiga qaramasdan chekli vaqtda nihoyasiga yetkazish mumkinligini isbotladik.

Bu yerda quvuvchi o'z boshqaruvini qurishda, qochuvchi boshqaruvidan foydalangani yo'q, u qochuvchining ma'lum vaqtlardagi holatidan foydalanayapdi holos. Bu amaliy masalalarni yechishda juda muhim parametr hisoblanadi.

Bundan keyingi bandlarda o'yinni tugatish vaqtini baholash bilan shug'ullanamiz.

B. a) Agar quvuvchi o'yin boshida doira chegarasida x^1 koordinata o'qida joylashgan bo'lsa, (4) ning 1-holi ro'y beradi. Quvuvchi qochuvchini l atrofiga tushurishi uchun $T(l)=T_1(l)+T_2(l)$ dan ko'p bo'lmagan vaqt talab etilishini isbotlaymiz. Bu yerda $T_1(l)$ - quvuvchining qochuvchini tutish uchun x^2 koordinata bo'ylab ta'qib jarayonidagi sarflagan vaqti. $T_2(l)$ - esa quvuvchining qochuvchini tutish uchun x^1 koordinata bo'ylab ta'qib jarayonidagi sarflagan vaqtlar yig'indisi. $T_1(l)$ va $T_2(l)$ vaqtlarni hisoblaymiz.

$T_1(l)$ ***ni hisoblash.*** Quvuvchi l atrof bilan x^1 koordinata ustida turibdi. Ana shu l atrof bilan x^2 koordinata bo'ylab r radiusli doirani to'la qoplash uchun $\frac{l}{4}$ masofadan necha marta siljishi kerakligini hisoblaymiz. Buning uchun qolgan *(r-l)* masofani $\frac{l}{4}$ ga bo'lsak, $\frac{(r-l)}{l/4}=\frac{4(r-l)}{l}$ siljishlar soni kelib chiqadi. Agar $\frac{4(r-l)}{l}$ 0 yoki natural son bo'lsa, $\frac{4(r-l)}{l}$ ta siljish kerak bo'ladi. Agar $\frac{4(r-l)}{l}$ kasr son bo'lsa, u holda $\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1$ ta siljish kerak bo'ladi. Har bir siljish uchun ketgan vaqt $\frac{l}{4}$ ga tengligini hisobga olsak, x^2 koordinata bo'ylab ta'qib jarayonida sarflangan vaqt mos ravishda $T_1(l)=\left(\frac{4(r-l)}{l}\right)\frac{l}{4}=(r-l)$ yoki $T_1(l)=\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\frac{l}{4}$ dan ko'p bo'lmaydi:

$$T_1(l)=\begin{cases} r-l & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-0\ yoki\ natural\ son\ bo'lsa, \\ \left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\frac{l}{4} & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-kasr\ son\ bo'lsa. \end{cases} \quad (13)$$

$T_2(l)$ ***ni hisoblash.*** $T_2(l)$ ni $T_2(l)=t_2(0)+t_2\left(\frac{l}{4}\right)+...+t_2\left((n-1)\frac{l}{4}\right)+t_2\left(n\frac{l}{4}\right)=\sum_{i=0}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)$ ko'rinishida yozib olamiz. Bu yerda n x^2 koordinata bo'ylab siljishlar sonidir. Aytib o'tilganidek agar $\frac{4(r-l)}{l}$ 0 yoki natural son bo'lsa, $n=\frac{4(r-l)}{l}$ ga teng bo'ladi. Agar $\frac{4(r-l)}{l}$ kasr son bo'lsa, u holda $n=\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1$ ga teng bo'ladi. Shuningdek $t_2\left(i\frac{l}{4}\right)-\left(i=\overline{0,n}\right)$ quvuvchining qochuvchini tutish uchun *i*- siljishda x^1 koordinata bo'ylab ta'qib jarayonidagi sarflagan vaqti. Demak $t_2(0)$ - quvuvchi va qochuvchining x^1 koordinatalari birinchi marta ustma-ust tushguncha ketgan vaqt bo'lib, u quvuvchi turgan $-x^1(0)$ nuqtadan diametr bo'ylab doira chegarasidagi $x^1(0)$ nuqtagacha bo'lgan masofani bosib o'tish uchun ketgan vaqtdan ko'p bo'lmaydi, ya'ni $t_2(0)=x^1(0)-\left(-x^1(0)\right)=2x^1(0)$ dan ko'p bo'lmagan vaqt kerak bo'ladi, $\left(x^1(0)\right)^2+\left(x^2(0)\right)^2=r^2$ bo'lgani uchun $x^1(0)=\sqrt{r^2-\left(x^2(0)\right)^2}$, $x^2(0)=0$ ekanligidan $x^1(0)=r$ kelib chiqadi. Demak $t_2(0)$ uchun $t_2(0)=2x^1(0)=2r$ dan ko'p bo'lmagan vaqt kerak bo'lar ekan.

Quvuvchi va qochuvchining x^1 koordinatalari birinchi marta ustma-ust tushguncha qochuvchi doiraning birinchi bo'lagidan ikkinchi bo'lagiga, ikkinchi bo'lagidan esa birinchi bo'lagiga bir necha marta o'tishi mumkin. Ammo x^1 koordinatalar birinchi marta ustma-ust tushgandan keyin qochuvchi doiraning qaysi bo'lagida joylashgan bo'lsa, shu bo'lakdan keyingi bo'lakka o'ta olmaydi. Quvuvchi va qochuvchining x^1 koordinatalari birinchi marta ustma-ust tushgandan keyin quvuvchi qochuvchini doiraning qaysi bo'lagida joylashganiga qarab x^2 koordinata bo'ylab $\frac{l}{4}$ masofaga siljiydi. Bu birinchi siljishda quvuvchi x^2 koordinata bo'ylab $x^2\left(\frac{l}{4}\right)=x^2(0)\pm\frac{l}{4}$ nuqtaga siljiydi. O'z navbatida x^1 koordinatadagi $x^1\left(\frac{l}{4}\right)$ nuqta esa $x^1\left(\frac{l}{4}\right)=\sqrt{r^2-\left(x^2(0)\pm\frac{l}{4}\right)^2}$ ko'rinishda va $x^2(0)=0$ ekanligini inobatga olsak $x^1\left(\frac{l}{4}\right)=\sqrt{r^2-\left(\pm\frac{l}{4}\right)^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}$ ko'rinishda bo'ladi. Bundan $t_2\left(\frac{l}{4}\right)$ quvuvchining qochuvchini tutish uchun birinchi siljishdan so'ng x^1 koordinatalari ustma-ust tushguncha sarflagan vaqti $t_2\left(\frac{l}{4}\right)=2x^1\left(\frac{l}{4}\right)=2\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}$ dan oshmaydi. Umuman olganda *i*-siljishda quvuvchi x^2 koordinataning $x^2\left(i\frac{l}{4}\right)=\pm\frac{il}{4}$ nuqtaga keladi, $x^1\left(i\frac{l}{4}\right)$ nuqta esa $x^1\left(i\frac{l}{4}\right)=\sqrt{r^2-\left(\frac{il}{4}\right)^2}$ ga teng bo'ladi. Bundan $t_2\left(i\frac{l}{4}\right)=2x^1\left(i\frac{l}{4}\right)=2\sqrt{r^2-\left(\frac{il}{4}\right)^2}$ dan oshmagan vaqtga teng ekanligi kelib chiqadi.

Umumiy holda x^1 koordinata bo'ylab ta'qib jarayoni $T_2(l)$ uchun

$$T_2(l)=\sum_{i=1}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2r \tag{14}$$

dan oshmagan vaqt sarf bo'ladi.

Shunday qilib o'yinni nihoyasiga yetkazish vaqti uchun (13),(14) quyidagi baholashga ega bo'ldik

$$T(l)=\begin{cases} \mathrm{r}-l+\sum_{i=1}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2r & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-0\ yoki\ natural\ son\ bo'lsa, \\ \left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\sum_{i=1}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2r & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-kasr\ son\ bo'lsa. \end{cases} \tag{15}$$

Umumiy holda (15) o'yinni

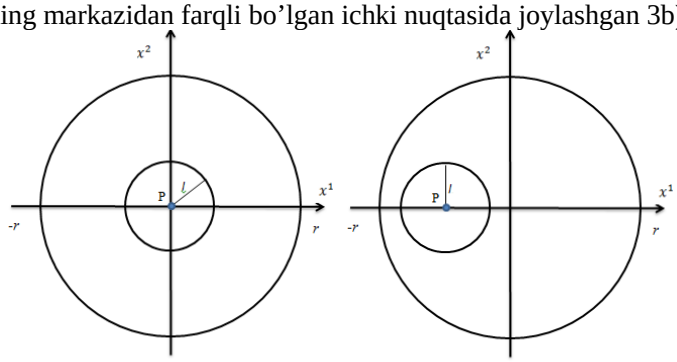
$$T(l)=\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\sum_{i=1}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2r \qquad (16)$$

dan ko'p bo'lmagan vaqtda nihoyasiga yetkazish mumkin ekan.

Agar quvuvchi o'yin boshida **a)** holdagidek emas, ya'ni doiraning chegarasida emas, balki uning ichida joylashgan bo'lsin. Bunda ikkita hol ro'y berishi mumkin:

b) Quvuvchi doira markazida joylashgan 3a)-rasm;

c) Quvuvchi doiraning markazidan farqli bo'lgan ichki nuqtasida joylashgan 3b)-rasm.



3a)-rasm 3b)-rasm

b) va c) hollarda x^1 va x^2 koordinata o'qlarini **A.** qismda aytib o'tganimizdek joylashtiramiz. U holda quvuvchi va qochuvchining x^1 koordinatalari o'rtasida (4) dagi uch holatdan biri ro'y beradi. Bu hollar uchun $T(l)=T_1(l)+T_2(l)$ni hisoblaymiz.

b) va c) holatlar uchun $T_1(l)$ ni hisoblaylik. Bu holatlarda (4) dagi 1)-3)-lar uchun $T_1(l)$ **B.** qismning **a)** bandidagi kabi $T_1(l)=(r-l)$ yoki $T_1(l)=\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\frac{l}{4}$dan ko'p bo'lmagan vaqt sarflanadi(15).

b) banddagi holat uchun $T_2(l)=\sum_{i=1}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)$ ni hisoblaylik. Bu holatda (4) ning 1-holi uchun $t_2(0)=0$ ga teng bo'ladi. $t_2\left(\frac{l}{4}\right)$ uchun esa $t_2\left(\frac{l}{4}\right)=\frac{2x^1\left(\frac{l}{4}\right)}{2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}$ dan ko'p bo'lmagan vaqt sarf bo'ladi. Qolgan $t_2\left(i\frac{l}{4}\right)$ lar $\left(i=\overline{2,n}\right)$ a) banddagi kabi topiladi. Demak bu holda $T_2(l)$ uchun $T_2(l)=\sum_{i=2}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}$ dan ko'p bo'lmagan vaqt talab etiladi. (4) ning 2- va 3-hollarida $T_2(l)$ ning tarkibidagi $t_2(0)$ uchun $t_2(0)=r$ dan ko'p bo'lmagan vaqt kerak bo'ladi. Qolgan $t_2\left(i\frac{l}{4}\right)$ lar $\left(i=\overline{1,n}\right)$ a) banddagi kabi topiladi. Demak bu 2- va 3- hollarda $T_2(l)$ uchun $T_2(l)=\sum_{i=1}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+r$ dan ko'p bo'lmagan vaqt talab etiladi. Umumiy holda b) banddagi holatda $T_2(l)$ uchun $\sum_{i=2}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}<\sum_{i=1}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+r$ ekanini inobatga olsak, u holda $T_2(l)$ uchun $T_2(l)=\sum_{i=1}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+r$ dan ko'p bo'lmagan vaqt sarflanadi. Demak **b)** banddagi holatda o'yinni

$$T(l)=\begin{cases} \mathrm{r}-l+\sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+r & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-0\ yoki\ natural\ son\ bo'lsa, \\ \left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+r & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-kasr\ son\ bo'lsa. \end{cases} \quad (17)$$

dan ko'p bo'lmagan vaqtda nihoyasiga yetkazish mumkin ekan.

Endi c) banddagi holat uchun $T_2(l)=\sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)$ ni hisoblaylik. c) banddagi holatda (4) ning 1-holi uchun $t_2(0)=0$ ga teng bo'ladi. $t_2\left(\frac{l}{4}\right)$ uchun esa $t_2\left(\frac{l}{4}\right)<\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}$ yoki $\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}<t_2\left(\frac{l}{4}\right)<2\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}$ bo'lgan vaqt sarf bo'ladi. Qolgan $t_2\left(i\frac{l}{4}\right)$ lar $\left(i=\overline{2,n}\right)$ a) banddagi kabi topiladi. Demak bu holda $T_2(l)$ uchun $T_2(l)=\sum_{i=2}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}$ yoki $T_2(l)=\sum_{i=2}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}$ dan ko'p bo'lmagan vaqt talab etiladi. (4) ning 2- va 3-hollarida $T_2(l)$ ning tarkibidagi $t_2(0)$ uchun $t_2(0)<r$ yoki $r<t_2(0)<2r$ bo'lgan vaqt kerak bo'ladi. Qolgan $t_2\left(i\frac{l}{4}\right)$ lar $\left(i=\overline{1,n}\right)$ a) banddagi kabi topiladi. Demak bu 2- va 3- hollarda $T_2(l)$ uchun $T_2(l)=\sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+r$ yoki $T_2(l)=\sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2r$ lardan ko'p bo'lmagan vaqt talab etiladi. Umumiy holda c) banddagi holatda $T_2(l)$ uchun $\sum_{i=2}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}<\sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2r$ ekanini inobatga olsak, u holda $T_2(l)$ uchun $T_2(l)=\sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2r$ dan ko'p bo'lmagan vaqt sarflanadi. Demak **c)** banddagi holatda o'yinni

$$T(l)=\begin{cases} \mathrm{r}-l+\sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2r & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-0\ yoki\ natural\ son\ bo'lsa, \\ \left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2r & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-kasr\ son\ bo'lsa. \end{cases} \quad (18)$$

dan ko'p bo'lmagan vaqtda nihoyasiga yetkazish mumkin ekan.

Shunday qilib, umumiy holda a),b) va c) holatlarda o'yinni nihoyasiga yetkazish vaqti (15), (17), (18) uchun quyidagi vaqt yetarli bo'ladi

$$T(l)=\begin{cases} \mathrm{r}-l+\sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2\mathrm{r} & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-0\ yoki\ natural\ son\ bo'lsa, \\ \left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2r & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-kasr\ son\ bo'lsa. \end{cases} \quad (19)$$

Umumiy holda (19) quvuvchi o'yinni

$$T(l)=\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\sum_{i=1}^{n} t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2r \quad (20)$$

dan ko'p bo'lmagan vaqt oralig'ida nihoyasiga yetkazish mumkin. Shunday qilib teorema isbotlandi.

Endi esa 1-teoremada keltirilgan doiradagi quvish vaqti uchun yuqoridan olingan $T(l)$ bahoni $T'(l)$ qadar yaxshilash bilan shug'ullanamiz.

2-Teorema. Aytaylik tekislikda $D=\left\{\left(x^1,x^2\right):\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2\le r^2,\ \mathrm{r}>0\right\}$, r radiusli doirada (1), (2) ko'rinishidagi "quvish-qochish" masalasi qaralayotgan bo'lsin. U holda quvuvchining o'yinni nihoyasiga yetkazish vaqtini

$$T'(l)=\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\sum_{i=1}^{n}t_2\left((i+3)\frac{l}{4}\right)+\frac{t_2\left((n+3)\frac{l}{4}\right)}{2}+r \tag{21}$$

qadar yaxshilash mumkin.

Shu o'rinda $T'(l)<T(l)$ ekanligini isbotlaylik. Teskarsidan faraz qilaylik $T'(l)>T(l)$ bo'lsin. Ya'ni

$$\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\sum_{i=1}^{n}t_2\left((i+3)\frac{l}{4}\right)+\frac{t_2\left((n+3)\frac{l}{4}\right)}{2}+r>\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\sum_{i=1}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+2r$$

$$\sum_{i=1}^{n}t_2\left((i+3)\frac{l}{4}\right)+\frac{t_2\left((n+3)\frac{l}{4}\right)}{2}>\sum_{i=1}^{n}t_2\left(i\frac{l}{4}\right)+r$$

Yig'indilarni qo'shiluvchilar shaklida yozib chiqsak, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$t_2\left(4\frac{l}{4}\right)+t_2\left(5\frac{l}{4}\right)+t_2\left(6\frac{l}{4}\right)+t_2\left(7\frac{l}{4}\right)+\ldots+t_2\left((n-1)\frac{l}{4}\right)+t_2\left(n\frac{l}{4}\right)+t_2\left((n+1)\frac{l}{4}\right)+t_2\left((n+2)\frac{l}{4}\right)+$$

$$+t_2\left((i+3)\frac{l}{4}\right)+\frac{t_2\left((n+3)\frac{l}{4}\right)}{2}>t_2\left(\frac{l}{4}\right)+t_2\left(2\frac{l}{4}\right)+t_2\left(3\frac{l}{4}\right)+t_2\left(4\frac{l}{4}\right)+\ldots+t_2\left((n-4)\frac{l}{4}\right)+$$

$$+t_2\left((n-3)\frac{l}{4}\right)+t_2\left((n-2)\frac{l}{4}\right)+t_2\left((n-1)\frac{l}{4}\right)+t_2\left(n\frac{l}{4}\right)+r$$

Bu yerdan tengsizlikni har ikkala tomonini qisqartirsak, quyidagi holatga keladi.

$$t_2\left((n+1)\frac{l}{4}\right)+t_2\left((n+2)\frac{l}{4}\right)+t_2\left((n+3)\frac{l}{4}\right)+\frac{t_2\left((n+3)\frac{l}{4}\right)}{2}>t_2\left(\frac{l}{4}\right)+t_2\left(2\frac{l}{4}\right)+t_2\left(3\frac{l}{4}\right)+r$$

Bu yerda $t_2\left(i\frac{l}{4}\right)=2\sqrt{r^2-\left(\frac{il}{4}\right)^2}$ ekanligini inobatga olsak

$$t_2\left((n+3)\frac{l}{4}\right)<t_2\left((n+2)\frac{l}{4}\right)<t_2\left((n+1)\frac{l}{4}\right)<t_2\left(3\frac{l}{4}\right)<t_2\left(2\frac{l}{4}\right)<t_2\left(\frac{l}{4}\right)\ \text{ va }\ \frac{t_2\left((n+3)\frac{l}{4}\right)}{2}<r$$

ekanligini inobatga olsak, biz qilgan $T'(l)>T(l)$ farazimiz noto'g'ri ekanligi kelib chiqadi. Demak $T'(l)<T(l)$ ekanligi isbotlandi.

Isbot. C. Ushbu 2-teorema uchun ham quvuvchining boshqaruvi A. qismda keltirilgani kabi quriladi. Quvuvchining bunday harakatlari davomida qochuvchi quvuvchini aylanib o'ta olmasligi va quvuvchi o'yinni qochuvchi o'z boshqaruvini qanday qurishiga qaramasdan chekli vaqtda nihoyasiga yetkazishi mumkinligini yuqorida keltirgan edik.

Endi o'yinni tugatish vaqti uchun olingan $T(l)$ bahoni $T'(l)$ qadar qisqartirish mumkin ekanligini ko'rsatamiz.

a) Agar quvuvchi o'yin boshida doira chegarasida x^1 koordinata o'qida joylashgan bo'lsa, (4) ning 1-holi ro'y beradi. Quvuvchi qochuvchini l atrofiga tushurishi uchun $T'(l)=T_1'(l)+T_2'(l)$ dan ko'p bo'lmagan vaqt talab etilishini isbotlaymiz. Bu yerda $T_1'(l)$ - quvuvchining qochuvchini tutish uchun x^2 koordinata bo'ylab ta'qib jarayonidagi sarflagan vaqti. $T_2'(l)$ - esa quvuvchining qochuvchini tutish uchun

x^1 koordinata bo'ylab ta'qib jarayonidagi sarflagan vaqtlar yig'indisi. $T_1'(l)$ va $T_2'(l)$ vaqtlarni hisoblaymiz.

$T_1'(l)$ ***ni hisoblash.*** Quvuvchining qochuvchini tutish uchun x^2 koordinata bo'ylab ta'qib jarayonida sarflangan vaqti $T_1'(l)$ **B.** qismning **a)** bandidagi kabi topiladi. Ya'ni $T_1'(l)=T_1(l)$ vaqtdan ko'p bo'lmaydi:

$$T_1'(l)=\begin{cases} \mathrm{r}-l & agar\ \dfrac{4(r-l)}{l}-0\ yoki\ natural\ son\ bo'lsa, \\ \left(\left[\dfrac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\dfrac{l}{4} & agar\ \dfrac{4(r-l)}{l}-kasr\ son\ bo'lsa. \end{cases} \tag{22}$$

$T_2'(l)$ ***ni hisoblash.*** $T_2'(l)$ ni $T_2'(l)=t_2'(0)+t_2'\left(\frac{l}{4}\right)+...+t_2'\left((n-1)\frac{l}{4}\right)+t_2'\left(n\frac{l}{4}\right)=\sum_{i=0}^{n}t_2'\left(i\frac{l}{4}\right)$ ko'rinishida yozib olamiz. Bu yerda n x^2 koordinata bo'ylab siljishlar sonidir. Aytib o'tilganidek agar $\frac{4(r-l)}{l}$ 0 yoki natural son bo'lsa, $n=\frac{4(r-l)}{l}$ ga teng bo'ladi. Agar $\frac{4(r-l)}{l}$ kasr son bo'lsa, u holda $n=\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1$ ga teng bo'ladi. Shuningdek $t_2'\left(i\frac{l}{4}\right)-\left(i=\overline{0,n}\right)$ *i*-siljishda quvuvchi va qochuvchining x^1 koordinatalari ustma-ust tushishi uchun sarf etilishi mumkin bo'lgan maksimal vaqt.

Bu $t_2'\left(i\frac{l}{4}\right)-\left(i=\overline{0,n}\right)$ larni hisoblashimiz uchun bizga $t_2\left(i\frac{l}{4}\right)-\left(i=\overline{0,n}\right)$ lar kerak bo'ladi. Bu yerda $t_2\left(i\frac{l}{4}\right)-\left(i=\overline{0,n}\right)$ quvuvchining qochuvchini tutish uchun *i*- siljishda x^1 koordinata bo'ylab bosib o'tishi mumkin bo'lgan masofa uchun sarf etilgan vaqti. $t_2\left(i\frac{l}{4}\right)-\left(i=\overline{0,n}\right)$ lar **B.** qismning **a)** bandida hisoblangan bo'lib, $t_2\left(i\frac{l}{4}\right)=2x^1\left(i\frac{l}{4}\right)=2\sqrt{r^2-\left(\frac{il}{4}\right)^2}$ dan oshmagan vaqtga teng ekanligi kelib chiqqan edi.

Endi ana shu topilgan $t_2\left(i\frac{l}{4}\right)-\left(i=\overline{0,n}\right)$ lar orqali $t_2'\left(i\frac{l}{4}\right)-\left(i=\overline{0,n}\right)$ larni hisoblaymiz. O'yin boshida quvuvchi *l* atrof bilan $-x^1(0)$ nuqtadan x^1 koordinata bo'ylab doira chegarasidagi $x^1(0)$ nuqtaga tomon harakatlana boshlaydi. Quvuvchi *l* atrof bilan $-x^1(0)$ nuqtadan $x^1(0)$ nuqtaga borgunga qadar $x^1\left(k\frac{l}{4}\right)$ nuqtada quvuvchi va qochuvchining x^1 koordinatalari ustma-ust tushishga ulguradi. Aks holda, qochuvchi quvuvchining *l* atrofiga tushib qoladi va o'yin nihoyasiga yetadi. $x^1\left(k\frac{l}{4}\right)$ nuqtadan $x^1(0)$ nuqtagacha masofani a_0 ga teng va uni bosib o'tish uchun ketgan vaqtni $t_{a_0}(0)$ deb belgilasak, quvuvchi va qochuvchining x^1 koordinatalari birinchi marta ustma-ust tushishi uchun sarf etilishi mumkin bo'lgan maksimal vaqt $t_2'(0)=t_2(0)-t_{a_0}(0)$ dan ko'p bo'lmaydi. Quvuvchi va qochuvchining x^1 koordinatalari birinchi marta ustma-ust tushishi bilan quvuvchi qochuvchi tomon x^2 koordinata bo'y;ab *l/4* masofaga siljiydi va $x^1\left(k\frac{l}{4}\right)$ nuqtadan $-x^1\left(\frac{l}{4}\right)$ nuqtaga tomon harakatni davom ettirish davomida eng kamida $-x^1\left((k+1)\frac{l}{4}\right)$ nuqtada quvuvchi va qochuvchining x^1 koordinatalari yana ustma-ust tushadi (aks holda qochuvchi quvuvchining *l* atrofiga tushib qoladi). Va quvuvchi qochuvchi tomon x^2 koordinata bo'ylab

yana *l/4* masofaga siljiydi va ta'qibni davom ettiradi. $-x^1\left(\frac{l}{4}\right)$ nuqtadan $-x^1\left((k+1)\frac{l}{4}\right)$ nuqtagacha masofani a_1 ga teng va $x^1\left((k+1)\frac{l}{4}\right)$ nuqtadan $x^1\left(k\frac{l}{4}\right)$ nuqtagacha masofani a_1' ga teng desak, u holda $x^1\left(k\frac{l}{4}\right)$ nuqtadan $x^1\left(\frac{l}{4}\right)$ nuqtagacha masofa $a_1 - a_1'$ ga teng bo'ladi. Bu masofalarni bosib o'tish uchun ketgan vaqtlar mos ravishda $t_{a_1}\left(\frac{l}{4}\right)$, $t_{a_1'}\left(\frac{l}{4}\right)$ va $t_{a_1}\left(\frac{l}{4}\right) - t_{a_1'}\left(\frac{l}{4}\right)$ larga teng deb belgilaymiz. U holda birinchi siljishdan so'ng quvuvchi va qochuvchining x^1 koordinatalari yana ustma-ust tushishi uchun sarf etilishi mumkin bo'lgan maksimal vaqt $t_2'\left(\frac{l}{4}\right) = t_2\left(\frac{l}{4}\right) - t_{a_1}\left(\frac{l}{4}\right) - \left(t_{a_1}\left(\frac{l}{4}\right) - t_{a_1'}\left(\frac{l}{4}\right)\right)$ dan ko'p bo'lmaydi. Umuman olganda keyingi siljishlarda quvuvchi va qochuvchining x^1 koordinatalari ustma-ust tushishi uchun quyidagi vaqtlardan ko'p bo'lmagan vaqtlar sarf bo'ladi.

$$t_2'\left(2\frac{l}{4}\right) = t_2\left(2\frac{l}{4}\right) - t_{a_2}\left(2\frac{l}{4}\right) - \left(t_{a_2}\left(2\frac{l}{4}\right) - t_{a_2'}\left(2\frac{l}{4}\right)\right),$$

$$t_2'\left(3\frac{l}{4}\right) = t_2\left(3\frac{l}{4}\right) - t_{a_3}\left(3\frac{l}{4}\right) - \left(t_{a_3}\left(3\frac{l}{4}\right) - t_{a_3'}\left(3\frac{l}{4}\right)\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$t_2'\left((n-1)\frac{l}{4}\right) = t_2\left((n-1)\frac{l}{4}\right) - t_{a_{n-1}}\left((n-1)\frac{l}{4}\right) - \left(t_{a_{n-1}}\left((n-1)\frac{l}{4}\right) - t_{a_{n-1}'}\left((n-1)\frac{l}{4}\right)\right),$$

$$t_2'\left(n\frac{l}{4}\right) = t_2\left(n\frac{l}{4}\right) - t_{a_n}\left(n\frac{l}{4}\right) - \left(t_{a_n}\left(n\frac{l}{4}\right) - t_{a_n'}\left(n\frac{l}{4}\right)\right).$$

Quvuvchi *l* atrof bilan $-x^1(0)$ nuqtadan x^1 koordinata bo'ylab doira chegarasidagi $x^1(0)$ nuqtaga tomon harakatlanadi. Bunda quvuvchining *l* atrofi chegarasining qochuvchiga eng yaqin bo'lgan nuqtasi va D doira chegarasi A(x^1, x^2) nuqtada kesishadi. Ana shu *A* nuqtaning x^1 koordinatasi biz yuqorida aytib o'tgan $x^1 = x^1\left(k\frac{l}{4}\right)$ nuqta bo'ladi. *A* nuqtaning x^2 koordinatasi $x^2 = x^2\left(k\frac{l}{4}\right)$ ga teng bo'lib, quvuvchi bu nuqtaga *l/4* siljishdan x^2 koordinata bo'ylab 4 marta siljiganda yetib keladi. Bundan *k=4* ekanligi kelib chiqadi. Ushbu topilgan qiymatlardan foydalanib, quyidagi vaqtlarni hisoblaymiz.

$$t_{a_0}(0) = \frac{t_2(0) - t_2\left(4\frac{i}{4}\right)}{2},$$

$$t_{a_1}\left(\frac{i}{4}\right) = \frac{t_2\left(\frac{i}{4}\right) - t_2\left(5\frac{i}{4}\right)}{2}, \qquad t_{a_1}\left(\frac{l}{4}\right) - t_{a_1'}\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{t_2\left(\frac{i}{4}\right) - t_2\left(4\frac{i}{4}\right)}{2};$$

$$t_{a_2}\left(2\frac{i}{4}\right) = \frac{t_2\left(2\frac{i}{4}\right) - t_2\left(6\frac{i}{4}\right)}{2}, \qquad t_{a_2}\left(2\frac{l}{4}\right) - t_{a_2'}\left(2\frac{l}{4}\right) = \frac{t_2\left(2\frac{i}{4}\right) - t_2\left(5\frac{i}{4}\right)}{2};$$

$$t_{a_3}\left(3\frac{i}{4}\right) = \frac{t_2\left(3\frac{i}{4}\right) - t_2\left(7\frac{i}{4}\right)}{2}, \qquad t_{a_3}\left(3\frac{l}{4}\right) - t_{a_3'}\left(3\frac{l}{4}\right) = \frac{t_2\left(3\frac{i}{4}\right) - t_2\left(6\frac{i}{4}\right)}{2};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$t_{a_{n-1}}\left((n-1)\frac{i}{4}\right)=\frac{t_2\left((n-1)\frac{i}{4}\right)-t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2},$$

$$t_{a_{n-1}}\left((n-1)\frac{l}{4}\right)-t_{a_{n-1}'}\left((n-1)\frac{l}{4}\right)=\frac{t_2\left((n-1)\frac{i}{4}\right)-t_2\left((n+2)\frac{i}{4}\right)}{2};$$

$$t_{a_n}\left(n\frac{i}{4}\right)=\frac{t_2\left(n\frac{i}{4}\right)-t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2},\qquad t_{a_n}\left(n\frac{l}{4}\right)-t_{a_n'}\left(n\frac{l}{4}\right)=\frac{t_2\left(n\frac{i}{4}\right)-t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}.$$

Endi yuqorida hisoblangan vaqtlarni inobatga olsak, u holda $t_2'\left(i\frac{l}{4}\right)-\left(i=\overline{0,n}\right)$ lar quyidagi ko'rinishlarni oladi

$$t_2'(0)=t_2(0)-t_{a_0}(0)=t_2(0)-\frac{t_2(0)-t_2\left(4\frac{i}{4}\right)}{2}=\frac{t_2(0)+t_2\left(4\frac{i}{4}\right)}{2},$$

$$t_2'\left(\frac{l}{4}\right)=t_2\left(\frac{l}{4}\right)-t_{a_1}\left(\frac{l}{4}\right)-\left(t_{a_1}\left(\frac{l}{4}\right)-t_{a_1'}\left(\frac{l}{4}\right)\right)==t_2\left(\frac{l}{4}\right)-\frac{t_2\left(\frac{i}{4}\right)-t_2\left(5\frac{i}{4}\right)}{2}-\frac{t_2\left(\frac{i}{4}\right)-t_2\left(4\frac{i}{4}\right)}{2}=\frac{t_2\left(4\frac{i}{4}\right)+t_2\left(5\frac{i}{4}\right)}{2},$$

$$t_2'\left(2\frac{l}{4}\right)=t_2\left(2\frac{l}{4}\right)-t_{a_2}\left(2\frac{l}{4}\right)-\left(t_{a_2}\left(2\frac{l}{4}\right)-t_{a_2'}\left(2\frac{l}{4}\right)\right)=t_2\left(2\frac{l}{4}\right)-\frac{t_2\left(2\frac{i}{4}\right)-t_2\left(6\frac{i}{4}\right)}{2}-\frac{t_2\left(2\frac{i}{4}\right)-t_2\left(5\frac{i}{4}\right)}{2}=$$

$$=\frac{t_2\left(5\frac{i}{4}\right)+t_2\left(6\frac{i}{4}\right)}{2},$$

$$t_2'\left(3\frac{l}{4}\right)=t_2\left(3\frac{l}{4}\right)-t_{a_3}\left(3\frac{l}{4}\right)-\left(t_{a_3}\left(3\frac{l}{4}\right)-t_{a_3'}\left(3\frac{l}{4}\right)\right)=t_2\left(3\frac{l}{4}\right)-\frac{t_2'\left(3\frac{i}{4}\right)-t_2'\left(7\frac{i}{4}\right)}{2}-\frac{t_2\left(3\frac{i}{4}\right)-t_2\left(6\frac{i}{4}\right)}{2}=$$

$$=\frac{t_2\left(6\frac{i}{4}\right)+t_2\left(7\frac{i}{4}\right)}{2},$$

……

$$t_2'\left((n-1)\frac{l}{4}\right)=t_2\left((n-1)\frac{l}{4}\right)-t_{a_{n-1}}\left((n-1)\frac{l}{4}\right)-\left(t_{a_{n-1}}\left((n-1)\frac{l}{4}\right)-t_{a_{n-1}'}\left((n-1)\frac{l}{4}\right)\right)=$$

$$=t_2\left((n-1)\frac{l}{4}\right)-\frac{t_2\left((n-1)\frac{i}{4}\right)-t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}-\frac{t_2\left((n-1)\frac{i}{4}\right)-t_2\left((n+2)\frac{i}{4}\right)}{2}=\frac{t_2\left((n+2)\frac{i}{4}\right)+t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2},$$

$$t_2'\left(n\frac{l}{4}\right)=t_2\left(n\frac{l}{4}\right)-t_{a_n}\left(n\frac{l}{4}\right)-\left(t_{a_n}\left(n\frac{l}{4}\right)-t_{a_n'}\left(n\frac{l}{4}\right)\right)=t_2\left(n\frac{l}{4}\right)-\frac{t_2\left(n\frac{i}{4}\right)-t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}-\frac{t_2\left(n\frac{i}{4}\right)-t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}=$$

$$=\frac{t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)+t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}.$$

Endi topilgan $t_2'\left(i\frac{l}{4}\right)-\left(i=\overline{0,n}\right)$ lar orqali $T_2'(l)$ ni hisoblaymiz

$$T_2'(l)=t_2'(0)+t_2'(1)+...+t_2'(n-1)+t_2'(n)=\sum_{i=0}^{n}t_2'(i)=\frac{t_2(0)+t_2\left(4\frac{i}{4}\right)}{2}+\frac{t_2\left(4\frac{i}{4}\right)+t_2\left(5\frac{i}{4}\right)}{2}+$$

$$+\frac{t_2\left(5\frac{i}{4}\right)+t_2\left(6\frac{i}{4}\right)}{2}+\frac{t_2\left(6\frac{i}{4}\right)+t_2\left(7\frac{i}{4}\right)}{2}+...+\frac{t_2\left((n+2)\frac{i}{4}\right)+t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}+\frac{t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)+t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}=$$

$$={}_2\left(4\frac{i}{4}\right)+t_2\left(5\frac{i}{4}\right)+t_2\left(6\frac{i}{4}\right)+t_2\left(7\frac{i}{4}\right)+...+t_2\left((n+2)\frac{i}{4}\right)+t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)+\frac{t_2(0)+t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}.$$

Bu yerda $t_2(0)=2r$ ekamligini inobatga olsak

$$T_2'(l)=t_2\left(4\frac{i}{4}\right)+t_2\left(5\frac{i}{4}\right)+t_2\left(6\frac{i}{4}\right)+t_2\left(7\frac{i}{4}\right)+...+t_2\left((n+2)\frac{i}{4}\right)+t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)+\frac{2r+t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}t_2\left((i+3)\frac{l}{4}\right)+\frac{t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}+r.$$

Umumiy holda x^1 koordinata bo'ylab ta'qib jarayoni $T_2'(l)$ uchun

$$T_2'(l)=\sum_{i=1}^{n}t_2\left((i+3)\frac{l}{4}\right)+\frac{t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}+r \qquad (23)$$

dan oshmagan vaqt sarf bo'ladi.

Yuqorida aytib o'tilgan **b)** va **c)** holatlar uchun $T_1'(l)$ va $T_2'(l)$ vaqtlarni ham **C.** qismning **a)** bandidagi kabi hisoblashlarni amalga oshirsak, $T_1'(l)$ quyidagi vaqtdan ko'p bo'lmaydi

$$T_1'(l)=\begin{cases} \mathrm{r}-l & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-0\ yoki\ natural\ son\ bo'lsa, \\ \left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\frac{l}{4} & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-kasr\ son\ bo'lsa. \end{cases}$$

$T_2'(l)$ uchun esa

$$T_2'(l)=\sum_{i=1}^{n}t_2\left((i+3)\frac{l}{4}\right)+\frac{t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}+r$$

dan ko'p bo'lmagan vaqt sarflanadi.

Shunday qilib, umumiy holda a),b) va c) holatlarda o'yinni nihoyasiga yetkazish vaqti uchun quyidagi yaxshilangan baholashga ega bo'ldik

$$T'(l)=\begin{cases} \mathrm{r}-l+\sum_{i=1}^{n}t_2\left((i+3)\frac{l}{4}\right)+\frac{t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}+r & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-0\ yoki\ natural\ son\ bo'lsa, \\ \left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\sum_{i=1}^{n}t_2\left((i+3)\frac{l}{4}\right)+\frac{t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}+r & agar\ \frac{4(r-l)}{l}-kasr\ son\ bo'lsa. \end{cases}$$

(24)

Umumiy holda (24) o'yinni

$$T'(l)=\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\sum_{i=1}^{n}t_2\left((i+3)\frac{l}{4}\right)+\frac{t_2\left((n+3)\frac{i}{4}\right)}{2}+r \qquad (25)$$

dan ko'p bo'lmagan vaqtda nihoyasiga yetkazish mumkin ekan. Teorema isbotlandi.

Sodda differensial o'yinlar juda ko'p tadqiqotchilarni o'ziga jalb qilib kelgan. Chunki shunday sodda holda aniqlangan differensial o'yinda ham hali hal etilmagan masalalar bisyor [4,5]. Xususan ushbu ishda qo'yilgan masalada agar quvuvchi va qochuvchilar o'yin davomida bir birini qayerda joylashgani va boshqaruvi haqida ma'lumotga ega bo'lmasa o'yinni tugatish mumkinligi yoki qochuvchi istalgancha vaqt qochib yura olishi haqida natijalar ma'lum emas. Boshqacha qilib aytganda differensial o'yinlarda quvuvchi va qochuvchilarga beriladigan ma'lumotlarni qandayligi juda muhim ahamiyatga ega. Ushbu ishda, shu ma'noda ham, ma'lum ishlardan farqli natijalar olingan, masalan quvuvchi boshqaruvini qurish uchun qochuvchi o'yinchini boshqaruvi haqidagi ma'lumot talab qilinmaydi. Va aksincha [4], [6]-[8] ishlarda shu jumladan [9]- da ham quvuvchilarga o'z boshqaruvlarini qura olishlari uchun har bir t vaqtda qochuvchi boshqaruvi $v(t)$ ma'lum bo'lishi kerak. Undan tashqari o'yinni nihoyasiga yetkazish vaqti $T(l)$ uchun yuqoridan baholashlar olingan. Shu bilan birga, ushbu ishda tekislikda hal qilingan masala xulosalari keng ma'noda intellektual kompyuter o'yinlarini qurish imkoniyatini beradi.

Adabiyotlar

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры.-М.: МИР, 1967. 480с.
2. Понтрягин Л.С. Линейное дифференциальные игры преследования // Мат. сборник.-Москва.1980.- Т.112. №3.-С. 307-330.
3. Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.Ю. Задача уклонение от встречи в дифференциальных играх многих лиц// Труды МИАН СССР. - Москва. 1977. - Т. 143. - С. 105-128.
4. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования // Соросовский Образовательный Журнал, 1995. №1.-С. 88-91.
5. Петросян Л.А., Рихсиев Б.Б. Преследование на плоскости.-М.: Наука, 1991. серия "Популярные лекции по математике", выпуск 61. 96с.
6. Сатимов Н.Ю. Задачи преследования и убегания для одного класса линейных дифференциальных игр многих лиц. Труды Таш ГУ. -Ташкент. 1981.- №670.-С. 54-64.
7. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. Об одном классе линейных дифференциальных игр преследования и убегания. Труды Таш ГУ. -Ташкент. 1981.- №670.-С. 64-75.
8. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальних играх между группами преследователей и убегающих. ДАН УзССР.-Ташкент. 1983 - №4. -С.2-5.
9. Иванов Р.П. Простое преследование - убегание на компакте//Докл. АН СССР.1980. Т.254. №6. С. 1318-1321.
10. Маматов М.Ш., Зуннунов А.О. О задаче простое преследование - убегание на компакте//Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наука. -М.: Наука, 2016. - №1. -С.15-18.
11. Маматов М.Ш., Зуннунов А.О. Дифференциальные игры простого преследования-убегание на компакте с геометрическими ограничениями//Динамик системаларнинг долзарб муаммолари ва уларнинг тадбиқлари. -Ташкент.: 2017. -С.212-213.
12. Зуннунов А.О. Дифференциальная игра простое преследование в квадрате//Проблемы современной топологии и её приложения. -Ташкент.: 2016. -С.300-301.
13. Маматов М.Ш., Зуннунов А.О. Квадратдаги содда дифференциал ўйинларда кувиш масаласи//Научный вестник. -Самарқанд.: 2019. -№1. -С.20-26.

УДК 532.546

ЗАДАЧА ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ С УЧЕТОМ АДСОРБЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Б.Х.Хужаёров, Ж.М.Махмудов, А.И.Усмонов, Б.О.Саидов
Самаркандский государственный университет
E-mail: b.khuzhayorov@mail.ru; j.makhmudov@inbox.ru; a.usmonov.91@mail.ru;

Аннотация. Процесс аномального переноса вещества в коаксиальной цилиндрической пористой среде моделируется дифференциальными уравнениями с дробной производной. Поставлена и численно решена задача переноса вещества в двухзонной цилиндрической среде, состоящей из макро- и микропор, с учетом адсорбционных эффектов. Определены профили изменения концентраций взвешенных частиц и адсорбированного вещества в макропоре и микропоре, поверхности локальной концентрации в микропоре. Оценено влияние адсорбционных явлений и порядка производной по координате, т.е. фрактальной размерности среды, на характеристики переноса вещества в обеих зонах.

Ключевые слова: пористая среда, перенос вещества, адсорбция, дробная производная, макропора, микропора.

Adsorbsiya hodisasini hisobga olgan holda fraktal tuzilishli silindrik g‘ovak muhitlarda modda ko‘chishi masalasi

Annotatsiya. Ichma–ich joylashgan silindrik g‘ovak muhitda anomal modda ko‘chishi jarayoni kasr hosilali differensial tenglama yordamida modellashtirilgan. Adsorbsiya hodisasini e’tiborga olgan holda, makro va mikroporadan tashkil topgan ikki zonali silindrik muhitlarda modda ko‘chishi masalasi g‘ovak qo‘yilgan va sonli yechilgan. Mikroporada lokal konsentrasiya maydoni, makro va mikroporada adsorbsiyalangan modda va muallaq zarrachalar konsentratsiyasi profillarining o‘zgarishi aniqlangan. Koordinata bo‘yicha hosila tartibi, ya’ni muhitning fraktal o‘lchami va adsorbsiya hodisalarining ikkala muhitda modda ko‘chishi xarakteristikasiga ta’siri baholangan.

Kalit so‘zlar: muhit, modda ko‘chishi, adsorbsiya, kasr hosila, makropora, mikropora.

A problem of solute transport in a cylindrical porous media with a fractal structure taking into account adsorption phenomena

Abstract. The process of anomalous solute transport in a coaxial cylindrical porous media is modelled by differential equations with a fractional derivative. The problem of solute transport in a two-zone cylindrical media consisting of macro- and micropores taking into account adsorption effects has been numerically posed and solved. The concentration profiles of suspended particles and the adsorbed solute in the macropore and micropore, the surface of the local concentration in the micropore are determined. The influence of adsorption phenomena and the order of the derivative with respect to the coordinate, i.e. fractal dimension of the media, on the characteristics of the solute transport in both zones is established.

Keywords: porous media, solute transport, adsorption, fractional derivative, macropore, micropore.

Введение. Задачи переноса веществ и фильтрации неоднородных жидкостей имеют большое практическое значение во многих отраслях техники и технологии. Нефтяные и водоносные пласты могут содержать зоны с неподвижной или малоподвижной жидкостью, где фильтрация жидкости и перенос вещества происходит с проявлением ряда особенностей. Опубликовано много работ, где на основе экспериментальных исследований выявлены своеобразные эффекты. В теоретических работах исследования основываются, в основном, на феноменологические математические модели.

Концептуально, модели могут быть разделены на две большие группы [1]. В первой группе моделей процесс описывается с микроскопической точки зрения. Перенос вещества рассматривается в одиночной поре или канале с определенной геометрией или в пустотной среде между агрегатами определенного вида. Перенос из макропоры в окружающую среду описывается уравнением диффузии. Такие типы моделей анализировались, в частности, в работах [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

Во второй группе моделей геометрия макропоры и окружающей их среды не рассматривается в явном виде, а вместо этого каналы различного размера и окружающих пород

рассматриваются как единое целое и исследуются с макроскопической точки зрения. Среда разделяется на две части, в одной из которых жидкость считается мобильной, т.е. подвижной, а в другой части – неподвижной или малоподвижной. Массообмен между двумя частями (или зонами) обычно описывается кинетическим уравнением первого порядка. Модели такого типа обычно называются моделями «подвижного – неподвижного» типа. В качестве одной из первых моделей такого типа можно указать работу [9], где введены понятия мобильной и иммобильной частей (зон) среды. Этот подход далее был развит в работах [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

В работе [9] пористая среда разделяется на две части (зоны): с подвижной и неподвижной жидкостью. Диффузионный поток между зонами считается пропорциональным разности концентраций в зонах. Рассматриваются сорбционные процессы в обеих зонах. Сорбция считается равновесной с линейной изотермой. Представленная в работе модель хорошо описывает известное явление “хвостообразование”, характерное для переноса веществ в агрегированных средах. Кроме того, установлено более раннее проявление кривых прорыва.

Породы многих нефтяных месторождений, как правило, являются неоднородными как в микроскопическом, так и макроскопическом масштабе. Типичным примером неоднородных пористых сред являются агрегированные и трещиновато-пористые среды.

Сложная траектория частиц жидкости и вещества в межагрегатной среде, трещинах и пористых блоках обуславливает аномальность переноса, так что обычные уравнения конвективного переноса не могут адекватно описать перенос вещества, транспортные уравнения должны учитывать эту аномальность. Такие среды могут быть рассмотрены как фракталы.

Во фракталах, одним из первых, уравнения переноса были предложены в [18]. В трещиновато-пористых средах уравнения переноса были анализированы в [19,20,21]. Показано, что порядок дробной производной в уравнениях зависит от фрактальной размерности среды.

Известно, что для нормальной фиковской диффузии перенос вещества описывается уравнением диффузии [22], которое является инвариантным если масштабы расстояния x и времени t соотнесены как $< x^2 > \sim t$. Многочисленные экспериментальные исследования показывают, что в фрактальных пористых средах данное соотношение нарушается. Среднеквадратичное расстояние частицы при случайном блуждании подчиняется соотношению $< x^2 > \sim t^{2/(2+\theta)}$, где θ - показатель аномальности диффузии. Следовательно, масштабы для уравнения диффузии должны быть соотнесены как $x_0^2 \sim t_0^{2/(2+\theta)}$. Понятно, что при $\theta = 0$ получается соотношение для классического закона Фика. Показатель аномальности диффузии определяется фрактальной размерностью среды d_f. Например, для кривой Кох имеем $\theta = 2d_f - 2$, где $d_f = \ln 4 / \ln 3$. В этих условиях уравнения переноса вещества содержат дробные производные как по времени, так и по пространственным координатам.

Одна из проблем, возникающих при использовании дробных производных, заключается в том, что не существует их однозначное определение. Численные методы решения задач для уравнений с дробными производными привязаны к виду выбранной производной, поэтому возникает необходимость анализа и сравнения результатов, полученных при использовании разных определений и численных методов.

Как отмечалось выше, модели с определенной геометрией рассматриваемой области позволяют в явном виде определить перенос массы из одной зоны в другую.

В данной работе численно исследуется задача аномального переноса вещества в двухзонной цилиндрической среде с учетом явления адсорбции. Как в макропоре, так и микропоре, учитывается фрактальная размерность в диффузионных членах. Оценивается роль адсорбции и аномальности переноса в изменении концентрационных полей в обеих зонах.

Постановки задачи. Рассматривается цилиндрическая пористая среда фрактальной структуры с цилиндрической макропорой в центре, т.е. область исследования задачи состоит из двух частей: 1) Макропористая среда (макропора), имеющая радиус a (т.е. область $\Omega_1 \{0 \le x < \infty, 0 \le r \le a\}$), с большими порами, характеризующаяся относительно высокой пористостью и средней скоростью жидкости в ней, 2) Окружающая цилиндрическая микропористая среда (микропора), занимающая область $\Omega_2 \{0 \le x < \infty, a \le r \le b\}$, имеющая низкую или нулевую пористость и, соответственно, скорость потока (Рис. 1) [23].

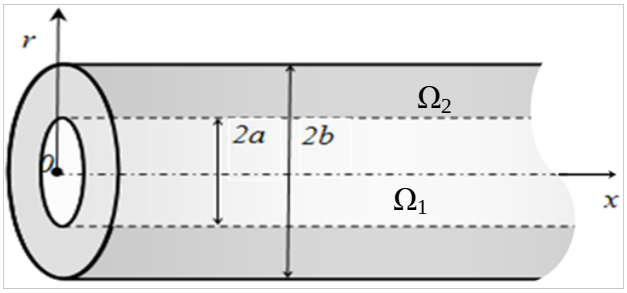


Рис.1. Цилиндрическая среда с цилиндрической макропорой.

В макропоре с фрактальной структурой в одномерной постановке перенос вещества описывается уравнением

$$\theta_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \rho_m \frac{\partial s_m}{\partial t} + \theta_{im} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} = \theta_m D_m \frac{\partial^\beta c_m}{\partial x^\beta} - \theta_m v_m \frac{\partial c_m}{\partial x}, \quad (1)$$

где c_m – средняя концентрация в Ω_1, $м^3/м^3$, D_m – коэффициент диффузии в макропоре, $м^\beta/с$, v_m – средняя скорость распространения вещества в Ω_1, $м/с$, β – порядок производной ($1<\beta\le 2$), θ_m, θ_{im} – коэффициенты пористости макропористой и микропористой сред, ρ_m – относительная объемная плотность области Ω_1, s_m – концентрация адсорбированного вещества в макропоре, c_{im} – средняя концентрация вещества в области Ω_2, $м^3/м^3$, которая определяется из следующего соотношения

$$c_{im} = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b r c_a(t,x,r)\,dr, \quad (2)$$

c_a – локальная концентрация в Ω_2, $м^3/м^3$.

Распространение вещества в области Ω_2 описано уравнением диффузии с дробной производной с учетом адсорбции, которое имеет вид

$$\theta_a \frac{\partial c_a}{\partial t} + \rho_a \frac{\partial s_a}{\partial t} = \theta_a D_a \frac{1}{r^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial r^{\beta_1}} \left(r^{\beta_1} \frac{\partial^{\beta_1} c_a}{\partial r^{\beta_1}} \right), \; a<r<b, \quad (3)$$

где s_a – локальная концентрация адсорбированного вещества в окружающей цилиндрической среде, D_a – коэффициент эффективной диффузии в Ω_2, θ_a – локальный коэффициент пористости микропористой среды, β_1 – порядок производной ($0<\beta_1\le 1$), ρ_a – объемная плотность микропоры.

В макропоре, так и в микропоре происходит адсорбция вещества по закону Генри с различными коэффициентами адсорбции

$$s_m = k_m c_m, \; s_a = k_a c_a \quad (4)$$

где k_m, k_a – адсорбционный коэффициент вещества в макропоре и окружающей микропористой среде.

Поставляя (4) в (1) и (3) получаем

$$R_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \theta \frac{\partial c_{im}}{\partial t} = D_m \frac{\partial^\beta c_m}{\partial x^\beta} - v_m \frac{\partial c_m}{\partial x}, \quad (5)$$

$$R_a \frac{\partial c_a}{\partial t} = D_a \frac{1}{r^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial r^{\beta_1}} \left(r^{\beta_1} \frac{\partial^{\beta_1} c_a}{\partial r^{\beta_1}} \right), \quad (6)$$

где R_m, R_{im}, R_a – коэффициенты ретардации,

$$R_m = 1 + \frac{\rho_m k_m}{\theta_m}, \; R_a = 1 + \frac{\rho_a k_a}{\theta_a}, \; \theta = \frac{\theta_{im}}{\theta_m}.$$

Начальные и граничные условия принимаются в виде:

$$c_m(0,x) = 0, \quad (7)$$

$$c_{im}(0,x) = 0, \quad (8)$$

$$c_a(0,x,r)=0\,, \tag{9}$$

$$c_m(t,0)=c_0\,,\ c_0=\text{const}\,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial x}(t,\infty)=0\,. \tag{11}$$

Численное решение задачи. Для решения задачи (5) – (11) применяем метод конечных разностей [24].

Перенос вещества в макропоре считается одномерным, поэтому в области $\Omega_1=\{(t,\ x),\ 0\le t\le T,\ \ 0\le x<\infty\}$ введем сетку в виде

$$\Omega_{\tau h_1}=\left\{(t_k,\ x_i),\ t_k=\tau k,\ x_i=ih_1,\ \tau=\frac{T}{K},\ k=\overline{0,T},\ i=0,1,...\right\},$$

где τ – шаг сетки по времени, h_1 – шаг сетки по направлению x, T – максимальное время, в течении которого исследуются процесс, K – количество интервалов сетки по времени. А в $\Omega_2=\{(t,x,r),0\le t\le T,0\le x\le\infty,a\le r\le b\}$ вводится сетка в следующем виде

$\Omega_{\tau h_1 h_2}=\left\{(t_k,x_i,r_j),\ t_k=k\tau,\ \tau=\frac{T}{K},\ k=\overline{0,K},\ x_i=ih_1,\ i=0,1,...,\ r_j=a+jh_2,\ h_2=\frac{b-a}{J},\ \ j=\overline{0,J}\right\}$, где h_2 – шаг сетки по направлению r, J – количество интервалов сетки по радиусу.

Соответствующие разностные схемы для уравнений (5), (6) имеют вид

$$\begin{aligned}&\frac{(c_m)_i^{k+1}-(c_m)_i^k}{\tau}+\frac{\theta}{R_m}\frac{(c_{im})_i^{k+1}-(c_{im})_i^k}{\tau}=\\&=\frac{D_m}{R_m\cdot\Gamma(3-\beta)h_1^{\beta}}\sum_{l=0}^{i-1}w_{\beta,l}\left((c_m)_{j-(l-1)}^k-2(c_m)_{i-l}^k+(c_m)_{i-(l+1)}^k\right)-\\&-\frac{v_m}{R_m}\frac{(c_m)_i^k-(c_m)_{i-1}^k}{h_1},\quad i=\overline{1,I-1},\ k=\overline{0,K-1},\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\frac{(c_a)_{i,j}^{k+1}-(c_m)_{i,j}^k}{\tau}=\frac{D_a}{R_a}\frac{1}{(jh_2)^{\beta_1}}\left\{\frac{h_2^{\beta_1}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{\beta_1}-\beta_1h_2^{\beta_1}\left(j-\frac{1}{2}\right)^{\beta_1}}{\Gamma(2-\beta_1)h_2^{\beta_1}}\cdot\right.\\&\cdot\frac{(c_a)_{i,j}^{k+1}-\beta_1(c_a)_{i,j-1}^{k+1}}{\Gamma(2-\beta_1)h_2^{\beta_1}}+\\&\left.+\frac{(jh_2)^{\beta_1}}{\Gamma(3-2\beta_1)h_2^{\beta_1}}\sum_{l=0}^{j-1}w_{2\beta_1,l}\left((c_a)_{i,\,j-(l-1)}^k-2(c_a)_{i,\,j-l}^k+(c_a)_{i,\,j-(l+1)}^k\right)\right\},\\&\qquad i=\overline{0,I},\ j=\overline{1,J-1},k=\overline{0,K-1},\end{aligned} \tag{13}$$

где $(c_m)_i^k$, $(c_{im})_i^k$, $(c_a)_{i,j}^k$ - сеточные значения функций $c_m(t,\ x)$, $c_{im}(t,\ x)$, $c_a(t,\ x,r)$ в точке $(t_k,\ x_i,r_j)$, $\theta=\frac{\theta_{im}}{\theta_m}$, $w_{\beta,l}=(l+1)^{2-\beta}-(l)^{2-\beta}$, $w_{2\beta_1,l}=(l+1)^{2-2\beta_1}-(l)^{2-2\beta_1}$, Γ – гамма функция, I – берется достаточно большим, чтобы концентрационные профили не доходили до выбранной условной границы области.

Вводим следующие обозначения

$$Q_m^k=\frac{D_m}{\Gamma(3-\beta)h_1^{\beta}}\sum_{l=0}^{i-1}w_{\beta,l}\left((c_m)_{j-(l-1)}^k-2(c_m)_{i-l}^k+(c_m)_{i-(l+1)}^k\right), \tag{14}$$

$$Q=\frac{h_2^{\beta_1}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{\beta_1}-\beta_1h_2^{\beta_1}\left(j-\frac{1}{2}\right)^{\beta_1}}{\Gamma(2-\beta_1)h_2^{\beta_1}}\cdot\frac{(c_a)_{i,j}^k-\beta_1(c_a)_{i,j-1}^k}{\Gamma(2-\beta_1)h_2^{\beta_1}}, \tag{15}$$

$$Q_a^k = \frac{(jh_2)^{\beta_1}}{\Gamma(3-2\beta_1)h_2^{2\beta_1}} \sum_{l=0}^{j-1} w_{2\beta_1,l} \left((c_a)_{i,\,j-(l-1)}^k - 2(c_a)_{i,\,j-l}^k + (c_a)_{i,\,j-(l+1)}^k \right). \tag{16}$$

С учетом обозначений (14)-(16) уравнения (12), (13) приводятся к виду

$$(c_m)_i^{k+1} = \tau \frac{Q_m^k}{R_m} - \tau \frac{v_m}{R_m} \frac{(c_m)_i^k - (c_m)_{i-1}^k}{h_1} - \frac{\theta}{R_m} \left\{ (c_{im})_i^{k+1} - (c_{im})_i^k \right\} + (c_m)_i^k, \tag{17}$$

$$i = \overline{1, I-1}, k = \overline{0, K-1}$$

$$(c_a)_{i,j}^{k+1} = \tau \frac{D_a}{R_a} \frac{1}{(jh_2)^{\beta_1}} \left\{ Q + Q_a^k \right\} + (c_m)_{i,j}^k,\ i = \overline{0, I},\ j = \overline{1, J-1},\ k = \overline{0, K-1}, \tag{18}$$

Расчетная схема следующая. Сначала из (18) определяется $(c_a)_{i,j}^{k+1}$. После этого определяем c_{im} из (2) путем численного интегрирования. Затем из (17) определяются сеточные значения $(c_m)_i^{j+1}$.

Результаты расчетов. По приведенному выше численному решению проводились расчеты. В расчетах использованы следующие значения исходных параметров: $D_a = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ м$^{2\beta_1}$/с, $D_m = 10^{-5}$ м$^{\beta}$/с, $v_m = 10^{-4}$ м/с, $c_0 = 0{,}01$, $\theta_f = 1{,}0$, $\theta_a = 0{,}6$, $a = 0{,}05$ м, $b = 0{,}25$ м, $k_a = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^3/кг, $k_m = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^3/кг, $\rho_m = 2000$ кг/м^3, $\rho_{im} = 2000$ кг/м^3, $\rho_a = 2500$ кг/м^3.

Результаты некоторых расчетов показаны на Рис. 2 – 3.

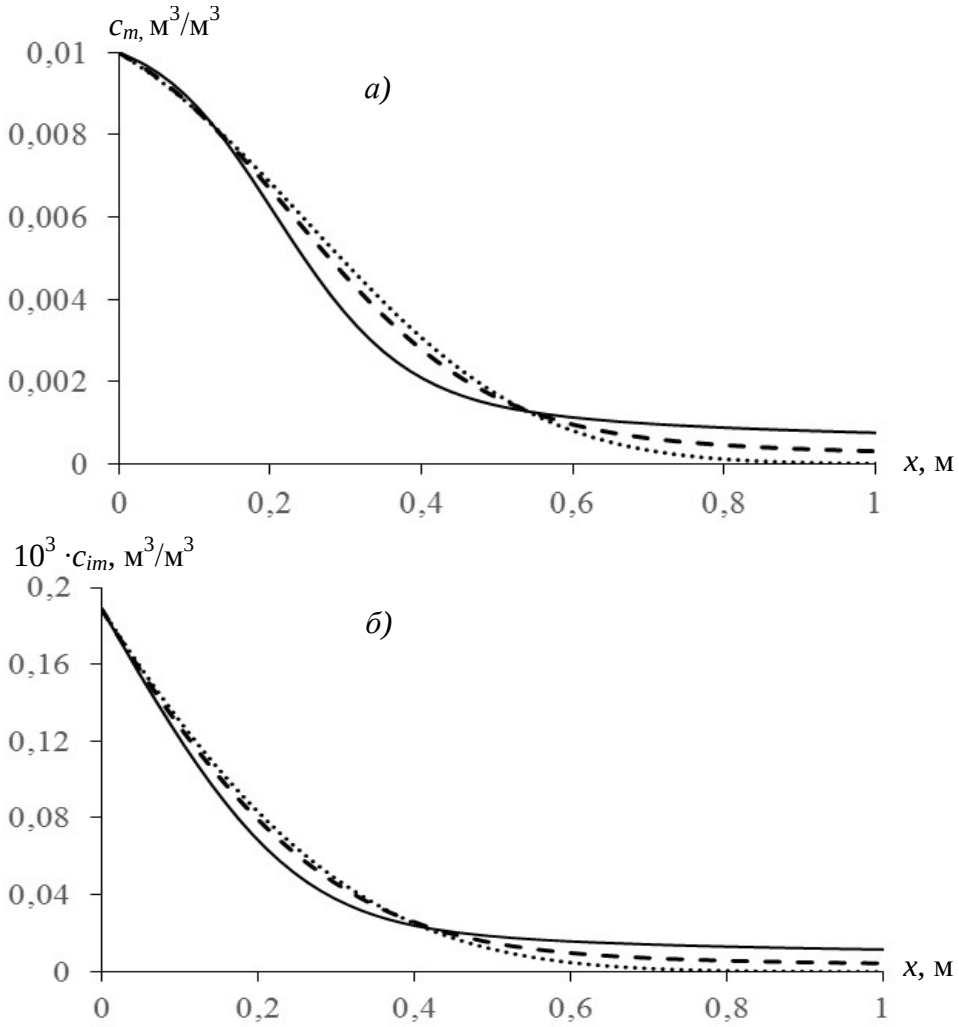


Рис. 2. Профили концентраций c_m (*а*), c_{im} (*б*) при $t = 3600$ с, $v_m = 10^{-4}$ м/с,

$D_a = 10^{-6}$ м$^{2\beta_1}$/с, $D_m = 10^{-5}$ м$^{\beta}$/с, $k_a = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^3/кг, $k_m = 10^{-5}$ м^3/кг,

····· $\beta_1 = 1,\ \beta = 2$; – – – – – – – $\beta_1 = 1,\ \beta = 1{,}8$; ———— $\beta_1 = 1,\ \beta = 1{,}4$.

Как видно из Рис.2, уменьшение значений β от 2, приводит к усилению диффузионных эффектов в обеих зонах. Сравнение этих результатов с соответствующими при $k_a = 0$ и $k_m = 0$ показывает, что адсорбция приводит к общему замедлению процесса распространения вещества.

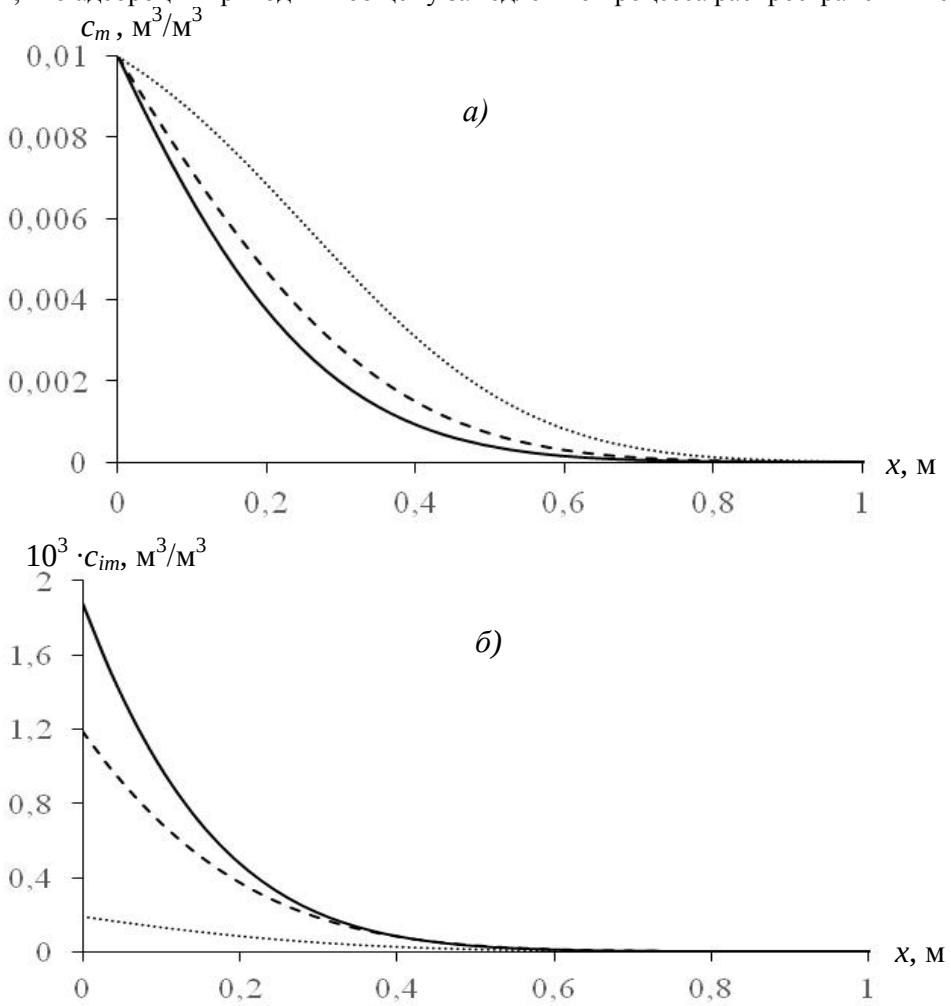


Рис. 3. Профили концентраций c_m (*а*), c_{im} (*б*) при $t = 3600$ с, $v_m = 10^{-4}$ м/с,

$D_a = 10^{-6}$ м$^{2\beta_1}$/с, $D_m = 10^{-5}$ м$^{\beta}$/с, $k_a = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^3/кг, $k_m = 10^{-5}$ м^3/кг,

····· $\beta = 2,\ \beta_1 = 1$ – – – – – – – $\beta = 2,\ \beta_1 = 0{,}9$ ———— $\beta = 2,\ \beta_1 = 0{,}8$

На Рис.3 приведены результаты при уменьшении β_1 от 1. Это приводит к интенсификации распространения вещества в зоне Ω_2 (Рис.3*б*), что отражается на распределение в Ω_1. Интенсификация переноса в Ω_2 означает увеличение поглощения из Ω_1 в Ω_2. Вследствие этого, при уменьшении β_1 от 1 в Ω_1 существенно замедляется интенсивность распространения вещества (Рис.3*а*).

Аналогичные явления можно наблюдать на поверхностях локальной концентрации c_a (Рис.4, 5). Граничная линия поверхности при $r = a$ соответствует значению концентрации на общей границе сред $r = a$, т.к. зона Ω_1 рассматривается как одномерная среда.

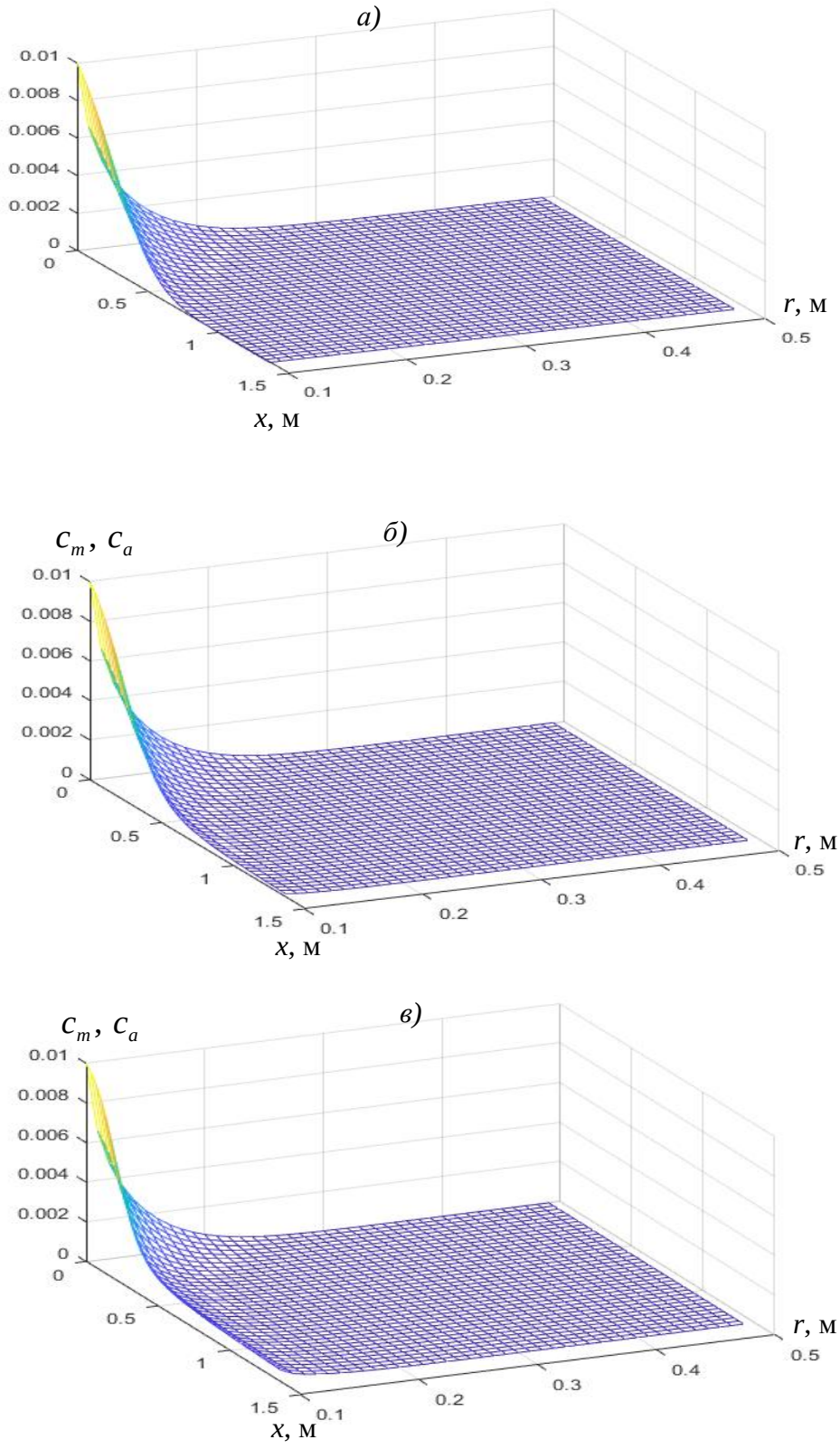


Рис. 4. Поверхности c_a при $t = 3600$ с, $v_m = 10^{-6}$ м/с, $D_a = 10^{-6}$ м$^{2\beta_1}$/с, $D_m = 10^{-5}$ м$^{\beta}$/с, $k_a = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^3/кг, $k_m = 10^{-5}$ м^3/кг, $\beta_1 = 1$, $\beta = 2$ (*а*); $\beta = 1{,}8$ (*б*); $\beta = 1{,}4$ (*в*).

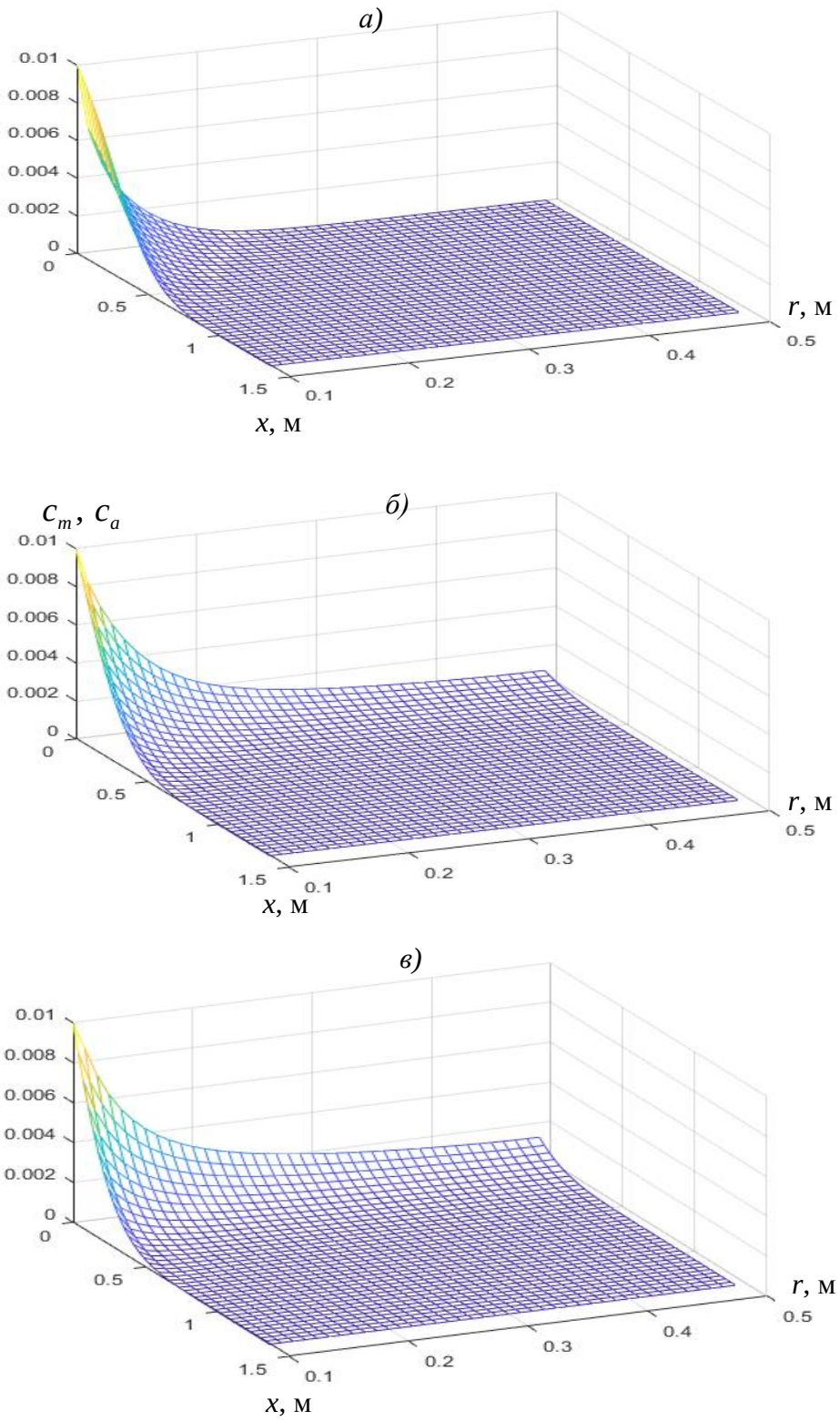


Рис. 5. Поверхности c_a при $t = 3600$ с, $v_m = 10^{-6}$ м/с, $D_a = 10^{-6}$ м$^{2\beta_1}$/с, $D_m = 10^{-5}$ м$^{\beta}$/с, $k_a = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^3/кг, $k_m = 10^{-5}$ м^3/кг, $\beta = 2$, $\beta_1 = 1$ (*а*); $\beta_1 = 0.9$ (*б*); $\beta_1 = 0{,}8$ (*в*).

Теперь задачу переноса вещества решаем для равновесной адсорбции по изотерме Фрейндлиха

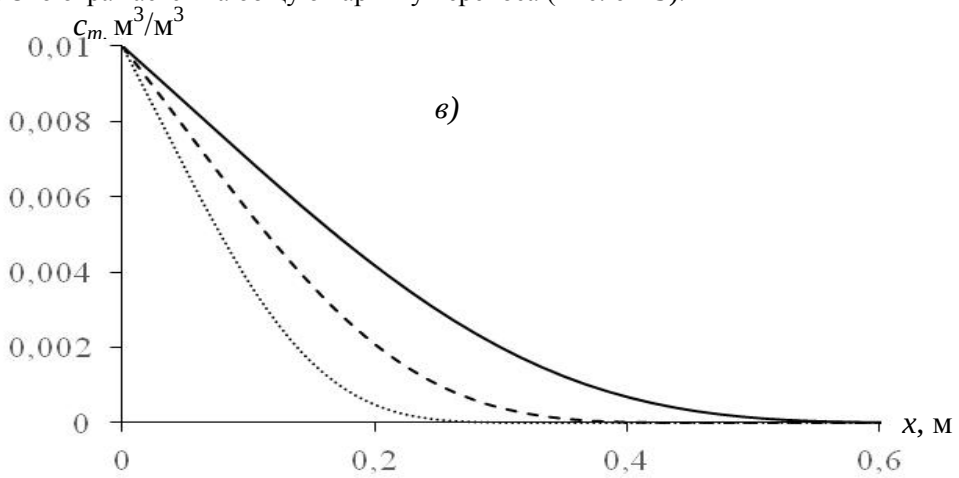
$$s_m = k_m c_m^n, \; s_a = k_a c_a^n, \quad 0 < n < 1. \tag{19}$$

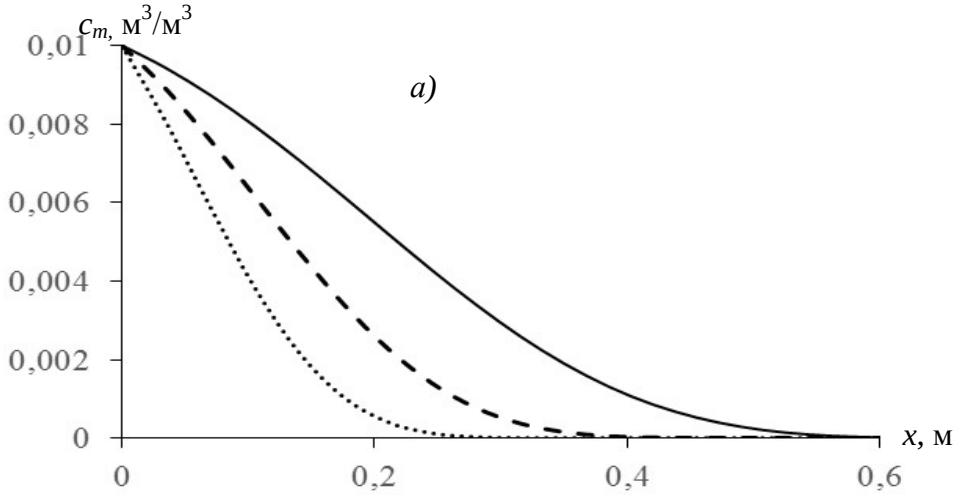
В этом случае в уравнениях (5), (6) изменяются только ретардационные коэффициенты

$$R_m = 1 + \frac{\rho_m k_m n c_m^{n-1}}{\theta_m} \ . \tag{20}$$

$$R_a = 1 + \frac{\rho_a k_a n c_a^{n-1}}{\theta_a} . \tag{21}$$

Сравнение с соответствующими результатами по изотерме Генри показывает, что при прочих равных условиях уменьшение значения n от единицы приводит к большим адсорбционным эффектам. Это отражается на общую картину переноса (Рис. 6 – 9).





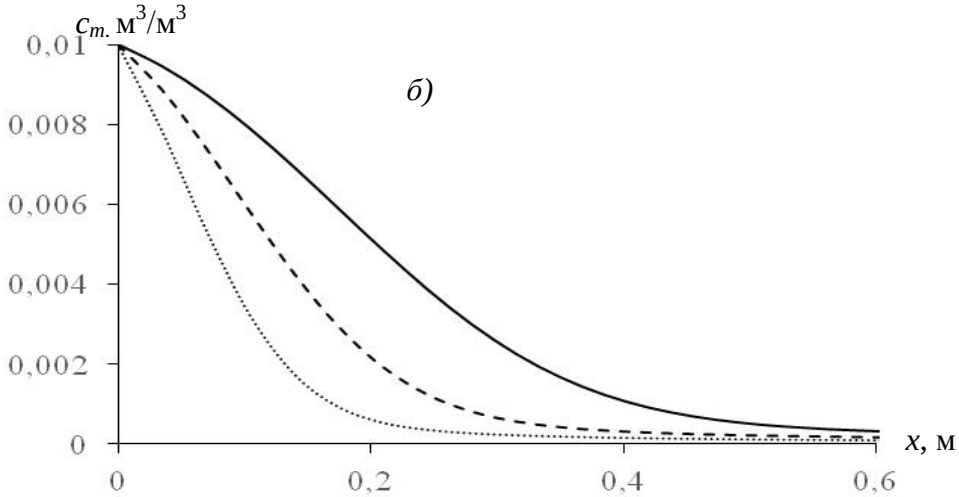


Рис. 6. Профили концентраций c_m в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D_a = 10^{-6}$ м$^{2\beta_1}$/с, $D_m = 10^{-5}$ м$^{\beta}$/с, $k_a = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^3/кг, $k_m = 10^{-5}$ м^3/кг, $n = 0.8$, $\beta_1 = 1$, $\beta = 2$ (*а*); $\beta_1 = 1, \beta = 1{,}8$ (*б*); $\beta = 2, \beta_1 = 0{,}9$ (*в*).

····· t=900 с, – – – – – t=1800 с, ——— t=3600 с

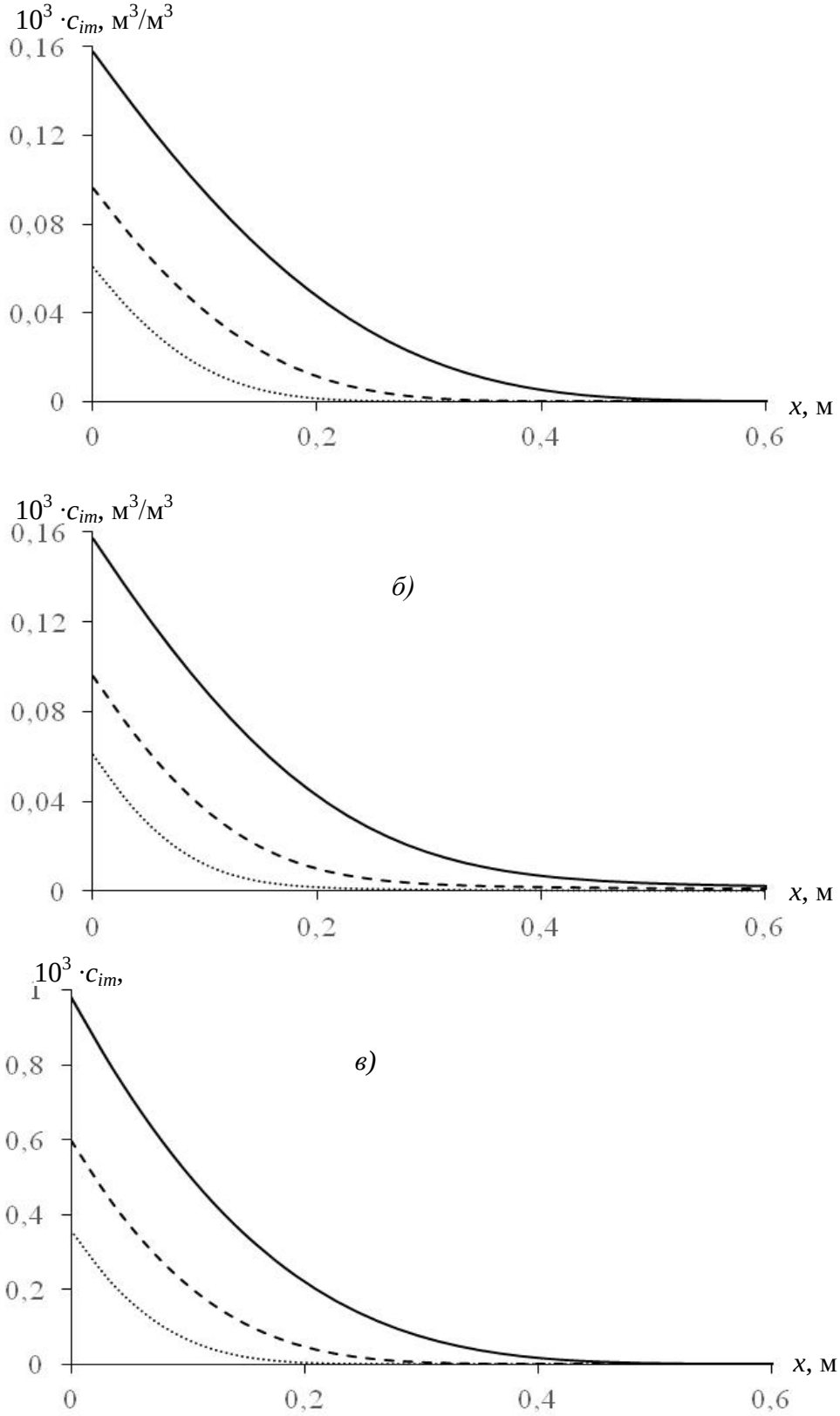


Рис. 7. Профили концентраций c_{im} в различные моменты времени при $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D_a = 10^{-6}$ м$^{2\beta_1}$/с, $D_m = 10^{-5}$ м$^{\beta}$/с, $k_a = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^3/кг, $k_m = 10^{-5}$ м^3/кг, $n = 0.8$, $\beta_1 = 1$, $\beta = 2$ (*а*); $\beta_1 = 1, \beta = 1{,}8$ (*б*); $\beta = 2, \beta_1 = 0{,}9$ (*в*).
..... t=900 с, – – – – – t=1800 с, ——— t=3600 с.

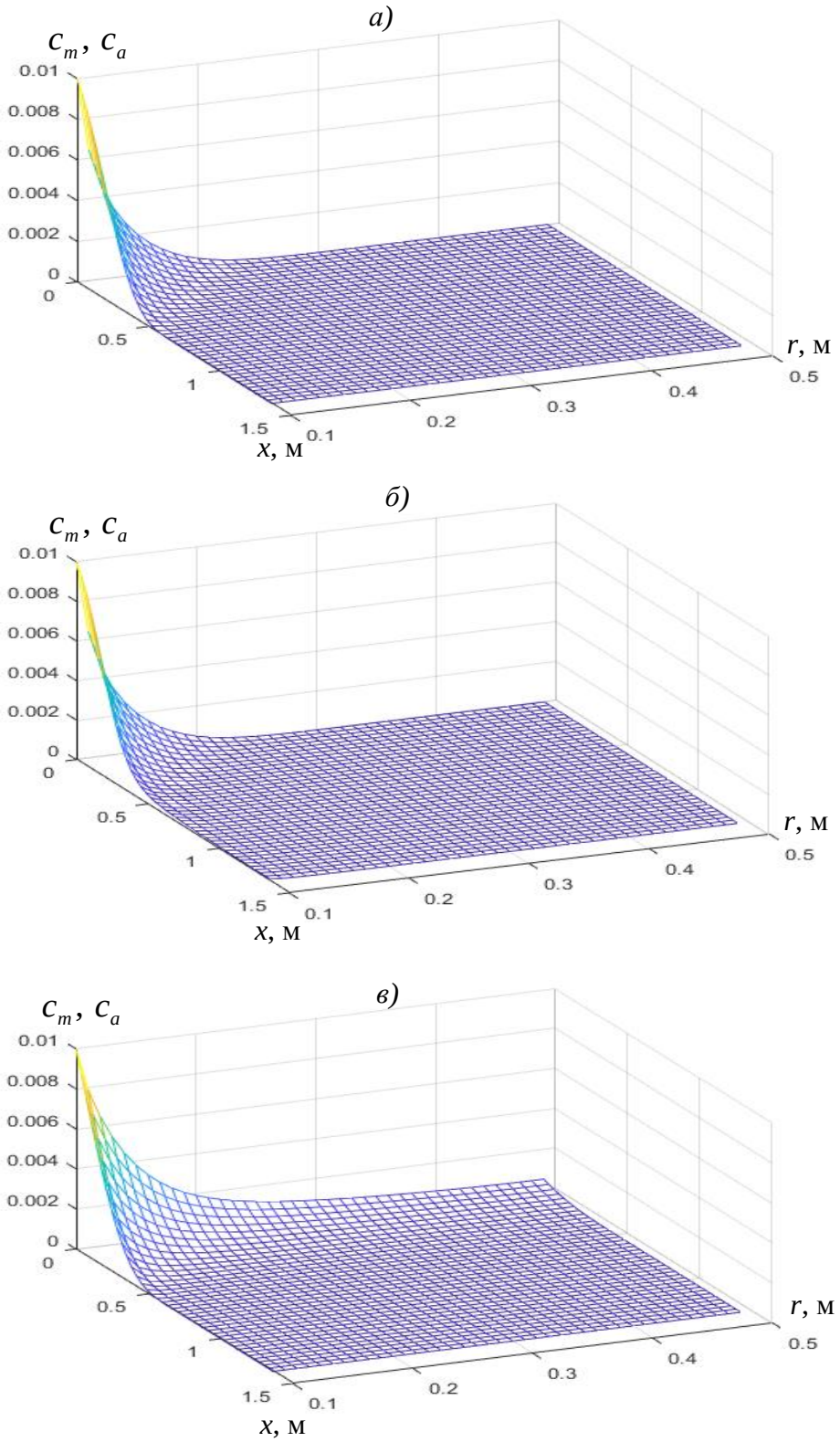


Рис. 8. Поверхности c_a при t=3600 с, $n = 0{,}8$, $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D_a = 10^{-6}$ м$^{2\beta_1}$/с, $D_m = 10^{-5}$ м$^{\beta}$/с, $k_a = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^3/кг, $k_m = 10^{-5}$ м^3/кг, $\beta_1 = 1$, $\beta = 2$ (*а*); $\beta_1 = 1, \beta = 1{,}8$ (*б*); $\beta = 2, \beta_1 = 0{,}9$ (*в*).

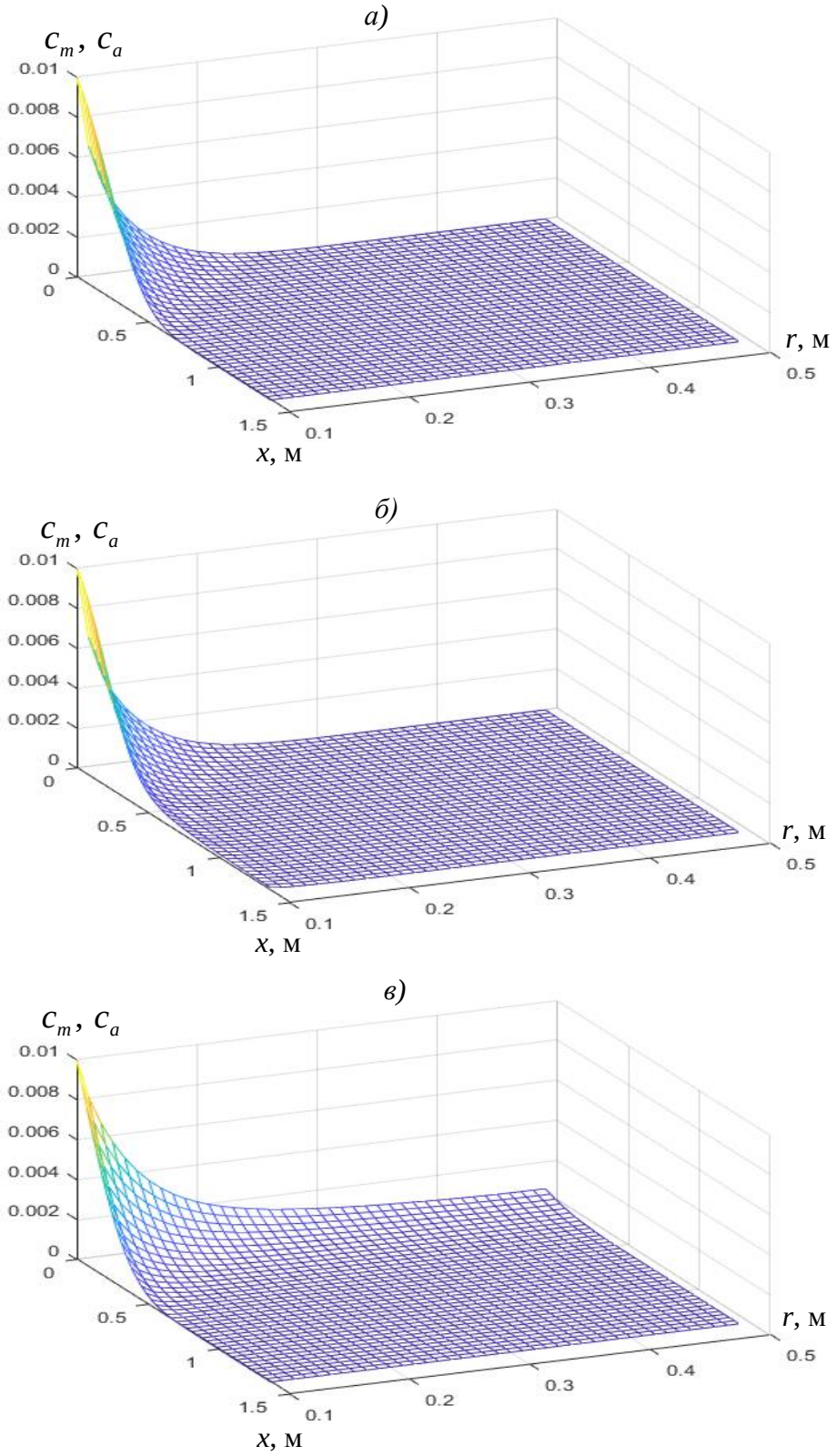


Рис. 9. Поверхности c_a при t=3600, $n = 0{,}9$, $v_m = 10^{-4}$ м/с, $D_a = 10^{-6}$ м$^{2\beta_1}$/с, $D_m = 10^{-5}$ м$^{\beta}$/с, $k_a = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^3/кг, $k_m = 10^{-5}$ м^3/кг, $\beta_1 = 1$, $\beta = 2$ (*а*); $\beta_1 = 1, \beta = 1{,}8$ (*б*); $\beta = 2, \beta_1 = 0{,}9$ (*в*).

Заключение. Показано, что адсорбция приводит к общему замедлению процесса распространения вещества, т.е. к ретардационным эффектам. Нелинейная адсорбция с показателем $n<1$ при прочих равных условиях интенсифицирует адсорбцию, что отражается на общие характеристики переноса. Уменьшение порядка производной в диффузионных членах уравнений переноса в обеих зонах приводит к «быстрой диффузии». Влияния адсорбции и фрактальности переноса в виде уменьшения порядка производной в диффузионных членах на характеристики переноса являются противоположными.

Литература

1. Van Genuchten M.Th., Tang D. H. Some Exact Solutions for Solute Transport Through Soils Containing Large Cylindrical Macropores // Water Resources Research. Vol. 20. No. 3. 1984. Pp. 335-346.

2. Rao P.S.C., Jessup J. E., Rolston D.E., Davidson J.M., Kilgrease D.P. Experimental and mathematical description of nonadsorbed solute transfer by diffusion in spherical aggregates // Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 44. 1980a. Pp. 684 – 688.

3. Rao P.S.C., Jessup R.E., Addison T.M. Experimental and theoretical aspects of solute diffusion in spherical and non-spherical aggregates // Soil Sci. Soc. Am. J., 133. 1982. Pp. 342-349

4. Rao P.S.C., Rolston D.E., Jessup R. E., Davidson J.M. Solute transport in aggregated porous media: Theoretical and experimental evaluation. // Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 44. 1980b. Pp. 1139 – 1146.

5. Scotter D.R. Preferential solute movement through large soil voids, I. Some computations using simple theory // Australian Journal of Soil Research Vol. 16. 1978. Pp. 257-267.

6. Skopp J., Warrick A.W. A two-phase model for the miscible displacement of reactive solutes in soil // Soil Sci. Soc. Am. J. 38(4). 1974. Pp. 545-550.

7. Sudicky E.A., Frind E.O. Contaminant transport in fractured porous media: Analytical solutions for a system of parallel fractures // Water Resour. Res. 18(6). 1982. Pp.1634-1642.

8. Tang D.H., Frind E.O., Sudicky E.A. Contaminant transport in fractured porous media: Analytical solution for a single fracture // Water Re sour. Res. 17(3). 1981. Pp. 555-564.

9. Coats, K.H., Smith, B.D. Dead-end volume and dispersion in porous media // Society of Petroleum Engineering Journal, 4(1), 1964, 73-84.

10. Gaudet J.P., Jegat H., Vachaud G., Wierenga P. Solute transfer with exchange between mobile and stagnant water through unsaturated sand // Soil Sci. Soc. Am. J., 41, 665-671, 1977.

11. Nkedi-Kizza P., Biggar J.W., Selim H.M., van Genuchen M.Th., Wierenga P.J., Davidson J.M., Nielsen D.R. On the equivalence of two concentual models for describing ion exchange during transport through an aggregated oxisol // Water Resour. Res. 20:1123-1130, 1984.

12. Rezanezhad F., Jonathan S.P., James R.G. The effects of dual porosity on transport and retardation inpeat: A laboratory experiment // Can. J. Soil Sci. 92. 2012. 723-732 p.

13. Selim H.M. Transport & Fate of Chemicals in Soils: Principles & Applications. CRC Press Taylor & Francis Group. Boca Raton London New York. 2015.

14. Skopp J., Gardner W.R., Tyler E.J. Solute movement in structured soils: Two-region model with small interaction // Soil Sci. Soc. Am. J., 45, 837-842, 1981.

15. Van Genuchten M.Th., Werenga P.J. Mass Transfer Studies in Sorbing Porous Media: II. Experimental Evaluation with Tritium (H_2O) // Soil Sci. Soc. American J., Vol. 41, 1977. 272-278 p.

16. Van Genuchten M.Th., Wierenga P.J. Mass transfer studies in sorbing porous media. 1. Analytical solutions // Soil Sci. Soc. Am. J., 40(4), 1976, 473-480.

17. Villermaux J., and W. P. M. van Swaajj, Modele repre"sentatif de la distribution des temps de sejour dans un re"acteur semi-infmi a dispersion axiale avec zones stagnarites. Application a I'fecoule-ment ruisselant des colonnes d'anneaux Raschig // Chem. Eng. Sci.,24, 1097-1111, 1969.

18. Nigmatullin R. R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry. Phys. Stat. Sol. (b). 133. 1986. 425–430.

19. Fomin S., V. Chugunov and T. Hashida. Application of Fractional Differential Equations for Modeling the Anomalous Diffusion of Contaminant from Fracture into Porous Rock Matrix with Bordering Alteration Zone. Transport in Porous Media. 81, 2010.187–205.

20. Fomin S., V. Chugunov and T. Hashida. Mathematical modeling of anomalous diffusion in porous media. Fractional Differential Calcules. Volume 1, Number 1. 2011. 1–28.

21. Fomin S., V. Chugunov and T. Hashida. The effect of non-Fickian diffusion into surrounding rocks on contaminant transport in fractured porous aquifer. Proceedings of Royal Society A 461, 2923–2939, 2005.

22. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier Publishing Co., New York. 1972. P.761.

23. Van Genuchten M.Th., Tang D. H. Some Exact Solutions for Solute Transport Through Soils Containing Large Cylindrical Macropores // Water Resources Research. Vol. 20. No. 3. 1984. Pp. 335-346.

24. Бейбалаев В.Д., Шабанова М.Р. Численный метод решения начально-граничной задачи для двумерного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2010. Выпуск 5(21). С. 244–251.

УДК-624.131.38

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГРУНТА ВОКРУГ СКВАЖИНЫ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ДАВЛЕНИИ ОТ ПЕСЧАННОГО ПРЕССИОМЕТРА

А. З. Хасанов, Н. А. Набиева
Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт
E-mail: nigora.nabieva.83@bk.ru

Аннотация. В статье рассматриваются результаты экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния грунта вокруг стенки скважины при осесимметричном нагружении. Приводятся аналитические выражения определения модуля деформации грунтов при испытании с помощью песчаного прессиометра.

Ключевые слова: напряжения, деформация, перемещения, нагрузка, боковое давление, давление грунтов на стенку скважины, модельное испытание грунтов, коэффициент корреляции, осесимметричная задача, модуль деформации.

Skvajina ichidagi qumli silindr gruntga o‘q simetrik kuchlanishlar ta’siri natijasida skvajina atrofidagi kuchlanish va deformatsiya xolatining tadqiqotlar natijalari

Annotatsiya. Maqolada uqsimetrik yuklanish ostida quduq devorlari atrofidagi gruntning kuchlanish va deformatsiya holatini eksperimental nazariy tadqiqotlar natijalari muhokama qilinadi. Qumli pressiometer bilan tajribadan o‘tkazilganda grunt deformatsiya modulini aniqlash uchun analitik usul berilgan.

Kalit so‘zlar: kuchlanish, deformatsiya, siljish, bosim, yon tomonga bosim koeffisienti, skvajina devoridagi grunt bosimi, tagriba natijasi, korrelyatsiya koeffitsienti, uq simetrir masalasi, deformatsiya moduli.

Experimental researches of the stressed-deformed condition of the soil around the well under an axismetric pressure from the sand pressiometer

Abstract: In the paper discusses the results of experimental studies of the stress-strain state of the soil around the walls of the borehole under axisymmetric loading. Analytical expressions are given for determining the soil deformation modulus when tested with a sand pressiometer.

Keywords: stresses, deformation, displacements, load, lateral pressure, soil pressure on the borehole wall, modeling of soil test, correlation coefficient, axisymmetric problem, deformation modulus.

Введение

Для моделирования напряженного состояния осесимметрично сжатого цилиндра и грунта, расположенного вокруг него, нами были проведены лабораторные лотковые испытания. Основной целью проведения испытаний являются исследования вертикальных и горизонтальных перемещений грунта рабочего органа песчаного прессиометра в виде цилиндра. Ранее такие исследования с песками проводились на приборах трёхосного сжатия с помощью стабилометров. Результаты таких испытаний и приборов приведены в работах [1,2,3].

В данной работе объектом исследования является засыпанный в скважину слой грунта в виде цилиндра с размерами: диаметр 76 мм, и высота 150 мм. Этот грунт является рабочим органом песчаного прессиометра для определения деформационных характеристик слоёв грунта по глубине. В качестве грунта рабочего органа прессиометра приняты мелкозернистые пески. Ниже приводятся результаты экспериментов.

1-рис. Испытательный лоток для модельных испытаний прессиометра.

Основные физические и механические характеристики песка. Плотность 1,6 г/см^3, плотность сухого грунта 1,54 г/см^3, коэффициент пористости е = 0,7 и влажность 4%.

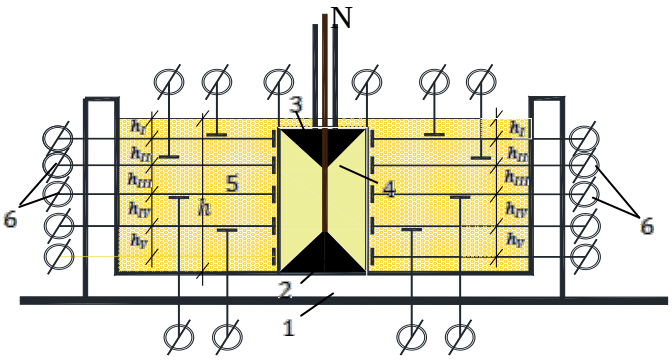


Рис-2. Схема установки маячков для измерения перемещений, общий вид установки измерительной аппаратуры
1-объёмный лоток размерами АхВхН=45х45х30 см; 2-нижний штамп прессиометра; 3-верхний штамп прессиометра; 4-тарированный мелко зернистый песок; 5- крупнозернистый песок; 6-мессуры;

Результаты модельных лотковых экспериментов с песчаным прессиометром. Способы решения поставленной задачи осуществляются при помощи объемного лотка, позволяющего моделировать взаимодействия конструкций и грунтового основания при различных внешних нагрузках. Объёмный лоток размерами АхВхН=45х45х30 см выполнен в виде коробчатой конструкции и нагружной рамы. Лоток предназначен для проведения модельных штамповых и прессиометрических испытаний различной конфигурации. Общий вид лотка представлен на (рис-1,2). Рабочий орган песчаного прессиометра выполнен в коническом виде с углом при вершине 60^0 (рис-1). Диаметр штампов 76 мм, расстояние по высоте рабочего органа цилиндра 150 мм. В центре объемного лотка сначала при помощи направляющей трубы, фиксировался нижний штамп прессиометра (2). Далее, в лоток послойно засыпался крупнозернистый песок (5). Центр рабочего органа засыпался тарированным мелко зернистым песком (4). Песок после укладки слоя высотой 4-5 см послойно уплотнялся специальным железным штампом. Общая толщина слоя грунта составила h=300 мм. На высоте 150 мм устанавливался верхний штамп прессиометра (3). Измерения вертикальных (по оси вертикального цилиндра) и горизонтальных перемещений по боковой поверхности цилиндра осуществлялись при помощи мессуры (6), с точностью деления до 0,01мм. Для этого, на расстоянии от уровня верхнего штампа вниз на расстоянии (h_I=10мм, h_{II}=37мм, h_{III}=69мм, h_{IV}=102мм, h_V=132мм) по внешней поверхности цилиндра устанавливаются горизонтально направленные маячки. Они выполнены в виде велосипедных спиц с приваренными в конце пятачками из листовой стали размером 10 на 10 мм ($h_{I\text{-}V}$). Схема установки маячков показана на схеме (рис-2). Нагрузка на штамп передавалась при помощи рычажного устройства. Нагрузка на рычажные устройства передавалась, таким образом, чтобы создавать вертикальные давления Р. На каждой ступени давления замерялись все перемещения датчиков. Результаты экспериментов в виде графиков представлены на (рис-3).

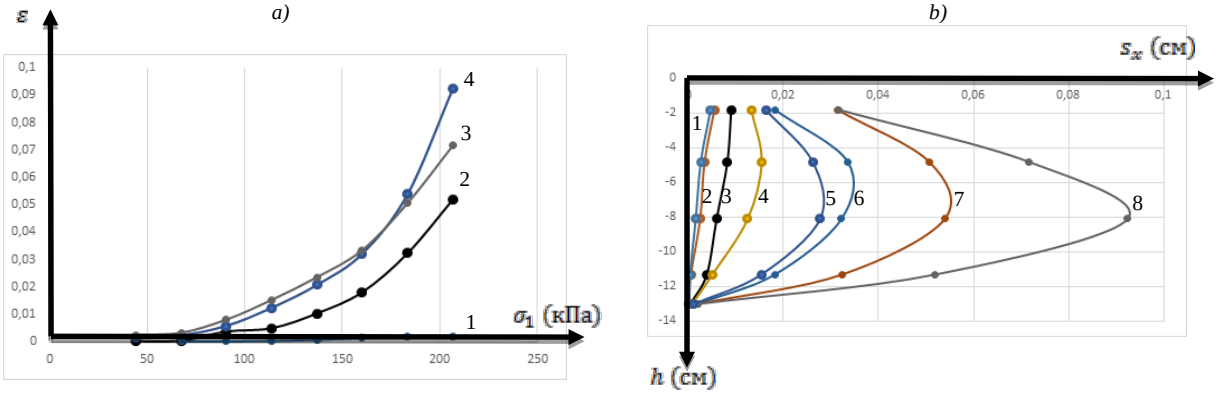


Рис-3. a)-графики боковых относительных деформаций и осевых напряжений σ_1; b)-графики боковых перемещений точек по высоте цилиндра. σ_1 (кПа)

Основная цель проводимых экспериментов. Целью проводимых экспериментов является установление взаимосвязи между деформациями и напряжениями рабочего органа прессиометра в виде песчаного цилиндра. В процессе экспериментов песчаный цилиндр диаметром 76 и высотой 150 мм нагружается конусными наконечниками по вертикальной оси с его торцов. На (рис-3.) представлены графики относительных вертикальных ε_1 и горизонтальных $\varepsilon_{2=3}$ деформаций, соответствующие вертикальному давлению σ_1.

$$\sigma_1 = \frac{N}{A}; \quad \varepsilon_1 = \frac{S_z}{h}; \quad \varepsilon_{2=3} = \frac{S_x}{D} \tag{1}$$

Учитывая нелинейности функции зависимости $\varepsilon_{1\text{-}3}=f(\sigma_1)$, принято решение: коэффициент поперечного рассширения определять для средней величине деформации, измеренной по высоте цилиндра. Графики горизонтальных деформаций точек (h_I=10мм, h_{II}=37мм, h_{III}=69мм, h_{IV}=102мм, h_V=132мм) и зависимости между напряжениями и деформациями представлены на (рис-3). Как видно из (рис-3), горизонтальные перемещения по наружной поверхности цилиндра неравномерны. В процессе осевого нагружения центральная часть цилиндра расширяется более динамично, чем его краевые части. То же самое наблюдается при проведении трехосных стабилометрических испытаний график зависимости между относительными боковыми деформациями и осевым давлением $\varepsilon_{1\text{-}3}=f(\sigma_1)$ для различных точек представлен на (рис.4.). Здесь также наблюдается нелинейность деформаций. Из представленных графиков можно определить, что для мелких песков рабочего органа прессиометра коэффициент бокового расширения равен

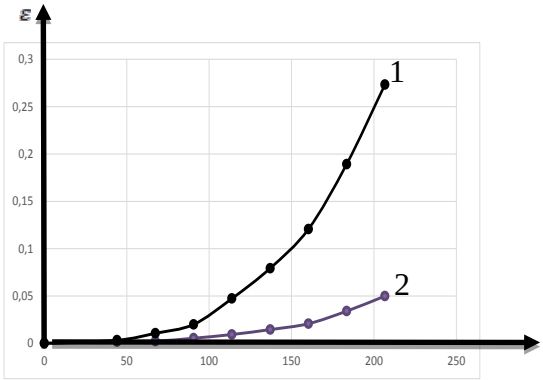


Рис-4. 1-вертикалная деформация, 2-горизонтальная деформация

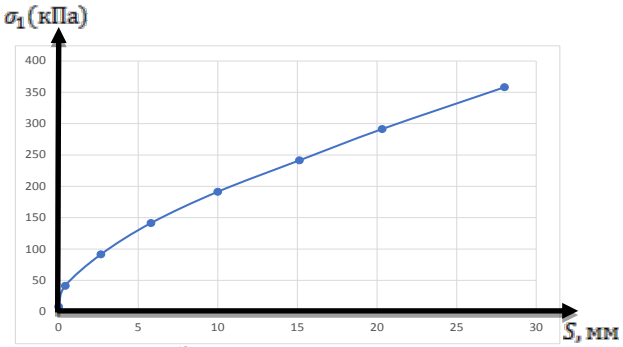


Рис-5. Зависимость между осадками и средними давлениями под штампом

$$\frac{\varepsilon_{2=3}}{\varepsilon_1} = \mu = 0.2 \quad \text{откуда} \quad \varepsilon_{2=3} = \mu\,\varepsilon_1 = 0.2\,\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{2\mu}{E}\sigma_3 \tag{1}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_1 - \frac{\mu}{E}\sigma_3 = \frac{\sigma_3}{E}(1-\mu) - \mu\frac{\sigma_1}{E} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{2=3} = \mu\,\varepsilon_1 \qquad (3)$$

$$\frac{\sigma_3}{E}(1-\mu) - \mu\frac{\sigma_1}{E} = \mu\frac{\sigma_1}{E} - \frac{2\mu^2}{E}\sigma_3$$

$$2\mu\frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma_3}{E}(1-\mu) + \frac{2\mu^2}{E}\sigma_3$$

$$\mu\sigma_1 = \sigma_3\left[\frac{(1-\mu)}{2} + \mu^2\right]$$

$$\sigma_3 = \frac{\mu}{\left[\frac{(1-\mu)}{2} + \mu^2\right]}\sigma_1; \quad \xi = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{\mu}{\left[\frac{(1-\mu)}{2} + \mu^2\right]}; \qquad (4)$$

Для данного примера при μ=0,2; $\xi = \frac{\mu}{\left[\frac{(1-\mu)}{2} + \mu^2\right]} = 0{,}2\frac{\mu}{\left[\frac{(1-0{,}2)}{2} + 0{,}2^2\right]} = 0{,}45$

Как паказывают многочисленные эксперименты, измеренная величина коэффициента бокового давления тесно связана с величиной угла внутреннего трения и определяется для условия покоя по выражению [3] $\xi=k*f/3$. Если принять для крупнозернистых песков

$f=tg\varphi=tg36°=0{,}73$ или $\xi=k*f/3=1*0{,}73/3=0{,}24$

Зная величину осевых деформаций ε_1 и давление σ_1 на грунт, по выражению (1) определим величину модуля деформации грунтов.

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}[1-2\xi\mu] \quad \text{или} \quad E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}[1-2\xi\mu] \qquad (5)$$

Применительно к проведенным испытаниям с песчаным прессиометром при давлении σ_1=160 кПа, ε_1=1,6/13=0,12, ξ=0,24

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}[1-2\xi\mu] = \frac{160-[1-2*0{,}24*0{,}2]}{0{,}12} = 1216кПа = 1{,}206мПа$$

Для сопоставления полученных результатов прессиометрических испытаний проведем традиционные штамповые испытания грунтов.

$$E = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta s_1}\omega d\left[1-\mu^2\right] \qquad (6)$$

Результаты штамповых испытаний представлены в табл. (№1) и (рис.5). Таким образом, при сопоставлении величин модулей деформации, полученной по выражению (5) и (6) имеем возможность определить коэффициент корреляции

$$k = \frac{E_1}{E_2} = \frac{1{,}55}{1{,}206} = 1{,}3 \qquad (7)$$

Выражение (5) с учетом корректирующего корреляционного коэффициента (7) запишется так

$$E = k\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}[1-2\xi\mu] \qquad (8)$$

Результаты штамповых испытаний

Таблица №1.

Диаметр и площадь штампа		Давление, Р кПа	Осадка, мм	Е мПа
D, см	A, см^2			
15,14	180	8,0	0.1	3,84
15,14	180	41,4	0,42	2,27
15,14	180	91,4	2,655	1,6
15,14	180	141,4	5,8	1,3
15,14	180	191,4	10	1,2
15,14	180	241,4	15,12	1,1
15,14	180	291,4	20,32	1,8
15,14	180	358,1	28	1,6
Среднее значение				1,84

Выводы

1. Экспериментально получены графики зависимости между осевыми и боковыми деформациями песчаного грунта внутри скважины при его осесимметричном нагружении.
2. На основании проведённых экспериментов получено аналитическое выражение коэффициента бокового давления при отсутствии ограничений перемещений стенки скважины.
3. Доказано, что при помощи песчаного прессиометра конструкции ООО «ГЕОФУНДАМЕНТПРОЕКТ» можно, с достаточной для практических целей точностью, в полевых условиях определять величину модуля деформации грунтов.

Литература

1. Ухов С.Б. Механика грунтов, основания и фундаменты. «Высшая школа» Москва 2004.
2. Хасанов А.З., Хасанов З.А. Основания и фундаменты на лессовых просадочных грунтах. Ташкент. ИПД «Узбекистон», 2006. 154 стр.
3. Хасанов А.З., Хасанов З.А. Экспериментально-теоретические исследования прочности и устойчивости грунтов. ГП издательство “Zarafshon”. Самарканд, 2015. 126 стр.

UDK:51

QARSHILIK MOMENTI HISOBGA OLINGAN DVIGATEL VALI HARAKATIDA ENERGIYA SARFINI MINIMALLASHTIRISH MASALASI

R.Malikov, M.Zokirov
Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya. Ishda klassik Lagranj masalasi ko‘rinishidagi boshqaruv masalasini tadqiqot usuli keltirilib, uning tadbiqi sifatida aniq dvigatel vali harakatida energiya sarfini minimallashtirish masalasini umumlashgan holi uchun natijalar olingan.

Kalit so‘zlar. Gamilton funksiyasi**,** Lagranj ko‘paytuvchilari, Eyler-Lagranj tenglamasi, optimal boshqaruv, optimal trayektoriya.

Задача минимизации затрат энергии в движении крутящего момента двигателя с учетом момента сопротивления

Аннотация. В работе представлены результаты классической проблемы Лагранжа и в качестве применения были получены результаты для обобщенной задачи минимизации затрат энергии в движении крутящего момента двигателя.

Ключевые слова. Функция Гамильтона, множители Лагранжа, уравнение Эйлера-Лагранжа, оптимальное управление, оптимальные траектории.

The issue of minimizing the cost of energy in the movement of the engine torque with the moment of resistance

Abstract. The paper presents the results of the classical Lagrange problem and, as an application, obtained results for the generalized problem of minimizing energy costs in the movement of engine torque.

Keywords. Hamilton function, Lagrange multipliers, Euler-Lagrange equation, optimal control, optimal trajectories.

1. Kirish. Masalani formal (umumiy) qo‘yilishi va tadqiqot usuli. Boshqaruv ob’ekti harakat qonuni, boshqaruv va faza traektoriyalariga qo‘yilgan bog‘lanishlar, hamda ob’ektning boshlang‘ich holati, oxirgi holati va sifat kriteriyasi berilganda matematik programmalashtirish masalasini ushbu klassik Lagranj masalasi ko‘rinishida yozish mumkin [1]:

$$\dot{x}_i = f_i(x,u,t), \qquad i = 1,2,...n; \tag{1}$$

$$\varphi_k(x,u,t) = 0, \qquad k = 1,2,....l; \tag{2}$$

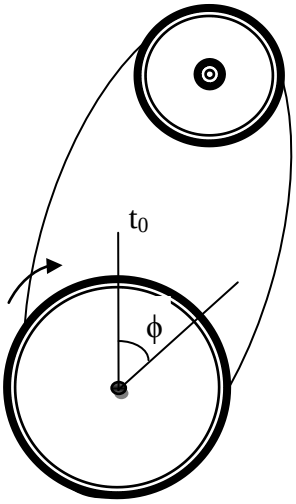
$$x_i(t_0) = x_i^0, \qquad x_i(t_f) = x_i^f, \qquad i = 1,2,...n; \tag{3}$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x,u,t)dt \to \min \tag{4}$$

Bu yerda $f_i(x,u,t), i=0,1,....,n,$ va $\varphi_k(x,u,t), k=1,2,.....,l$ funksiyalar barcha argumentlari bo‘yicha uzluksiz va differentsiallanuvchi, $u(t)$ boshqarish bo‘lakli uzluksiz funksiyalar sinfiga tegishli, $x(t)$ traektoriyalar esa, bo‘lakli silliq funksiyalar sinfiga mansub, deb faraz qilinadi [1,2,3].

Bo‘lakli uzluksiz funksiyalar sinfidan olingan $u(t)$ boshqarish – *joiz boshqarish*, bo‘lakli silliq funksiyalar sinfidan olingan $x(t)$ traektoriya esa, - *joiz traektoriya* deyiladi. Agar $u(t)$ va $x(t)$ joiz bo‘lsalar, u holda $\omega=(u(t),x(t))$ -joiz juftlik, yoki jarayon deyiladi. Har bir muayyan masalada joiz boshqarishlar va joiz traektoriyalarga qo‘shimcha bog‘lanishlar qo‘yilishi mumkin. Shu sababli, ma’lum bir masalalar sinfi qaralganda, bu tushunchalar aniqlashtiriladi.

(1) - (4) masalaning tadqiqot usulini quyidagi ketma-ketlikda keltiramiz:



1.1-rasm. Tadqiqot ob’ekti

1-qadam. Gamilton funksiyasini tuzamiz:

$$H=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f_i+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\varphi_k$$

bu funksiya ***Gamilton funksiyasi yoki gamiltonian,*** ψ_i $(i=0,1,2,...,n)$ **va** λ_k $(k=1,2,...,l)$ - *Lagranj ko‘paytuvchilari* deyiladi.

2-qadam. ψ_i larni topish uchun quyidagi tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\dot{\psi}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\qquad i=1,2,...,n; \tag{5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_s}=0,\qquad s=1,2,...,r \tag{6}$$

tenglamalar sistemasi ***Eyler - Lagranj tenglamalari deyiladi.*** (6) tenglamalarning har biri tanlangan $t\in[t_0,t_j]$ uchun gamiltoniannning ekstremumi shartidan iborat va ular ***statsionarlik shartlari deyiladi.***

3-qadam. (1) - (4) masalani yechish uchun, ya’ni $\left(x^*(t),\ u^*(t)\right)$ optimal jarayonni topish uchun (3)-chegaraviy shartlarda (1) - (2) va (5) -(6) tenglamalar sistemasini birgalikda yechiladi.

2. Masalani chiziqli holdagi umumiy qo‘yilishi. O‘zgarmas tokli dvigatel ishining tenglamasini ushbu

$$I\ddot{\varphi}=i_{\text{ya}}k_{\text{f}}\Phi-M_{\text{c}}$$

ko‘rinishda yozish mumkin [1], bunda I - dvigatel aylanuvchi qismining inertsiya momenti, φ - dvigatel valining burilish burchagi, i_{ya} - yakor zanjiridagi tok, k_{f} - konstruktiv o‘zgarmas, Φ - magnit oqimi, M_{c} - qarshilik momenti. Ushbu

$$b=k_{\text{ф}}\Phi/I,\quad x_1=\varphi,\quad x_2=\dot{\varphi},\quad u=i_{\text{я}},\quad u_{\text{c}}=M_{\text{c}}/I$$

belgilashlardan foydalanib, dvigatelning yuqorida keltirilgan tenglamasini ushbu

$$\dot{x}_1=x_2,\qquad \dot{x}_2=bu-u_{\text{c}} \tag{7}$$

normal shaklda yoki ushbu

$$\dot{x}=Ax+Bu+\tilde{q} \tag{8}$$

vektor ko‘rinishda yozish mumkin, bunda

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix},\qquad \tilde{q}=\begin{pmatrix}0\\-u_c\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Bu yerda, sodda model olish uchun, boshqarish sifatida yakor zanjiridagi tok qabul qilinadi.

Energiya boshqarishning (tok kuchining) kvadratidan olingan integralga proporsionaldir. Funksionalning oldidagi o‘zgarmas ko‘paytuvchi variatsion masalaning yechilishiga ta’sir qilmaganligidan,

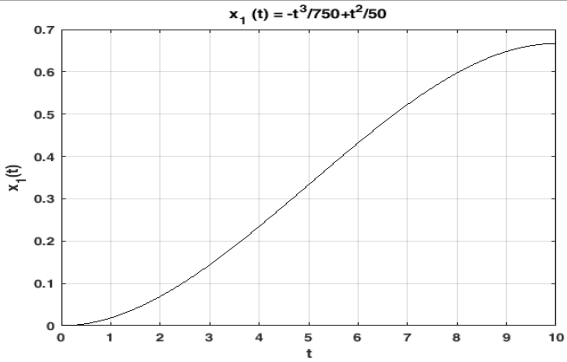
optimallik kritereysi sifatida ushbu

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left(u^2 + u_c^2\right) dt$$

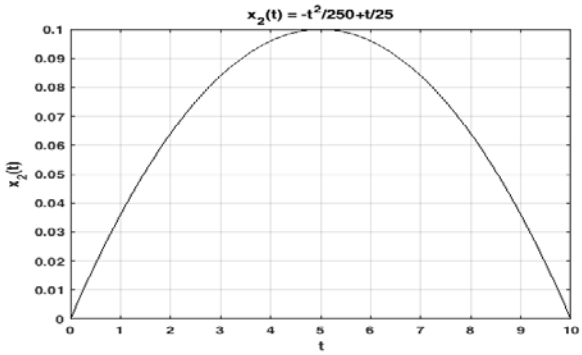
integralni qabul qilamiz, bunda t_0, t_f - tanlangan va $t_f - t_0 = T$. Boshqarishga bog‘lanish shartlar qo‘yilmayapti: u tanlangan optimallik kriteriysi orqali bilvosita hisobga olinmoqda.

(7) ob’ektning harakati tenglamasi ushbu $x(t_0) = x^0$, $x(t_f) = x^f$ chegaraviy shartlar bilan berilganda, yuqorida keltirilgan optimallik kriteriysi minimal qiymat qabul qiladigan boshqarishni topish talab qilinadi.

3. Masalani chiziqli holdagi aniq qo‘yilishi. Qarshilik momentini hisobga olgan hol uchun, dvigatel vali harakatini 10 sekund vaqt o‘tgandan so‘ng to‘xtatish sharti bilan, 1 radian burchakka burishda energiya sarfni minimallashtirish masalasini yeching (3.1-rasm) [1,2,3].

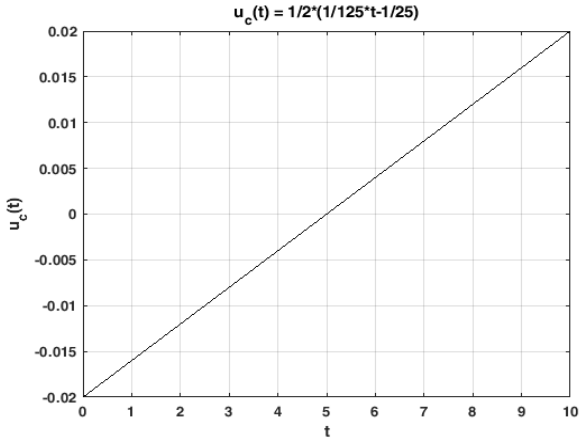


3.1-rasm

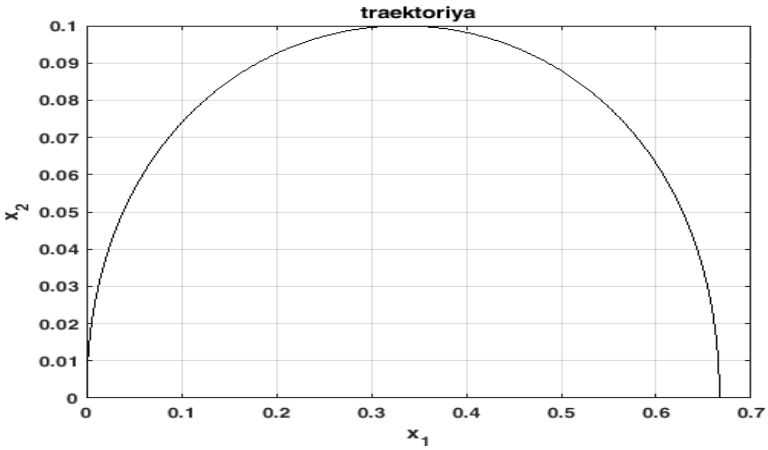


3.2-rasm

3.3-rasm



3.4-rasm



3.5-rasm

3-rasm. Optimal traektoriyalar va ularga mos optimal boshqaruv grafigi.

Bu masalaning matematik modeli quyidagicha yoziladi:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u - u_c; \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$x_1(10) = 1, \quad x_2(10) = 0; \quad J = \int_0^{10} \left(u^2 + u_c^2\right) dt \to \min.$$

Ravshanki, masala fizik ma'noga ega, ya'ni maxsus bo'lmagan holga to'g'ri keladi. Shu sababli, standart kelishuvga muvofiq $\psi_0 = -1$ deb hisoblaymiz. Gamiltonianni tuzamiz:

$$H = -u^2 - u_c^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (u - u_c).$$

Eyler-Lagranj tenglamalari quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u_c} = -2u_c - \psi_2 = 0.$$

Bu sistema quyidagi yechimga ega:

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi = -C_1 t + C_2, \quad u = \frac{-C_1 t + C_2}{2}, \quad u_c = \frac{C_1 t - C_2}{2}.$$

Boshqarish uchun olingan ifodani ob'ektning harakat tenglamasiga keltirib qo'yib va uni yechgandan so'ng yechimlar uchun ushbu

$$x_2 = -\frac{C_1 t^2}{2} + C_2 t + C_3; \qquad x_1 = -\frac{C_1 t^3}{6} + \frac{C_2 t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

munosabatlarga kelamiz.

Chegaraviy shartlardan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$x_2(0) = C_3 = 0, \quad x_1(0) = C_4 = 0, \quad x_2(10) = -50C_1 + 10C_2 = 0, \quad x_1(10) = -125C_1 + 50C_2 = 1.$$

Bu yerdan $C_1 = 1/125$, $C_2 = 1/25$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$ ekanligini olamiz. Demak, optimal boshqarish va optimal traektoriya, mos ravishda ushbu

$$u^*(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{125}t + \frac{1}{25}\right), \quad u_c^*(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{125}t - \frac{1}{25}\right), \quad x_1^*(t) = -\frac{t^3}{750} + \frac{t^2}{50}, \quad x_2^*(t) = -\frac{t^2}{250} + \frac{t}{25}$$

ko'rinishda bo'lar ekan (3.2-rasm).

Agar qo'shimcha ravishda, dvigatel valini 1 radianga burgandan so'ng, uning harakatlanmasligi talab qilinsa, u holda $t \geq 10$ momentdan boshlab $u = 0$ deb olish lozim.

Xulosa. Obyektga ta'sir etayotgan ta'sir kuchi 3.3-rasm va 3.4-rasmda tasvirlangan boshqaruv to'g'ri chizig'i bo'ylab o'zgaradi. Bu ta'sir ostidagi ob'ekt 3.5-rasmda tasvirlangan yarim ellips egri chizig'i bo'ylab harakatini davom ettiradi. Bunda 10 sekund davomida minimal energiya sarfi *J=0.0027* ga teng bo'ladi.

Adabiyotlar

1. Ким Д.П. Сборник задач по теории автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 328 с. – ISBN 978-5-9221-0937-6.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Оптималлаштириш усуллари. - Т.: Ўзбекистон, 1995. - 356 б.

3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. - М: Наука, 1971.

УДК 519.681.5

ОПТИМИЗАЦИЯ ДОСТОВЕРНОСТИ ИНФОРМАЦИИ В СИСТЕМАХ ЭЛЕКТРОННОГО ДОКУМЕНТООБОРОТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОЦЕНОК КРИТЕРИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ОСОБЕННОСТЕЙ ДОКУМЕНТОВ

И.И. Жуманов., Х.Б. Каршиев
Самаркандский государственный университет

Аннотация. Разработаны методы и алгоритмы обработки информации в информационно - ресурсных системах на основе использования особенностей, свойств, характерных черт инструментов, заложенных в традиционные технологии поиска, распознавания, классификации, структуризации, индексации. Для оптимизации предложены методы совмещения возможностей и адаптации переменных компонентов обобщенного алгоритма повышения достоверности информации по коэффициентам расхождения и функциям соответствия значений элементов, вводимого и эталонного документов.

Ключевые слова: электронный документ, достоверность информации, семантический сеть, поиск, индексация, полнота, точность, релевантность документов, обобщенный алгоритм, функции соответствия и коэффициенты расхождения.

Elektron hujjat almashish tizimlarida hujjatlar tasniflari va xususiyatlarini mezonli baholash asosida axborot ishonchligini maqbullashtirish

Annotatsiya. Axborot – resurs tizimida hujjatni qidirish, tanish, sinflashtirish, tarkiblashtirish, indeksatsiyalash hamda an’anaviy texnologiyalarda qamralgan vositalar xususiyati, xossasi, tasnifidan foydalanuvchi vositalar asosida axborotga ishlov berish usul va algoritmlari ishlab chiqilgan. Axborot ishonchliligini oshirishga qaratilgan umumiy algoritm komponentlari o‘zgaruvchilarini moslashtirishga, kiritiladigan va etalonli hujjatlar elementlari farqi koeffitsientlarini va xos funksiyasi baholarini olish imkoniyatiga ega bo‘lgan usul taklif qilingan.

Kalit so‘zlar: elektron hujjat, informatsiya ishonchligi, semantik tarmoq, qidiruv, indeksatsiya, to‘lalik, aniqlik, relevantlik, elektron hujjat, umumiy algoritm, xos funksiya, farqlik koeffitsienti.

Optimization of information reliability in electronic document management systems using evaluation of criteria characteristics and features of documents

Abstract. Methods and algorithms for information processing in information resource systems have been developed based on the use of features, properties, features of tools embedded in traditional technologies of search, recognition, classification, structuring, indexing. For optimization, methods for combining capabilities and adapting variable components of a generalized algorithm for increasing the reliability of information on discrepancy coefficients and functions for matching values of elements of input and reference documents are proposed.

Keywords: electronic document, accuracy of information, semantic network, search, indexing, completeness, accuracy, relevance of documents, generalized algorithm, correspondence functions and divergence coefficients.

Актуальность темы

Методы повышения достоверности информации, используемых в системах электронного документооборота (СЭД) предприятий и учреждений основываются на инструментарии поиска, распознавания, классификации вводимого для обработки и хранения документов. При этом выделяется ключевой подход, направленный разработке и реализации механизмов для извлечения и использования множества специфических, статистических, динамических характеристик, свойств информации, текстурных и фреймовых особенностей изображения образа документа, а для поиска документа используются ключевые элементы и концепты (признак, термин, атрибут, составляющее образа), а также формируются электронные аналоги в базе данных (БД) и базе знаний (БЗ) с правилами контроля их значений с целью обеспечения большой точности, полноты, релевантности обработки информации и документа [1-5].

Эффективность методов и алгоритмов определяется значениями коэффициентов повышения скорости при требуемой полноте выполнения запросов и существенном уменьшение времени на обработки информации, которая исчисляется в часах [6].

Для совершенствования и развития алгоритмов обработки информации в СЭД проанализирован большой спектр технологий, включающие инструменты информационного поиска, распознавания, классификации, структуризации, индексации электронных документов (ЭД), а также для синтезирования выделены характерные особенности, черты программных средств, заложенных в системах Яндекс, Google и в др.

Предложен подход, который направлен совершенствованию и развитию известных методов, использованию их для повышения достоверности информации выделению специфических характеристик, определению коэффициента расхождения вводимого и эталонного документа, использованию частоты встречаемости поискового концепта в ЭД, весовых коэффициентов элементов, концептов, ранжированию коэффициента релевантности документа и оптимизации точности, трудоёмкости, стоимости, полноты обработки информации [7].

Настоящая работа посвящена разработке методики определения качественных показателей СЭД, обобщенного алгоритма, методов оптимизации достоверности информации с механизмами регулирования переменных характеристик и параметров.

Результаты исследования приведены в табл.1, где графах даны механизмы, математические модели и выражения расчета, а также описания обозначений[5,6].

Принцип повышения достоверности информации на основе меры совместимости[7-9]. Пусть d_k - документ из последовательности $D_k \in d_1, d_2 ..., d_i, ..., d_n$, который задаётся многомерной матрицей, где на столбце отражается однородное состояние элемента документа в виде $M = \|\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{ij}, ...\alpha_{in}\|$ выходных элементов документа, как $M^* = \|\beta_{i1}, \beta_{i2}, ..., \beta_{ij}, ...\beta_{in}\|$.

Для оценки достоверности элемента α_{ij} вводится функция соответствия $F(\alpha_{ij})$, которая сравнивается с эталонной функцией соответствия $F^*(\beta_{ij})$. В результате элемент β_{ij} должен отражать значения характеристики эталонного примера $D^e{}_k$.

Если значение элемента α_{ij} $= \beta_{ij}$, тогда информация считается достоверной. В противоположном случае, когда $\alpha_{ij} \neq \beta_{ij}$, тогда информация считается недостоверной.

Степень соответствия элемента α_{ij} функции $F^*(\beta_{ij})$ задаётся в виде

$$\varphi_i(F_{i(факт.)}) = \varphi_{\max} - \frac{\left|F_{i(факт.)} - F_{i(эталон)}\right|}{F_{i(факт.)}} \tag{1}$$

где $F_{i(факт.)}$ - степень обладания α_{ij} элементом;

$F_{i(эталон)}$ - степень обладания β_{ij} элементом;

$\varphi_{\max}$ - максимальное значение степени совместимости элемента функции $F(\alpha_{ij})$ к элементу функции $F^*(\beta_{ij})$.

Причем, измерение меры соответствия производится от 0 до 1. Возможно появление отрицательных значений $F(\alpha_{ij})$. когда

$$F_{(факт)} < \frac{F_{\max}}{2}.$$

Для оценки степени соответствия α_{ij} функции $F^*(\beta_{ij})$ целесообразно представление выражения (1) в виде

$$\varphi_i(F_{i(факт.)}) = \begin{cases} \varphi_{\max} - \dfrac{\Delta F_i}{(F_{i(факт.)}}, & если \quad F_{i(факт.)} \geq g(s); \\ \varphi_{\max} - \dfrac{\Delta F_i}{(F_{\max} + 1) - F_{i(факт.)}}, & если \quad F_{i(факт.)} < g(s), \end{cases} \tag{2}$$

где $g(s) = \dfrac{F_{\max}}{2}$, $g(s) = 2{,}5$, 5 , 10, а $F_{\max} = 5,\ 10,\ 20;$

ΔF_i - разность модального значения β_{ij} - го элемента от фактического элемента α_{ij} .

Вводится функция риска, которая обусловлена следующими вероятностными функциями:

$\mu(A_1)$ - вероятностью ошибок первого рода;

$\mu(A_2)$ - вероятностью ошибок второго рода.

Функция риска задаётся в виде

$$\Re = \mu(A_1)\cdot\omega_{A_1} + \mu(A_2)\cdot\omega_{A_2},$$

где ω_{A_1}, ω_{A_2} - соответственно весовые коэффициенты функции $\mu(A_1)$ и $\mu(A_2)$;

A_1 - гипотеза о достоверности элемента α_{ij};

A_2 - гипотеза о достоверности элемента β_{ij};

Вводим следующее обозначение

$$\mu(A_1)\cdot\omega_{A_1} = \sum_{i=1}^{s}\varphi_i\cdot w_i \qquad (3)$$

w_i - вес важности α_{ij} элемента документа;

s = 1, 2, … ,16.

Выражение (3) подставим в формулу (2) и представим функцию оценки риска, обусловленной вероятностью ошибок первого рода

$$\Re = (\sum_{i=1}^{16}\varphi_i\cdot w_i)\omega_{A_1} + \mu(A_2)\cdot\omega_{A_2}\ . \qquad (4)$$

Вероятность ошибок первого рода запишется в виде

$$P_1 = \frac{z_1+z_2}{D}\,p_{A_1}(\alpha_{ij}), \qquad (5)$$

где D - общий интервал значений элемента α_{ij} документа;

$p_{A_{11}}(\alpha_{ij})$ - априорная вероятность появления ошибок типа $\alpha_{ij}\to\beta_{ij}$.

Вероятность ошибки второго рода запишется, как

$$P_2 = \left(1-p_{A_{11}}(\alpha_{ij})\right)\left[1-\int_{z_1}^{z_2}\mu(y)dy\right]. \qquad (6)$$

Общая вероятность риска определяется, как

$$\Re = P_1 + P_2\,.$$

Для уменьшения значения функции риска $\Re$ по формуле (4), следовательно, общей вероятности необнаруженных ошибок первого и второго родов требуется определение экстремальных значений границ z_1 и z_2 интервала проверки соответствия $\alpha_{ij}\to\beta_{ij}$ в их пределы.

Оптимизация заключается в нахождение частных производных, путем проведения некоторых преобразований и определение оптимальных границ $z_1^{опт}$ и $z_2^{опт}$.

Для гауссовой функции соответствия получена следующее экстремальное значение границ для проверки принадлежности носителя, как

$$z_1^{опт} = z_2^{опт} = \pm 2\sigma[1-\mu(A_1)], \qquad (7)$$

где σ - среднеквадратическое отклонение функции распределения.

Предпочтение отдается тому числу, которому соответствует решение уравнения, имеющего экстремальное значение.

Определено, что из тестированного набора: $p = (\alpha_{i1},\alpha_{i2},...,\alpha_{ij},...\alpha_{in})$ элементов документа при вероятности ошибок $P = 10^{-3}\div 10^{-4}$ достигается наиболее высокое соответствие функции $F(\alpha_{ij})$ и $F^*(\beta_{ij})$.

При этом функции риска $\Re$ = 0,03, общая вероятность необнаруженных ошибок уменьшается на один порядок.

Оптимизация обобщенного алгоритма с регулированием частотных характеристик элементов. Разработанная методика позволяет определить и сформировывать характеристики

частоты встречаемости контролируемого элемента либо концепта в документе, а также во всей коллекции.

Проведен анализ часто, встречающихся документов в коллекции, ключевых концептов (слов, фраз, терминов) IDF.

Требуется, чтобы вероятность появления элементов либо концептов должна быть меньше, чем средней вероятности появления ошибок в информации.

Результат проверки достоверности информации достигается, когда все ключевые концепты проверяемого документа совпадает с характеристиками ключевых концептов эталона-документа.

Проанализирована позиция поле, выделенного для ключевого концепта документа. В каждом поле концепта фиксируется самое высокое совпадение. Совпадение измеряется по общей длине ключевого концепта и последовательности концептов, или же поле всей обрабатываемой информации.

Определяется весовой коэффициент концепта и поле, веса элементов и концептов в каждом поле документа. Производится ранжирование конечных весов, определенных из разных концептов. Веса на выходе процедуры ранжирования задаются целочисленными значениями. Синтезированный в структуру обобщенного алгоритма механизм *SPH_RANK_PROXIMITY* на выходе дает наиболее релевантный документ. Однако такое достижение выполняется медленнее, чем при механизме *SPH_RANK*, который в свою очередь также имеет меньшую скорость обработки информации, по сравнению механизма *SPH_RANK_NONE*.

Индексации документов представляется как $K = \{k_1,.....,k_n\}$, скорость обработки информации измеряется в минутах, а доступность к БД ЭД по набору концептов $P = \{p_1,....., p_n\}$ измеряется в секундах.

Необходимо оптимизировать индексации и поиска всех документов коллекции в БД за T минут и поддерживать БД в актуальном состоянии.

Обобщенный алгоритм с механизмом параллельного индексирования ЭД. Для оптимизации функции обобщенного алгоритма вводится KP механизм распараллеливания индексирования и в целом других процедур обработки документов.

Оптимизация индексирования всех документов коллекции задаётся в виде цепочки условий т.е.

$$\frac{d_1}{k_1 * KP} < p_1;\ \frac{d_2}{k_2 * KP} < p_2;\ \frac{d_3}{k_3 * KP} < p_3 \ldots.$$

Цепочка в конечном векторном виде задаётся, как

$$\frac{D}{K * KP} < P.$$

Допустимое время индексирования задаётся, как

$$K * P * KP > D.$$

Для оптимизации необходимо, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{k_i * KP} < T.$$

Неравенство преобразуется в виде

$$\frac{1}{KP} * \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{K_i} < T.$$

Вычисляется релевантность документа на выходе алгоритма, как

$$\mathrm{Rel}(Q_j, d_k) = R_{j,k}.$$

где Q_j - запрос, поступающий на вход модели обработки документов $D = \{d_1,.....,d_n\}$.

Модель в свою очередь выдает вектор документов по запросу пользователя

$$D^{res} = (d_1^{res},.....,d_{rd}^{res}),$$

где rd - количество результатов поиска.

Релевантные документы сортируются в порядке уменьшения значений коэффициентов

$$R_{j,1} > R_{j,2} > ..... > R_{j,rd}.$$

Может быть использован также коэффициент пертинентности, в виде

$$\mathrm{Rel}(d_i^{res}, Q_j) \to Per(d_i^{res}, Q_j).$$

Документ имеет больший коэффициент пертинентности, когда достигаются

$$Per(d_1^{res}) \to \max(Per(d_1^{res}), Per(d_{rd}^{res}));$$

$$Per(d_i^{res}) \to \max(Per(d_i^{res}), Per(d_i^{res})).$$

Рассчитываются метрики оценки релевантности и погрешности:

$$Metrika_i(\mathrm{mod}_j);\ Metrika_error(\mathrm{mod}_j).$$

Оптимизация задается в виде цепочки условий

$$\mathrm{Re}\,l(D_i, Q_j) \longrightarrow (SF, DF_Out, DF_{inner}, GF, OF) \to \max,$$

с ограничениями

$$\frac{1}{KP} * \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{K_i} < T;$$

$$K * P * KP > D;$$

$$R_{j,1} > R_{j,2} > ..... > R_{j,rd};$$

Оптимизация обработки ЭД достигается с помощью механизмов регулирования переменных, в частности статистических факторов

$$SF = \{sf_1, ..., sf_{sfn}\}$$

где sfn - количество статистических факторов, которые вычисляются при индексировании и расчете релевантности каждого документа и они задаются размером документа, общим количеством ссылок/упоминаний на документ, частотой обновления.

Динамические факторы для учета в механизме регулирования обобщенного алгоритма задаются в виде:

(DF_Out) - ссылки/упоминания на документ, количеством/качеством ссылок, содержащихся в запросе $DocumentQuery^{ij}$.

Внутренние факторы задаются в виде:

(DF_Inner) - количеством концептов документа, количеством документов с концептом, количеством запроса $DocumentQuery^{ij}$ и т.д.

Собственные факторы (OF) учитываются в виде адреса нахождения документа в БД, правил контроля в БЗ, используются словари словоформ, терминов, признаков, атрибутов, каталог коллекции документа.

Обобщенный алгоритм с механизмом оценки релевантности документа. Предлагается подход, в котором анализируются влияние механизмов информационного поиска объекта, формирования и применения выборки данных, реляционный СУБД, а также языка запросов SQL. Основной задачей является обеспечение надёжного и эффективного хранения информации при высокой скорости поиска. Для чего рассматривается коллекция документов, которые считаются как список записей, содержащий каждый из них в себе некоторый набор слов, символов в контролируемом алфавите. Вводится дополнительная информация, которая используется при поиске, распознавание, классификации и повышении достоверности информации.

Механизмы основаны на поиск по сходству структурных единиц и ключевых концептов ЭД. Результаты сортируются по значениям коэффициента релевантности документа.

Семантическая сеть поиска документа по ключевым концептам позволяет выбирать наиболее релевантных документов, при этом объединяются процедуры выполнения логических операции, отыскиваются документы по элементам и концептам.

Наиболее часто, встречающихся концепты документа предполагают формирования и использования набора смысловых (ассоциативных) связей элементов и отношений концептов.

Достоверность информации проверяется на основе определения сходства контролируемого документа с эталонным документом из БД.

Обобщенный алгоритм повышения достоверности информации, при малом значение коэффициента релевантности и большом размере выборки данных будет обусловлен увеличением размера вычислительных операции.

В связи с этим требуется использование механизмов регулирования переменных механизмов структуризации, индексирования, форматирования ЭД с целью обеспечения меньшего

времени поиска объекта, чтобы происходило расширение пропускной способности семантической сети, уменьшение интервала времени поиска начиная от момента запроса до момента получения ответа пользователем.

Дальнейшее совершенствование обобщенного алгоритма повышения достоверности информации основываются на следующие механизмы:

- выполнения поиска ЭД по атрибутам с возможностью логического совмещения с алгоритмом поиска по текстам;
- использования эвристических методов поиска (с отжигом, стохастическим моделированием на основе усеченной цепи Маркова), которые позволяют оперативно отслеживать изменения в идентифицируемых документах, одновременно они сводят к минимуму времени поиска;
- использование инструментов таких, как:
- краулер - сбора документов с заданного множества интернет-сайтов или других источников для последующей индексации;
- индексатор - поискового индекса по коллекции документов;
- сервер, обслуживающий поисковые запросы с использованием поискового индекса;
- клиентские средства - набор программных библиотек и утилит на различных языках программирования, служащих для взаимодействия с сервером поиска.

На рис 1. дана схема обобщенного алгоритма на основе которого построена технология обработки информации ЭД.

Новая технология обладает дополнительными возможностями за счет решения следующих задач: загрузки модуля, вызова адреса документа из БД, удаления из кода скрипта, картинки и загрузки полученного документа в БД; разбиения текста в виде элементов, концептов документа, выбора и отправки документов в БД; заносит слова в хранилище слов, встречающихся в документе, а сам документ помещается в хранилище индексирования; производить обработки ссылок, заполняет ссылки, если он получает ссылку на документ ранее не проиндексированный, то отправляет его в хранилище; вызывает документ, определяет количество входящих и исходящих ссылок, рассчитывает вес документа относительно запроса клиента.

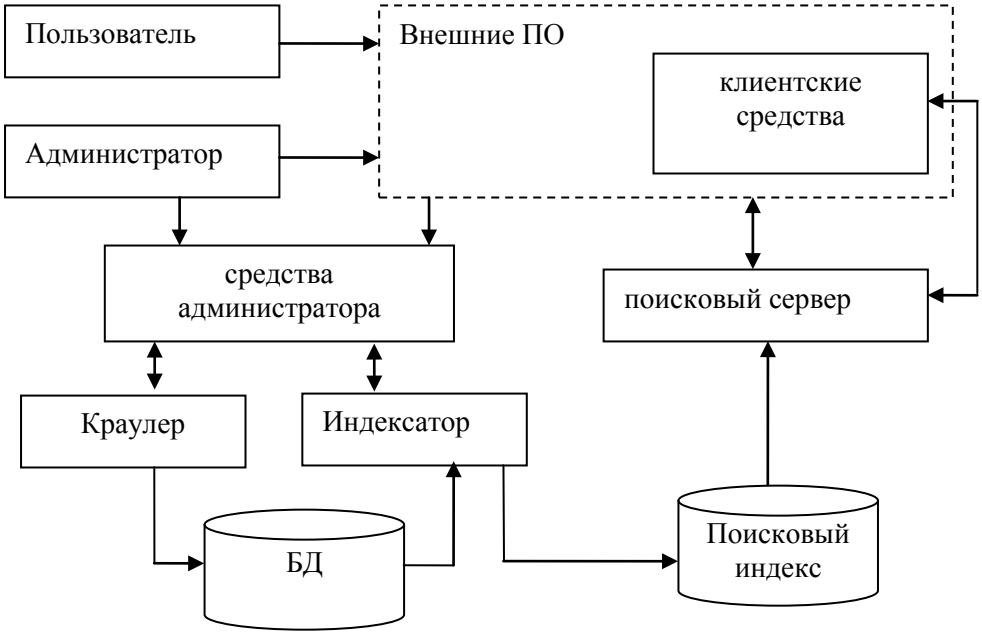


Рис. 1. Обобщенная технология обработки информации ЭД.

Технология включает также следующих дополнительных инструментов:

- «хранилища», который хранит адреса документов, страниц, ставит в очередь на индексацию, помечает страницы запрещенных к индексации, а также определяет период индексации;
- «ссылки», на документы, определяет веса ссылки, дату индексирования, ссылки на документ и др.;

- «индексы», производит поиск часто встречающихся контролируемых слов, элементов, концептов, документов;
- «документы» с текстами без рисунков и скриптов;
- «кеш»- документы, которые хранятся для выдачи по запросам;
- «статистика», которая формируется согласно запросам;
- «организация сетевых роботов», механизм которых обходит по сети поиска документов, запрещает индексации документов, не соответствующих правилам проверки достоверности;
- «обработки ссылок», механизм которых находит новые документы по ссылкам и отправляет их в очередь на индексацию;
- «ранжирование» механизм, который выбирает документы, удовлетворяющих запросам, сортирует их в порядке уменьшения ранга;
-«получение результата» механизм, который выдает ее пользователю.

Благодаря использованию MySQL storage engine на платформе C++, монолитный и дельта-индекс с возможностью распределённого поиска сеть работает с булевым поиском по концептам с возможностью группировки, ранжирования и сортировки результатов.

Анализ результатов. Для тестирования реализации обобщенного алгоритма сформированы организационно – распорядительные документы (ОРД), циркулирующие в деятельности канцелярии Самаркандского государственного университета.

Реализован комплекс программ обработки ЭД с механизмами регулирования и настройки переменных, в структуру которого входят механизмы поиска, индексации, обработки данных, повышения достоверности информации по оценкам функции соответствия.

БЗ включает 49 правил контроля достоверности информации. Настройка переменных производится по порогу $g(s) = 2{,}5$, 5, 10.

Кроме того, в структуру обобщенного алгоритма синтезированы следующие дополнительные механизмы:

-коррекции границ, параметров функции $\mu(A)$ входных $M = \|\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ..., \alpha_{ij}, ...\alpha_{in}\|$ и выходных элементов документа $M^* = \|\beta_{i1}, \beta_{i2}, ..., \beta_{ij}, ...\beta_{in}\|$;

- редукции и настройки набора правил и данных;
- использования статистических, динамических и специфических характеристик, особенностей и свойств документа.

Для сравнительного анализа эффективности обобщенного алгоритма повышения достоверности ЭД с адаптером переменных рассмотрена традиционная технология СЭД с визуальным контролем. Сравнены также показатели качества обобщенного алгоритма без блока адаптации (АБА) и с адаптером переменных (ААП). Определено, что в условиях СЭД ААП обеспечивает более качественные результаты, чем алгоритм АБА, которые достигаются благодаря применению механизма учета изменений динамики и адаптации переменных в широком диапазоне значений. Достоверность результатов подтверждается имитационным моделированием в среде ППП MATLAB.

Литература

1. Бессонов, С. В. Оптимизация электронного документооборота в корпоративных системах: дис. ... канд. экон. наук. М., 2000 г.187 с.
2. Норенков И.П., Уваров М.Ю. База и генератор образовательных ресурсов // Информационные технологии, 2005, № 9, с. 60-65.
3. Гаврилова Т. А., Хорошевский В. Ф. Базы знаний интеллектуальных систем. СПб: Питер, 2000. 384 с.
4. Лукашевич Н. В. Тезаурусы в задачах информационного поиска. М.: Изд-во Московского университета, 2011. 512 с.
5. Келдыш Н. В. Методические основы автоматизированного решения задач ведомственного электронного документооборота. // Научно-метод. сборник № 56. / ВА МО. - М., 2009. - С.110-117 Инв. № 58592.
6. Гудов, А. М. Об одной модели оптимизации документопотоков, реализуемой при создании системы электронного документооборота Вычислительные технологии. - 2006. - Т. ГГ. спец. вып. - С. 53 - 65.

7. Жуманов И.И Концептуальные принципы и методы контроля достоверности информации в структуре пакетов передачи данных на основе статистической избыточности //«Илмий тадқиқотлар ахборотномаси» илмий-назарий, услубий журнал. – Самарқанд: СамДУ, 2013. - №1 (77) – 39-49 б.

8. Жуманов И.И., Каршиев Х.Б. Методы обеспечения достоверности электронных документов на основе структурной избыточности и лексикологического синтеза // «Наука и мир», Международный научный журнал, Изд-во «Научное обозрение», Волгоград. – №3(55), Том 1, 2018. – с. 49-51.

9. Жуманов И.И., Каршиев Х.Б. Expanding the possibilities of instruments to improve the information reliability of electronic documents of industrial management SYSTEMS // Tenth World Conference “Intelligent Systems for Industrial Automation”, WCIS-2018, 25-26 October 2018, Tashkent, Uzbekistan, ISBN: 933609-37-2-2018, – 312-316 p.

таблица 1

Методика для построения механизмов регулирования характеристик обобщенного алгоритма обработки информации

№	Механизм регулирования характеристик	Математические модели и выражения расчета	Описание, принятых обозначений
1	2	3	4
1	Коэффициента расхождения документов	$K_{расх} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} D_i(\omega_i) - \sum_{i=1}^{N_2} D_i(\omega_j)}{\sum_{i=1}^{N} D_i(\omega_i)} = \frac{K_1 - K_2}{K}$	$K_1 = \sum_{i=1}^{N_1} D_i(\omega_i)$ - числа документов с весовым элементом ω_i, который считается достоверным; $K_2 = \sum_{i=1}^{N_2} D_i(\omega_j)$ - числа документов с весовым элементом ω_j, который считается недостоверным т. е($\omega_i \neq \omega_j$); $K = \sum_{i=1}^{N} D_i(\omega_i)$ - общее число документов, представленных к проверке достоверности элементов; N - общее количество документов.
2	Частоты встречаемости ключевого концепта в документе	$IDF_i = \frac{\lg(N - n + 1)/n}{\lg(1 + N)}$	S - количество запросов; TF - частота встречаемости ключевого концепта в документе; k_1 -коэффициент принимает 1,2,.... . n-количество документов, содержащих i-е ключевые концепты;
3	Общей частоты встречаемости ключевого концепта в документе ЭД	$BM25 = \left(\left[\sum_{i=1}^{S} \frac{TF_i \cdot IDF_i}{TF_i + k_1} \right] / [2 \cdot s] \right) + 0.5$	
4	Коэффициента весов фразы в документе	$\text{doc_phrase_weight(query)} = \sum_{i=1}^{count_field} user_{weight}(field_i) \cdot LCS(query, field_i$	$count_field$ - количество полей, заданное для поиска документа; $user_weight$ - весовое значение документа в заданном поле поиска.

5	Коэффициента ранжирования	$rank_proximity_bm25 = = doc_prhase_weight \cdot 1000 + bm25 * 999$ $rank_{proximity} = doc_{prase_{weight}}$ $rank_bm25 = = sum(matching_field_weight * 1000 + + bm25 * 999$	SPH_RANK_PROXIMITY и SPH_RANK_BM25
6	Весового коэффициента документа в коллекции	$Score(d) = (\sum_{i=0}^{count(ter\min)} tf_i^q \cdot \frac{idf_i^q}{norm_i^q} \cdot tf_i^d \cdot$ $\cdot \frac{idf_i^d}{norm_i^{d-t}} \cdot boost_i^t) \cdot coord^{qd}$ $idf^t = \log(\frac{numDocs}{docFreq^t + 1}) + 1$ $norm^q = \sqrt{\sum_{i=0}^{count(ter\min)} (tf^q * idf^t)^2}$	$Score(d)$ - весовой коэффициент документа d в составе коллекции; tf_i^q - корень квадратный из частоты встречаемости $i-$ го ключевого концепта в *q*- м документе; tf_i^d - корень квадратный из частоты встречаемости $i-$ го ключевого концепта в *d*- м документе; $numDocs$ - число индексов в документе; $docFreq^t$ - число документов, содержащих *t* –е ключевой концепт; $norm_i^{d-t}$ - квадратный корень из числа элементов в *d* документе, в том же поле поиска при *t*-м ключевом концепте; $boost_i^t$ - значимость веса *t*-ключевого концепта; $coord^{qd}$ – значимость весов *q*, в документе *d*.
7	Коэффициенто в релевантности и пертинентности документа	$\mathrm{Re}l(q_j, d_k) = R_{j,k}$; $\mathrm{Re}l(d_i^{res}, q_j) \to Per(d_i^{res}, q_j)$	mod_j - модуль вычисления релевантности; $error(\mathrm{mod}_j)$ - модуль вычисления погрешности расчета релевантности. $(SF, DF_Out, DF_{inner}, GF, OF)$ - факторы, влияющие на релевантность документа;
8	Проверки метрики релевантности	$Metrika_i(\mathrm{mod}_j) \to \max$ $Metrika_error(\mathrm{mod}_j) \to \min$	$count_sf$ - количество статистических факторов; k_{sf_i} - весовой коэффициент внутреннего фактора $[0, k_{\max}]$; $k_{\max}$ - задаваемое значение весового коэффициента; k_{dfo} - весовой коэффициент внешнего фактора; k_{of_i} - весовой коэффициент
9.	Оптимизация выхода	С учетом внешних, собственных и внутренних факторов: $\mathrm{Re}l(D_i, Q_j) \longrightarrow (SF, DF_Out, DF_{inner}, GF, OF) \to \max$ Статистичность документа	

		$SF(Document) = \sum_{i=1}^{count_sf} k_{sf_i} \cdot sf_i$ Динамичность документа $DF_Out(Document, Query) =$ $= \sum_{i=1}^{\ln} \sum_{j=1}^{count_dfo} k_{dfol_o} \cdot DF_Out_{ij}$; $DF_{inner(Document,Query)} = \sum_{i=1}^{count_{dfi}} k_{dfi_i} \cdot DF_{inner_i}$, $OF(Document, Query) = \sum_{i=1}^{count_of} k_{of_i} * OF_i$	собственного фактора; sf_i - статистичность фактора. $count_dfo$ - количество внешних факторов; $count_dfi$ - количество внутренних факторов; DF_Inner_i - значение весового коэффициента внутреннего фактора; $count_of$ - количество собственных факторов; OF_i - значение весового коэффициента собственного фактора.

UDK 536.3(075.83)

KUBIK SPLAYN ASOSIDA INTERPOLYASIYALASH ANIQLIGINI OSHIRUVCHI ALGORITM VA DASTURIY VOSITALAR

H. N. Zaynidinov[1], J. O‘. Jo‘raev[2]
[1]*Muhammad Al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti*
[2]*Samarqand Davlat universiteti*
E-mail: jurayevju@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu ishda $[a,b]$ da aniqlangan, uzluksiz $f(x)$ funksiya uchun $S(x)$ kubik splaynni qurish, hamda interpolyasiyalash jarayonining yaqinlashish algoritmi va interpolyasion xatolikni aniqlashning dasturiy ta’minoti ishlab chiqilgan. Biz bu ishda uchinchi darajali, ya’ni kubik splaynlardan foydalandik. Splaynni ta’riflash formulasida koeffitsientning qiymati funksiyaning tugunlari va tugunlar orasidagi masofa orqali ifodalanadi. $d = 2$ defektli splaynlar uchun algoritmlar mutlaqo turg‘un saqlanadi. Funksiyalar va tajribadan olingan funksional bog‘lanishlarni yaqinlashtirish usullarini tadqiq qilish uchun splayn-funksiyalar usuli analitik tahlil natijasi asosida takomillashtirilgan.

Kalit so‘zlar: Kubik splayn, Splayn yaqinlashtirish, interpolyasiya, interpoyasiya xatoligi,.

Алгоритмических и программных средств на основе кубического сплайна для увиличение точности интерполяции

Аннотация. В этой работе построен кубический сплайн $S(x)$ для непрерывной функции $f(x)$, определенной на $[a,b]$, а также разработаны алгоритм процесса интерполяции и программное обеспечение для обнаружения ошибок интерполяции. Мы пользовались в данной работе из кубических сплайнов. Значение коэффициента в формуле описание сплайна определяется из узлов функции и расстояние между узлами. При $d = 2$ для дефектных сплайнов алгоритмы сохраняется абсолютно устойчивым. Для применениях приближений функции и функциональные зависимости опытов, метод функции- сплайна усовершенствован на основе аналитического анализа.

Ключевые слова: кубический сплайн, сплайн-аппроксимация, интерполяция, ошибка интерполяции.

Algorithmic and software tools based on cubic spline to increase interpolation accuracy

Abstract. In this work, a cubic spline $S(x)$ is constructed for a continuous function $f(x)$ defined on $[a,b]$, and an algorithm for the interpolation process and software for detecting interpolation errors are developed. We used in this work from cubic splines. The coefficient value in the spline description formula is determined from the nodes of the function and the distance between the nodes. When $d = 2$ for defective splines, the algorithms are kept absolutely stable. For applications of approximation, the functions and functional dependences of experiments, the spline function method is improved on the basis of analytical analysis.

Keywords: cubic spline, spline approximation, interpolation, interpolation error.

Funksiyani interpolyatsion ko‘phad yordamida yaqinlashtirish, ko‘phad yuqori tartibli bo‘lganda hisoblash xatoliklarining yig‘ilib borishi natijasida yomon yaqinlashadi. Shuning uchun oraliqni kichik oraliqlarga ajratib har birida yaqinlashtiruvchi ko‘phadni qurish ancha yaxshi natija berishi aniqlandi. Har bir bo‘lakda ko‘phaddan iborat va ma’lum tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo‘lgan funksiya splayn deb aytiladi.

Klassik interpolyasiya masalasida ko‘phadlar $[a,b]$ oraliqni o‘zida quriladi. Tugun nuqtalarni qancha ko‘paytirsak yaqinlashish shuncha yaxshi bo‘ladi. Lekin qurilayotgan ko‘phadning darajasi tugun nuqtalar soniga bog‘liq, tugun nuqtalar soni oshishi bilan ko‘phadning darajasi oshib boradi va ko‘phad koeffitsentlarini aniqlash uchun yuqori tartibli algebraik tenglamalar sistemasini echishga to‘g‘ri keladi. Klassik interpolyasion ko‘phadlarni imkoniyatlari qisman chegaralangan. Tuzilgan algebraik tenglamalar sistemasining soni tugun nuqtalarga bog‘liq ekan, tugun nuqtalar oshishi bilan algebraik tenglamalar sistemasining tartibi ham oshib ketadi. Natijada klassik polinomlar qurilishida quyidagi kamchiliklar yuzaga keladi:

- interpolyasion ko‘phad yuqori darajali bo‘lgani uchun formula qulay emas;
- yuqori darajali algebraik tenglamalar sistemasini yechish jarayonida ma’lum metodik xatoliklar paydo bo‘ladi;
- hisoblash jarayoni murakkablashishi natijasida hisoblash xatoligi qoladi.

Qurilayotgan ko‘phad tiklanayotgan funksiyaga yaxshi yaqinlashmasligi mumkin. Shuning uchun, bu nuqsonlardan qutilish maqsadida interpolyasiyalash masalasida klassik polinomlar o‘rniga splayn funksiyalar yordamida yaqinlashtirish juda katta imkoniyatlarga ega bo‘lib, tezda fanda o‘z o‘rnini topdi. Splayn yaqinlashtirish ko‘phad bilan yaqinlashtirishdan afzalligi shundan iboratki u:

- birinchidan: funksiyaga yaqinlashadi,
- ikkinchidan: hisoblash jarayoni turg‘undir.

Masalining qo‘yilishi

Faraz qilamiz $[a,b]$ da aniqlangan $f(x)$ uzluksiz funksiya berilgan bo‘lsin[1].

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$$

to‘rni aniqlab, $f_i = f(x_i), i = 0,1,\ldots,N$ kabi belgilaymiz. $f(x)$ funksiyaga va $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ tugun nuqtalarga mos $S(x)$ splayn deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyaga aytiladi:

1) har bir $[x_{i-1}, x_i]$ segmentda $i = 1,2,\ldots,N, S(x)$ funksiya uchinchi darajali ko‘phad;

2) $S(x)$ funksiya va uning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari $[a,b]$ da uzluksiz;

3) $S(x_i) = f(x_i), i = 0,1,\ldots,N.$

oxirgi shart interpolyasiyalash shartlari deb aytiladi, splayn esa interpolyasiyalaydigan splayn deb aytiladi.

Masalani echish usuli

Yuqorida qayd etilgan splayn mavjud va yagonaligini isbot qilamiz. Quyida keltiriladigan isbot splaynni qurish usulini ham aniqlaydi[1].

Har bir $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2,\ldots,N$ kesmada, $S(x) = S_i(x)$ -ni

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3 \tag{1}$$

ko‘rinishda qidiramiz.

Bu yerdagi $a_i, b_i, c_i, d_i -$ koeffitsientlar aniqlanishi lozim bo‘lgan noma’lum koeffitsientlar, bu koeffitsientlarni aniqlaymiz:

$$S_i^{'}(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \tfrac{d_i}{2}(x - x_i)^2$$

$$S_i^{''}(x) = c_i + d_i(x - x_i), \quad S^{'''}(x) = d_i .$$

tengliklarga egamiz, shuning uchun

$$a_i = S_i(x_i), \quad b_i = S_i'(x_i), \quad c_i = S_i^{''}(x_i), \quad d_i = S_i'''(x_i)$$

$$S(x_i) = f(x_i) \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

interpolyasiya shartlaridan

$$a_i = S_i(x_i), i = 1,2,\ldots,N$$

larni hosil qilamiz. $a_0 = f(x_0)$ deb aniqlaymiz. $S(x)$ ning uzluksizlik shartidan

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), i = 1,2,\ldots,N-1.$$

bundan, $S(x)$ ifodasini inobatga olib $i = 1,2,...,N-1$ uchun

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3$$

tengliklarni hosil qilamiz

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

deb belgilab, bu tenglamalarni

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, i = 1,2,...,N \quad (2)$$

ko‘rinishlarda yozib olamiz.

Birinchi tartibli hosilaning uzluksizligi

$$S_i^{'}(x_i) = S_{i+1}^{'}(x_i), i = 1,2,...,N-1, c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1}, i = 2,3,...,N \quad (3)$$

tenglamalarga olib keladi.

Ikkinchi tartibli hosilaning uzluksizligidan

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1}, i = 2,3,...,N \quad (4)$$

tengliklar hosil bo‘ladi. (2)-(4) tengliklarni birlashtirib

$$b_i, c_i, d_i, i = 1,2,...,N$$

noma’lumlarga nisbatan $3N-2$ ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. $S(x)$ ga chegaraviy shartlar qo‘yamiz. Masalan, $f^{''}(a) = f^{''}(b) = 0$ deb olish mumkin. Unda $S^{''}(a) = S^{''}(b) = 0$ bo‘lishini talab qilish tabiiydir. Bundan $S_1^{''}(a) = 0, S_N^{''}(x_N) = 0$, ya’ni $c_1 - d_1 h_1 = 0, c_N = 0$ tenglamalar hosil bo‘ladi. $c_1 - d_1 h_1 = 0$ shart $i = 1,$ $c_0 = 0$ bo‘lganda (4)- bilan bir xil bo‘ladi. Shunday qilib, kubik splaynning koeffitsientlarini aniqlash uchun quyidagi yopiq sistemaga kelamiz[2]:

$$h_i d_i = c_i - c_{i-1}, i = 1,2,...,N, c_0 = c_N = 0 \quad (5)$$

$$h_i c_i - \frac{h_i^2}{2} d_i = b_i - b_{i-1}, i = 2,3,...,N \quad (6)$$

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, i = 1,2,...,N \quad (7)$$

Bu sistemaning yagona yechimga ega ekanligiga ishonch hosil qilamiz. (5)-(7) sistemadan $b_i, d_i i = 1,2,...,N-1$ noma’lumlarni yo‘qotib, faqat c_i - noma’lumlar qatnashadigan sistemani hosil qilamiz. Buning uchun (7)- tenglamalardan ikki qo‘shnilarini qaraymiz:

$$b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$$b_{i-1} = \frac{h_{i-1}}{2} c_{i-1} - \frac{h_{i-1}^2}{6} d_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_{i-1}}{h_{i-1}}$$

Birinchi tenglamadan ikkinchini ayirib

$$b_i - b_{i-1} = \frac{1}{2}(h_i c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6}(h_i^2 d_i - h_{i-1}^2 d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

tenglikni hosil qilamiz.

$b_i - b_{i-1}$ ayirma uchun topilgan ifodani (6)- ning o‘ng tomoniga qo‘yib,

$$h_i \cdot c_i - \frac{h_i^2}{2} \cdot d_i = \frac{1}{2} \cdot (h_i \cdot c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6}(h_i^2 \cdot d_i - h_{i-1}^2 \cdot d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

yoki

$$h_i \cdot c_i + h_{i--1} \cdot c_{i-1} - \frac{2}{3} \cdot h_i^2 \cdot d_i - \frac{1}{3} h_{i-1}^2 \cdot d_{i-1} = 2(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}) \quad (8)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(5)- tenglikdan

$$h_i^2 \cdot d_i = h_i(c_i - c_{i-1}), h_{i-1}^2 \cdot d_{i-1} = h_{i-1}(c_{i-1} - c_{i-2})$$

tengliklarni hosil qilib, bularni (8)- ga qo‘ysak

$$h_{i-1} \cdot c_{i-1} + 2 \cdot (h_{i-1} + h_i) \cdot c_{i-1} + h_i \cdot c_i = 6 \cdot (\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}})$$

tenglik hosil bo‘ladi. c_i koeffitsientlarni aniqlash uchun

$$h_i \cdot c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) \cdot c_i + h_{i+1} \cdot c_{i+1} = 6(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}), i = 1,2,...,N-1 \quad (9)$$

$c_0 = c_N = 0$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistema matritsasining diagonal elementlari boshqa elementlarga nisbatan ancha katta bo‘lganligi uchun uning yechimi mavjud va yagonadir. Bu sistema uch

diagonalli bo‘lganligi uchun progonka usuli, bilan yechish mumkin. Bu holda progonka metodi turg‘undir. Aniqlangan c_i bo‘yicha b_i va d_i koeffitsientlarni oshkor formulalar ko‘rinishida yozish mumkin

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{h_i}{2} \cdot c_i - \frac{h_i^2}{6} \cdot d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, i = 1,2,...,N \tag{10}$$

$$a_0 = f(x_0)$$

$$c_0 = 0$$

$$c_{i+1} = \frac{1}{4} \cdot \left(6 \cdot \frac{f_{i+2} - 2 f_{i+1} + f_i}{h^2} - c_i\right)$$

$$a_i = S_i(x_i), i = 1,2,...,N$$

Shunday qilib, (1) - (3) va $S''(a) = S''(b) = 0$ chegaraviy shartlar bilan aniqlanadigan yagona splayn mavjudligi ko‘rsatildi.

Interpolyasiya xatoligi

$$\|s - f\| = \max_{x \in [a,b]} |s(x) - f(x)|$$

h qadam

$$h = \max_{k=1,2,...,n-1} |x_{k+1} - x_k|$$

ko‘rinishda aniqlanadi[6].

Splaynlar bilan interpolyasiyalash algoritmi

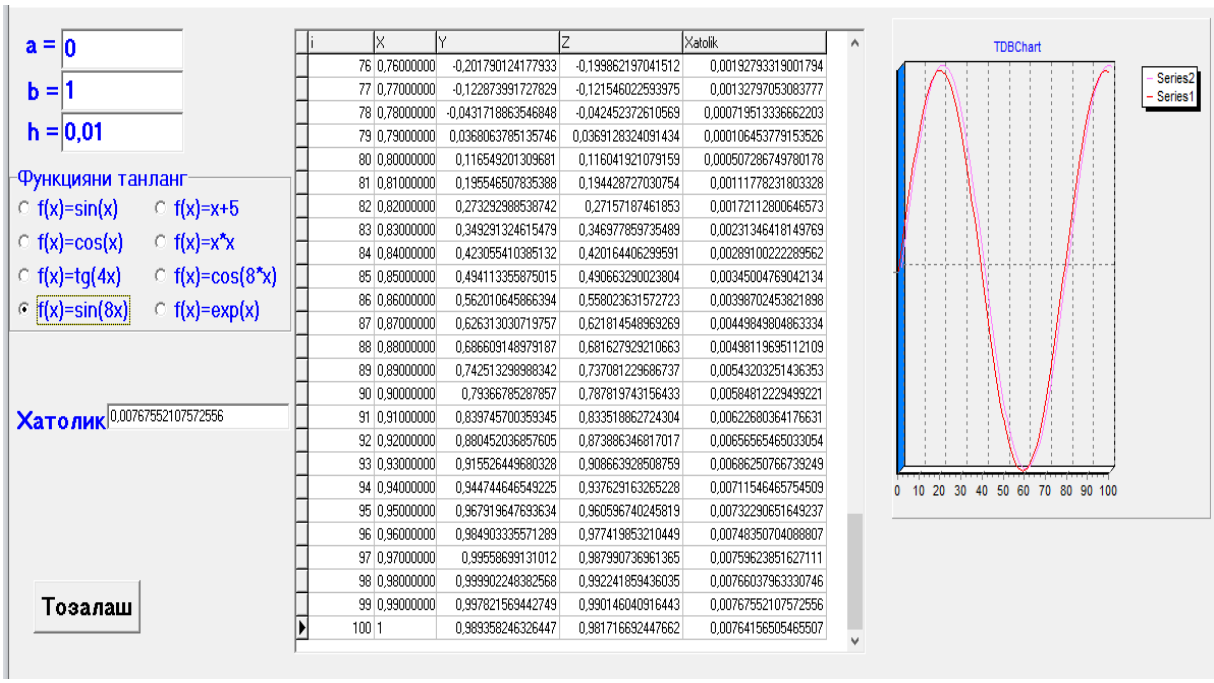
Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ segmentda $i = 1,2,...,N, S(x)$, kubik S splayn quyidagicha quriladi:

Kubik S splaynni qurish	
Tugun nuqtalar, funksiya	$n = 4;\ f(x) = x\sin(x);\ a = 0;\ b = 4;\ h = (b-a)/n;$
Interpolyasiya shartlari	$i = 0..n;\ x_i = a + ih;\ y_i = f(x_i)$
Qiymatlar	$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4;$ $y_0 = 0, y_1 = 0.8415, y_2 = 1.8186,\ y_3 = 0.4234,\ y_4 = -3.0272$
Splaynlar	$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$
Qiymatlar	$s1(1.5) = 0.868 \quad s3(1.5) = 0.98 \quad f(1.5) = 0.997$

Eksperiment natijasi

Keltirilgan nazariy tushunchalardan foydalanib splaynni qurish, signallarni raqamli ishlash, interpolyasiya xatoligini topish jarayonlarini dasturlash **Borland C++ Builder 6.0** tizimida ishlab chiqildi va tadqiqot ishi bo‘yicha kutilgan natijalar olindi:

Natijalar dasturni to‘g‘ri ishlayotganligini ko‘rsatyapti.



i	X	Y	Z	Xatolik
76	0,76000000	-0,201790124177933	-0,199862197041512	0,00192793319001794
77	0,77000000	-0,122873991727829	-0,121546022593975	0,00132797053083777
78	0,78000000	-0,0431718863546848	-0,042452372610569	0,000719513336662203
79	0,79000000	0,0368063785135746	0,0369128324091434	0,000106453779153526
80	0,80000000	0,116549201309681	0,116041921079159	0,000507286749780178
81	0,81000000	0,195546507835388	0,194428727030754	0,00111778231803328
82	0,82000000	0,273292988538742	0,27157187461853	0,00172112800646573
83	0,83000000	0,349291324615479	0,346977859735489	0,00231346418149769
84	0,84000000	0,423055410385132	0,420164406299591	0,00289100222289562
85	0,85000000	0,494113355875015	0,490663290023804	0,00345004769042134
86	0,86000000	0,562010645866394	0,558023631572723	0,00398702453821898
87	0,87000000	0,626313030719757	0,621814548969269	0,00449849804863334
88	0,88000000	0,686609148979187	0,681627929210663	0,00498119695112109
89	0,89000000	0,742513298988342	0,737081229686737	0,00543203251436353
90	0,90000000	0,79366785287857	0,787819743156433	0,00584812229499221
91	0,91000000	0,839745700359345	0,833518862724304	0,00622680364176631
92	0,92000000	0,880452036857605	0,873886346817017	0,00656565465033054
93	0,93000000	0,915526449680328	0,908663928508759	0,00686250766739249
94	0,94000000	0,944744646549225	0,937629163265228	0,00711546465754509
95	0,95000000	0,967919647693634	0,960596740245819	0,00732290651649237
96	0,96000000	0,984903335571289	0,977419853210449	0,00748350704088807
97	0,97000000	0,99558699131012	0,987990736961365	0,00759623851627111
98	0,98000000	0,999902248382568	0,992241859436035	0,00766037963330746
99	0,99000000	0,997821569442749	0,990146040916443	0,00767552107572556
100	1	0,989358246326447	0,981716692447662	0,00764156505465507

Xulosa

«Kubik splayn asosida interpolyasiyalash aniqligini oshiruvchi algoritm va dasturiy vositalar» natijalari olindi. Unda splayn usullarini tadqiq etish natijasida amalda foydalaniladigan elementar funksiyalarning katta qismi splaynlar yordamida muvaffaqiyatli ravishda aniqligini oshiruvchi usuli yaratildi. Bu usul kubik splaynning matematik apparat funksional bog‘lanishlarini doimiy koeffitsientlar va funksiyalar ko‘paytmalari yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash imkonini berdi. Bu usul yordamida biomeditsina aparatlarini sinashning splayn usuli yaratildi va ushbu usulni amalga oshiruvchi dasturiy ta’minot ishlab chiqildi. Yaratilgan usul signallarni tahlil qilish, funksiyalarni approksimatsiyalash mavjud strukturalarni takomillashtirish va yangi samarador strukturalarni yaratish va ularni texnik xarakteristikalarini yaxshilash imkonini berdi.

Adabiyotlar

1. Zaynidinov H.N., Mirzayev A.E., Khalilov S.P. The Use of The Spektral Properties of Basis Splines in Problems of Signal Processing // Journal of multimedia Information System. Vol. 5, №1, 2018. –R. 63-66. (№35), Crossref,IF=0,106.
2. Zaynidinov Hakimjon, Kim Sung Soo, Avaz Mirzaev. PiecewisePolynominal Bases For Digital Signal Processing // International Journal of Ubiquitous Computing and Internationalization. Vol.3,№1, 2011 Korea. -P 59-65.
3. Зайнидинов Ҳ.Н., Мирзаев А.Э., Халилов С.П. Примениние спектральных свойств базисных сплайнов в задачах обработки. 80-85 с.
4. Лэй Э. Цифровая обработка сигналов для инженеров и технических специалистов: практическое руководство / Э. Лэй ; [перевод с англ. ООО «Пропартнер», преводчик Соголюб Н.С.].- М.: ООО «Группа ИДТ», 2007.-336 с.
5. Ю.Н.Субботин, С.Б.Стечкин. Сплайны и вычислительная математике-М; Наука, 1976 г.
6. А.А. Самарский , А.В. Гулин , «Численные методы» . Ўқ. қўлланма, М . , Наука , 1989.

UDK: 681.14

PYTHON ALGORITMIK TILIDA FIZIK JARAYONLARNI MODELLASHTIRISH

I.N.Turakulov, N.Rabimov
Samarqand davlat universiteti

Annotasiya. Ushbu maqolada zamonaviy aloritmik tillardan biri bo‘lgan Python va uning imkoniyatlari haqida so‘z boradi. Unda hisoblash texnikasi dasturlash tillari tadqiq etiladi, sinflashtiriladi, ularning kelajagi bashoratlanadi. Pythonning imkoniyatlarini ochib beruvchi ayrim ilovalar, jumladan, jismning tekislikga nisbatan ixtiyoriy burchakda boshlang‘ich tezlik bilan otilishi va jism harakati trayektoriyasini vizuvallashtirish texnologiyasi keltirilgan.

Kalit so‘zlar: algoritmik tillar, dasturlash, Python, S++, Java, sinflashtirish, ilova, vizuvallashtirish, texnologiya.

Моделлирование физических процессов на алгоритмическом языке Python

Аннотация. В статье обсуждается функциональные возможности одного из самых современных алгоритмических языков Python. Исследуется алгоритмические языки вычислительной техники, классифицируется и предсказывается их будущее. Приводится несколько приложений, которые могут раскрывать возможности Python, таких как, перемещение объекта с начальной угловой скоростью под произвольным углом и визуализация траектории движения тела.

Ключевые слова: алгоритмический языки, программирование, Python, C++, Java, классификация, приложение, визуализация, технология.

Modeling phisical processes in algorithmic language Python

Abstract. This article discusses one of the modern algorithmic languages Python and it's capabilities. Also, languages of computer programming are classified, and studied by giving some future predictions. Some applications that open up the capabilities of Python, including the ability to initiate the object at a critical angle to the optical angle and the trajectory tracking technology.

Keywords*:* programming language, programming, Python, C++, Java, categorization, application, visualization, technology.

Dastlabki dasturlash tillari o‘tgan asrning 60-yillarda paydo bo‘lgan va ular asosan sonli hisoblashlarga mo‘ljallangan. Bu tillarda yaratilgan dasturlar ma’lumotlar saqlanadigan registr ustida bajariladigan chiziqli ketma-ket bajariladigan elementar operasiyalardan iborat bo‘lgan. Bunday dasturlash tillari “kodli dasturalash tili” deb atalgan.

Hisoblash texnikasining rivojlanishi natijasida yuqori bosqichli algoritmik tillar vujudga kela boshladi. Endi yuqori bosqichli tillardagi biror ko’rsatma (operator) quyi bosqichli tillarning bir qancha ketma-ketlikdagi ko‘rsatmalariga mos keladigan bo‘ldi. Bundan tashqari yuqori bosqichli tillarda oldin tashkillashtirilgan dastur yoki uning biror blok (qism)laridan takroriy foydalanish imkoniyati yaratildi. Bunday bloklar funksiya (prosedura)lar degan nom oldi va dasturlar tartiblashgan xarakterga ega bo‘lishdilar. Buning natijasida translyatorlar degan maxsus dasturlar paydo bo‘ldiki, ular yordamida foydalanuvchilar tomonidan inson tushinadigan algoritmik tilda yozilgan har qanday dasturni u yoki bu mashinaga xos bo‘lgan kod shaklidagi ko‘rsatmalar ketma-ketligiga aylantirish imkoniyatini berdi. Yangi dasturlash tillarining operatorlari va kalitli so‘zlari endilikda ko‘proq ma’noga ega bo‘lishdilar. Bu jarayon prosessning ishlash tezligini kamaytirsa-da ilovalar yaratish imkoniyatini bir necha barobar oshirib dasturchilar ish faoliyati samaradorligini tubdan o‘zgartirib yubordi. Ana shunday birlamchi algoritmik tillardan Algol, COBOL, Basic, Pascal, Fortran va boshqalar yaratildi. Ushbu algoritmik tillarda mavjud bo‘lgan kamchiliklarni to’ldirish maqsadida S algoritmik tili yaratildi.

Hozirda mutaxassis va foydalanuvchilar tomonidan S ning modifikasiyalangan variantlari C++, C# va Java lar keng ishlatilmoqda.

Zamonaviy dasturlash tillari xilma-xil va ularni funksional vazifalari bo‘yicha quyidagicha sinflash mumkin:

- Deklarativ algoritmik tillar (Haskell va boshqalar);
- Funksional dasturlash tillari (LISP va boshqalar);
- Mantiqiy dasturlash tillari (Prolog, Mercury va boshqalar);
- Strukturali dasturlash tillari (Basic, Pascal, Fortran, Pl/1 va boshqalar);
- Obyektlarga mo‘ljallangan tillar (Object Pascal, C++, Java);
- Komponentalarga mo‘ljallangan tillar (C#, Yeiffel, Oberon va boshqalar);
- Ssenariylarga mo‘ljallangan tillar (HTML, PHP, JavaScript, VBScript, PowyerScript, LotusScript va boshqalar);
- Parallel hisoblashlarni qo‘llovchi algoritmik tillar (Ada, Modula-2, Oz va boshqalar).

Ushbu sinflarga kiruvchi dasturlarning o‘zlariga xos bo‘lgan qator yutuqlari hamda kamchiliklari, jumladan, ko‘plab dasturiy tillarining hisoblash mashinasi operatsion tizimiga bog‘liqligi mavjuddir. Ushbu muammoni hal qilish yo‘lida qilingan harakatlar natijasida Java va Python algoritmik tillari yaratilgan.

Multiparadigmatik (dastur bir tilda ammo har xil stilda) Python tili o‘tgan asrning 80- yillarida Gollandiyaning CWI instituti xodimi Gvido van Rossum tomonidan shakllantirilgan va u 1991 yildan boshlab foydalana boshlandi. Ushbu tilni yuqorida keltirilgan algoritmik tillar sinflarining birortasiga kiritish mumkin emas. Chunki u quyidagi bir necha dasturlash paradigmalarini quvvatlaydi [1,2]:

- Strukturali dasturlash (o‘zgaruvchilar ustida strukturali hisoblashlar olib boradi);
- Obyektlarga mo‘ljallangan dasturlash (maydonlar va usullar bilan ishlaydi);
- Reflektiv programmalash (dastur o‘z tuzilmasini tahlil qilishi va dasturni bajarish vaqtida unga o‘zgartirish kiritishi mumkin);
- Imperativ dasturlash (ko‘rsatmalar va buyruqlarni to‘g‘ridan to‘g‘ri bajarish);
- Funksional dasturlash (ma’lumotlarni simvolli qayta ishlash);
- Deklarativ dasturlash (dasturchi ko‘rsatmalarga emas, balki abstrakt tushunchalarga tayanadi, ya’ni dastur komandalar jamlanmasi emas, balki bajarilishi kerak bo‘lgan harakatlar tasnifidir.

Tilning muaffaqiyatli tomonlari sifatida uning quyidagi funksiyalarni keltirishimiz mumkin:

- Ma’lumotlarni dinamik tiplashtirish;
- Xotirani avtomatik boshqaruv;
- Moduli dasturlash (funksiya va sinflar modullarga birlashtiriladi);
- Ko‘p oqimli hisoblashlarni qo‘llashlik;
- Inkorlarni qayta ishlash mexanizmining mavjudligi va boshqalar.
- Tilning interpritasiyalashuchanligi. Dasturlash vaqtida har xil interpritatorlardan, masalan, grafikli interfeyslar, kalkulyator va boshqalar foydalanishi mumkin.
- Obyektlarga mo‘ljallangan yondashuv. Bu yondashuv “Python”da boshqa tillardagi yondashuvdan quyidagilar bilan farqlanadi:
  - Sinflar dastur ichki obyektlari bo‘lishi mumkin;
  - Ko‘pvorislik quvvatlanadi;

- Sinflarning virtual polimorfizmi;
- Konstruktorlar, destruktorlarning bazaviy tuzilmasida mavjudligi;
- Metadasturlash.

Yuqorida keltirilgan faktlar asosida “Python”ni kelajak dasturlash tili sifatida e’tirof etish mumkin.

“Python”ning imkoniyatlarini ochish maqsadida fizik jarayonlar modellarini vizuvallashtirish masalasini qaraylik.

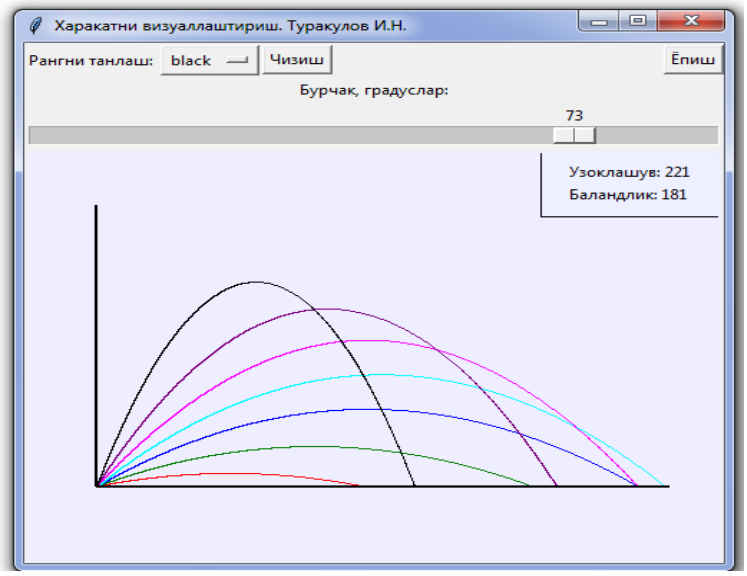
Zamonaviy taraqqiyot va kompyuter texnologiyalarining rivojlanishi jarayonlarni samarali anglash va tahlil qilish uchun ma’lumotlarni grafik (vizuval) ko‘rinishda tasvirlashni taqozo etadi [3,4]. Ayniqsa, fizik modellashtirishning vizuvallashtirilishi keng qo‘llaniladigan zamonaviy kompyuter jihozlari yordamida yaratilib o‘quv jarayoniga tatbiq etilsa, ta’lim sifati va samaradorligi oshadi.

Bugungi kunda fizik modellashtirish natijalarini vizuvallashtirish quyidagi zamonaviy paketlar orqali yaratilmoqda:

- Kompyuter algebrasi paketlari Maple, MatLab kabi dasturlar yordamida. MatLab tizimida imitasion modellashtirishda Simulink paketidan foydalanadi. Ma’lumotlarni vizuvallashtirib chiqarish uchun Simulink/Sinks paketining Display va Scope moduli ishlatiladi.
- Wolfram Mathyematica dasturi yordamida. Bu yerda vizuvallashgan interaktiv modellarni yaratishda dasturning ichki funksiyalari Dinamic Module va Manipulate foydalaniladi.
- Python dasturlash tili Matplotlib va Tkinter modullari orqali. IPython interaktiv qobiq ushbu tilning ko‘plab matematik kutubxonasi distributivi bo‘lib hisoblanadi.
- Java Simulations dasturi yordamida. Dasturning Open-Sourcye proyekti Java applet (mustaqil ishlaydigan kichik dastur)larni generasiya qiladi.

Yuqorida keltirilgan dasturlardan Python va Java Simulations hech qanday platforma (operasion tizim)ga bog‘lanmaganligi sababli fizik jarayonlarni vizuvallashtiruvchi maxsus dasturiy paketlar (jumladan, PhYeT-1.0 va boshqalar)da asosiy vosita sifatida foydalaniladi.

Quyida Python hamda dasturiy asosi Java Simulations bo‘lgan PhYeT-1.0 muhitida havo qarshiligi hisobga olinmagan holda jismning tekislikka nisbatan ixtiyoriy burchak ostida boshlang‘ich tezlik bilan otilishi jarayoni va uning harakat treaktoriyasi vizuvallashuvi natijasi keltiriladi (1-Rasm Python dasturlash tilida va 2-Rasm PhYeT-1.0 muhitida):

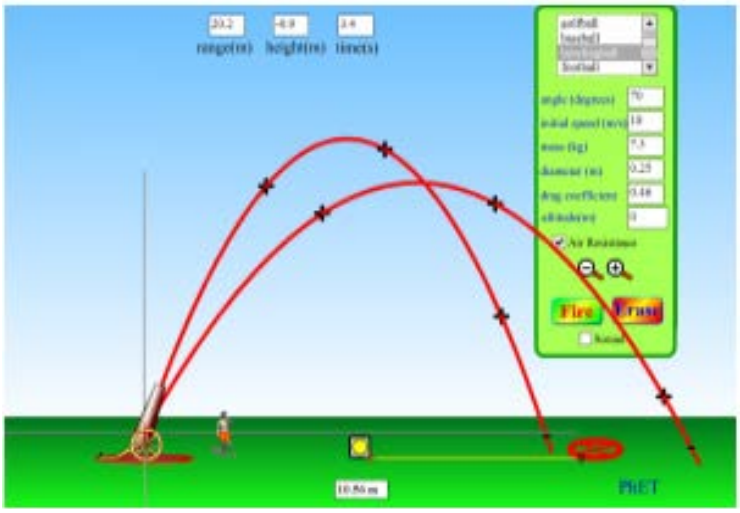


1-Rasm Python dasturlash tilida harakat modelini vizuvallashtirish

Yuqoridagilarga asosan quyidagilarni ta’kidlashimiz mumkin:

- Informatika va axborot texnologiyalari sohasida bir qancha sinflarga mansub bo‘lgan ko‘plab algoritmik tillar yaratilgan. Har bir algoritmik tillarining funksional vazifalari mavjud, lekin eng yangi algoritmik tillardan bo‘lgan Python ular ichida o‘zining universalligi va egiluvchanligi bilan ajralib turadi. Uning TIOBE reytingida 2018 yil algoritmik tili deb e’lon qilinganligi buning ifodasidir [6].
- Fizik jarayonlar modellarini vizuallashtirish ta’lim sifati va samaradorligiga katta ta’sir ko‘rsatishi adabiyotlar va internet manbalarida batafsil yoritilgan [5]. PhET-1.0-windows-installer (Physics Education Technology) dasturi Nobel mukofrti laureati K. Viman tomonidan yaratilgan «Physics Education Technology» (PhET) saytining asosiy mazmuni bo‘lib hisoblanadi. PhET dagi 100 dan ortiq tayyor modullar yordamida yuqori grafik imkoniyatlardan foydalanilgan holda fizika, matematika, ximiya,

biologiya kabi fanlarga oid jarayonlarni qoliplar asosida vizuvallashtirish imkoniyati mavjud. Qolip modullari mavjud bo‘lmagan jarayonlarni vizuvallashtirish Java Simulations tilini mukammal biladigan mutaxassislarga xosdir. Python algoritmik tilida esa har qanday jarayon matematik modelini vizuvallashtirish unchalik qiyinchilik tug‘dirmaydi. Buning uchun til sintaksisini bilishi va “Python”ning grafikli va matematik modullaridan, jumladan, tkinter, turtle, matplotlib va boshqalar foydalanishni bilish kifoya.



1-Rasm. PhET-1.0 muhitida harakat modelini vizuvallashtirish

Adabiyotlar

1. Саммерфилд Марк. Python на практике. — Перевод с английского. — М.: ДМК Пресс, 2014. - 338 с.
2. Хахаев И. А. Практикум по алгоритмизации и программированию на Python: / И. А. Хахаев. М. : Альт Линукс, 2010. - 126 с.
3. Коткин, Г. Л. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием MATLAB : учеб. пособие / Г. Л. Коткин, В. С. Черкасский // Новосиб. ун-т. – Новосибирск, 2001. – 173 с.
4. Горбунова Т.Н. Инфографика в процессе обучения / Актуальные проблемы развития вертикальной интеграции системы образования, науки и бизнеса: экономические, правовые и социальные аспекты: материалы V Международной научно- практической конференции 1-2 декабря 2016г. - Т. 2 / под ред. С.Л. Иголкина. – Воронеж: ВЭПИ, 2016. – 169 с.
5. Turakulov I.N., Hamrayev N.S. Simulyatorlar yordamida elektr zanjirlarini o‘rganishga doir virtual laboratoriyalar yaratish. SamDU ILMIY AXBOROTNOMA, 2017-yil, 1-son (101), 177 c.
6. https://www.tiobe.com/tiobe-index/

UDK: 519

COMPUTATIONAL THINKING AND GRAPHICAL SIMULATION ACROSS DISCIPLINES

Juskarman Brar, Hasan Shodiev
Wilfrid Laurier University, Canada
E-mail: hshodiev@wlu.ca

Abstract. Characteristics of the scientific phenomenon are commonly investigated using mathematical tools in science and engineering to develop our conceptual un-derstanding. However, computational thinking and modeling with simulations can result in a more advanced understanding of scientific concepts and offer an effective learning experience for students with various backgrounds. In this work, we show how a graphical simulation tools, Scratch and App Inventor, can be used to unfold the abstract side of science through project based visualizations in fun and engag-ing ways. It can be an effective approach in attracting young talented students to science and technology by motivating their natural imagination to probe scientific abstraction.

1. Introduction

The educational system is lacking in progress in implementing the computational approach to understanding nature and technology. However, the science community has developed a novel method of solving problems by simulating various phenom-ena in many science and engineering disciplines. This offers us new answers to scientific questions that are different from theory and experimentation. Computa-tional thinking (CT) in addition to critical thinking is very important when utilizing the computational approach. This can be illustrated in Figure 1. where the diagram shows a CT path parallel to critical thinking as an integral part of obtaining solu-tions.

Computational thinking emerged as a new paradigm alongside mathematical, physical, musical and other types of thinking after the availability of computers. CT in problem solving was first introduced by Dr. Seymour Papert [4]. In 1971, Dr. Papert showed the use of computational thinking in performing non computational activities. In his work, he forged ideas that are at least as explicative as the Euclid-like constructions and turtle geometry but more accessible and more powerful [5].

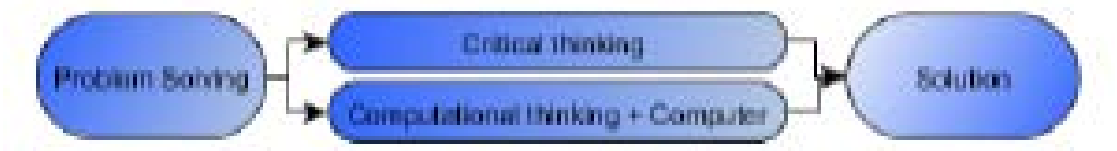


Fig. 1 2-D Problem solving model

He defined CT as a problem solving method that uses computer science tech-niques and concepts. Jeanette Wing [7] recently started reviving CT and emphasiz-ing its role across all disciplines. She argued that computational thinking is a fun-damental skill for everyone, not just for computer science majoring students. She initiated a profound engagement with the core questions of what computer science is and what it might contribute to solving problems across the spectrum of human in-quiry. We argue that advances in educational technologies allow us to bring compu-tational thinking and effectively use it in secondary and postsecondary school lev-els. We intend to help bridge the gap between the K-12, non-computer science disci-plines and the computer science education communities by investigation of relevant age appropriate resources for science, music [6], art [2] and video games [3]. In this work, we propose embedding computational thinking concepts with a universal tool called Scratch and App Inventor [1]. A key component to employing CT with Scratch and App Inventor is the possibility to visualize the phenomena which allows enhanced understanding of the concept. Programs in Scratch and App Inventor can be created by simply snapping together graphical blocks, much like LEGO bricks or puzzle pieces (see Figure 2).

(a) b)

Fig. 2 Scratch and App Inventor graphical blocks.

There is less focus on syntax, so one is not required to add semi-colons or square brackets. The blocks are designed to fit together only in ways that make sense, so there are no syntax errors as in traditional programming languages. In this study, we show an example of how Scratch or App Inventor can be used to simulate projectile motion in physics. A projectile is any object projected into space by the exertion of a force, i.e. a thrown basketball. In addition to projectile motion, we can simulate other physical phenomena in our immediate surroundings such as the motion of colliding spheres, conservation of momentum and others. Depending on the level of mathematics obtained in secondary school, we can create the simulation with and without algebraic tools. This simulation allows students not only to improve their CT through tinkering but also to focus on physics concepts themselves. Asking students to explain the concept can be preceded by asking them to simulate the projectile motion.

2. Method

Simulation without complex algebra allows us to focus on results - visualization of physical phenomena such as projectile motion. Students can play with scratch code by tinkering to get a parabolic trajectory. This can be done by either changing the angle to the horizontal or the vertical distance.

2.1. Changing the angle of launching

Suppose the projectile is launched in a direction defined by an initial angle with respect to the horizontal shown in Figure 3. This angle can be decreased by a certain amount after each iteration to reach a peak and then ultimately return to the initial y-position. In the example in Figure 4, the angle is decreased by 1 degree after every 10 steps. Simulations for three different launch angles are shown in Figure 3 and 4.

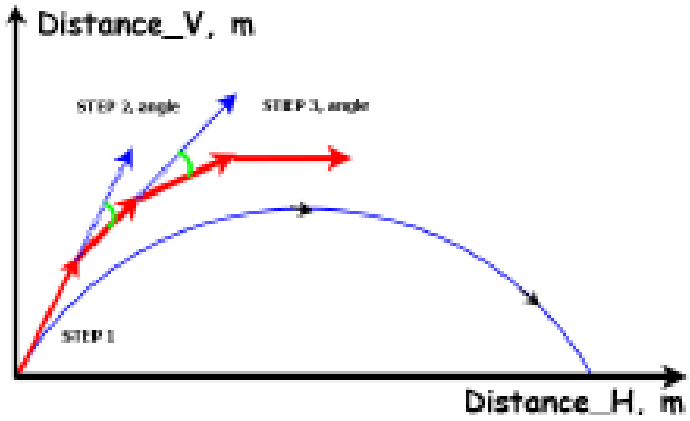
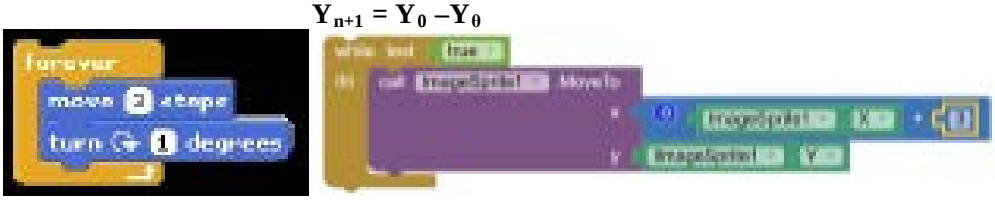


Fig. 3 Vertical distance due to the change of the launch angle.

Vertical distance change due to change of the launch angle is

$$Y_{n+1} = Y_0 - Y_0 \quad (1)$$



(a) (b)

Fig. 4 Vertical distance due to change of the vertical displacement.

so distance Y changes incrementally as the angle changes incrementally. The steps are made up of both horizontal and vertical components such that the projectile rise reaches a peak and falls with a trajectory that is symmetrical to the path towards the peak. Calculating the time of flight, the horizontal range, and the height of the projectile can be avoided at this level.

2.2. Changing the vertical displacement

We can also visualize the trajectory by changing the vertical displacement each iteration until it reaches the initial y-position as shown in Figure 5.

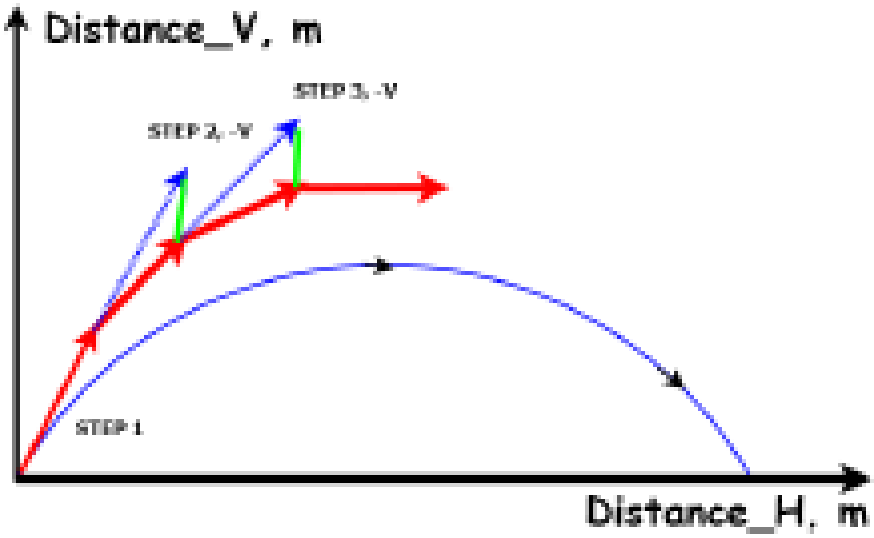


Fig. 5 Vertical distance change due to change of the vertical displacement.

In Figure 6, the vertical displacement of each iteration, which is made up of 10 steps, is decreased by 1 units. To utilize the entire screen of the scratch interface we set the initial x position to -240 and y position to -166 as (0,0). The iteration stops once a condition of reaching the y position of -166 once again is met.

Fig. 6 Vertical distance change due to change of the vertical displacement in Scratch and App Inventor

2.3. Mathematical modeling with algebra

At a higher level of mathematics, algebra can be applied to describe the behavior of a projectile. This can be done in terms of its kinematics motion without dealing with force or energy as a function of time. We assume that the initial and final y-positions of the projectile are the same. We will use the simplest example of a ball launched upwards into the air at an initial angle with respect to the horizontal and velocity. In this case, we can calculate: 1. Vertical displacement of the projectile at its peak. 2. Horizontal displacement of the projectile. 3. The launch angle that will result in the largest travel distance. We can then use these scalars and determine the speed and acceleration of the projectile. Visualization of projectile motion helps to understand the dynamics of the motion. Once we visualize the motion, it becomes much easier to answer the above questions and calculate them. This visualization using Scratch leads us to understand the concept of projectile motion in 2D. As a result, the following benefits can be gained: 1. Advanced understanding of concept 2. Advanced problem solving skills. In this simulation, DX and DY changes along the X and Y axis respectively. So using mathematics, we can determine these vertical and horizontal changes at different points in time.

$$DY = V\ xt \quad (2)$$

$$DY = V\ yt + 1/2gt2 \quad (3)$$

where Vx and Vy are x and y components of velocity respectively. As shown, the horizontal component of velocity is constant and vertical component of velocity is varying with time. The initial velocities can be calculated by multiplying the initial velocity by the cosine or sine of the launch angle

$V\ x = V \cos\theta$ (4)

$V\ y = V \sin\theta$ (5)

Fig. 7 Vertical distance change due to the change of the vertical displacement.

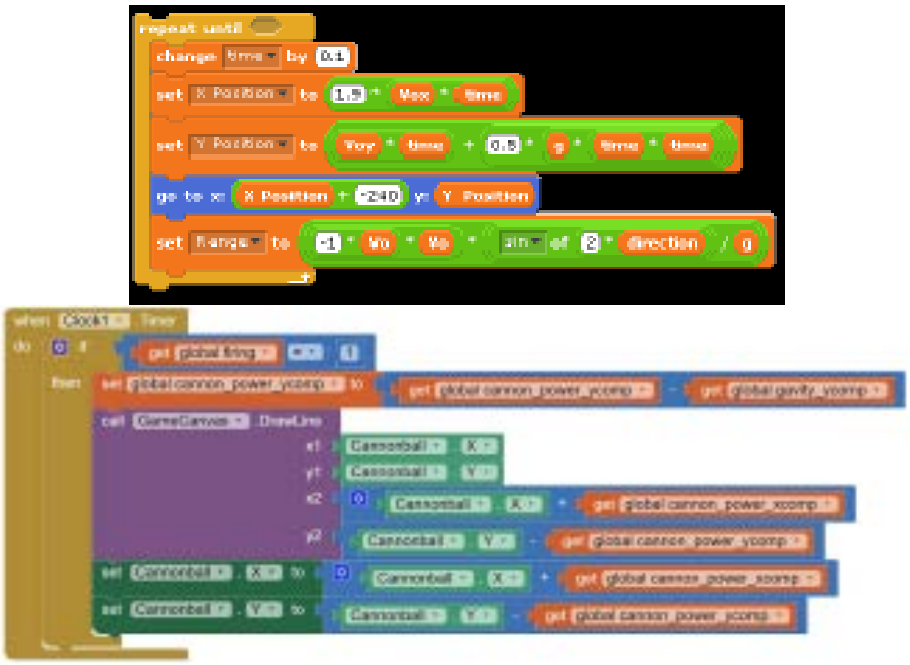


Fig. 8 Vertical distance change due to change of the vertical displacement in Scratch and App Inventor.

It is known that the projectile reaches the highest point when the Vy component of velocity is 0 m/s. The total time of travel is two times the time it takes to reach the peak vertical point. We can also determine the height H from (4) and maximum horizontal distance traveled R from equation (5). Scratch and App Inventor codes for this example is shown in Figure 8.

R = V 2sin2θ / s (6)

3. Conclusion

Understanding basic Scratch commands and control tools can help implement more trajectories and generative algorithms by creating and manipulating sequences of graphical commands. Using real life science phenomena as an example, we can cre-ate innovative and interactive visualizations to tap into the imagination of students who might never have considered science as fun and playful. Students from various backgrounds tend to be intimidated by the terminology used in science. However, with more exposure to interesting projects, students can start thinking computation-ally and actively. Computational thinking with a hands-on scratch and App Inventor graphical approaches gives them necessary confidence.

References

1. Scratch graphyical platform. -http://scratch.mit.edu.

2. Karen Brennan and Mitchel Resnick. New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. In Proceedings of the 2012 annual meeting of the American Educational Research Association, Vancouver, Canada, 2012.

3. James Paul Gee. What Video Games Have to Teach Us About Learning and Literacy. Second Edition: Revised and Updated Edition. Palgrave Macmillan, 2007.

4. Seymour Papert. An exploration in the space of mathematics educations. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1(1):95–123, 1996.

5. Seymour Papert and Cynthia Solomon. Twenty things to do with a computer. 1971. MIT AI Lab memo 248.

6. Alex Ruthmann, Jesse M Heines, Gena R Greher, Paul Laidler, and Charles Saulters II. Teaching computational thinking through musical live coding in scratch. In Proceedings of the 41st ACM technical symposium on Computer science education, pages 351–355. ACM, 2010.

7. Jeannette M Wing. Computational thinking. Communications of the ACM, 49(3):33–35, 2006.

УДК: 535.65

ЛАЗЕРНАЯ СПЕКТОСКОПИЯ МАНДЕЛЬШТАМ – БРИЛЛЮЭНСКОГО РАССЕЯНИЯ В ВОДНЫХ РАСТВОРАХ НЕЭЛЕКТРОЛИТА

Л.М.Сабиров, Д.И.Семенов, Х.С.Хайдаров, Ф.Р.Исмаилов
Самаркандский государственный университет

Аннотация. Разработана методика лазерной спектроскопии исследования смещения спектральной ширины компонент Мандельштама-Бриллюэна тонкой структуры линии Релея, вызванное модуляцией флуктуациями давления. Методика позволяет исследовать характер распространения гиперзвука ~10^9 Гц. в критической области термодинамически неустойчивости. Анализ совокупности экспериментального материала представленных в настоящей статье позволяет сделать вывод о том, что для водных растворов неэлектролитов критической концентрации изменением температуры приводит к структурной перестройке растворов в целом, происходящий при температуре, соответствующей особой точке состояния «критической точке» раствора в координатах «температура концентрация»

Ключевые слова. Спектр, концентрация, гиперзвук, критический точка, особой точка, структура, водный раствор, смещения компонента МБ, флуктуация, температура.

Elektrolit bo‘lmagan suvli eritmalarda yorug‘lik Mandlshtam – Brillyuen sochilishining lazer spekrtoskopiyasi

Annotatsiya. Bosim fluktuatsiyasi modulyatsiyasi tufayli Reley nozik strukturasining Mandelshtam-Brillyuen komponentasining spektral kengligining siljishini tadqiq etishning lazer spektroskopiya metodi ishlab chiqildi. Bu metod yordamida termodinamik turg‘un bo‘lmagan kritik sohada ~10^9 Gs chastotali gipertovushning tarqalish xarakterini tadqiq qilindi. Ushbu maqolada olib borilgan tadqiqot tahlili shuni ko‘rsatadiki, elektrolit bo‘lmagan suvli eritmalarning kritik konsentratsiyasida temperatura o‘zgarishi bilan eritmaning strukturasi qayta tiklanishi - temperatura konsentratsiya koordinatasidagi “kritik nuqta” ya’ni maxsus nuqta holatiga mos keluvchi nuqtada sodir bo‘ladi deb xulosa qilindi.

Kalit so‘zlar: Spektr, konsentratsiya, gipertovush, kritik nuqta, maxsus nuqta, struktura, suvli eritma, MB komponentasi siljishi, fluktuatsiya, temperatura.

Laser spectoscopy of Mandelstems - Brillian scattering in aqueous nonelectrolyte solutions

Annotation. In this work we developed a method of laser spectroscopy to study the frequency shift of Mandelshtam-Brillouin components in the fine structure of Reyleigh line, which are origin due to the pressure fluctuations. The method allows to study a character of hypersound (~10^9 Hz)propagation in a critical region of a thermodynamic instability. Analysis of a complex of experimental material , presented in the paper, allows one to conclude that in aqueous solutions of non-electrolytes at critical concentration there is a whole structural transformations in solutions at the singular point temperature in “temperature-concentration” coordinates.

Keywords: spectrum, concentration, hypersound, critical point, singular point, structure, aqueous solution, Mandelshtam-Brillouin, shift, fluctuation, temperature.

Хорошо известно, что в среде, состоящей из атомов и молекул, происходит хаотическое тепловое движение частиц среды - брауновское движение.

В результате брауновского движения возникают флуктуации физических величин или малые отклонения физических величин от их среднего значения определяющих термодинамическое состояния среды.

Звуковую волну в простейшем случае можно записать следующим образом:

$$A = A_0 \mathrm{Cos}\left[(2\pi ft - qr) + \varphi\right] \quad (1)$$

где A_0, f, φ - амплитуда звуковой волны, ее частота и фаза соответственно, простейшем случае эти параметры есть величины постоянные, но в ряде важны случаев они оказываются зависящими от таких переменных как время t и координата r. Здесь $|q| = 2\pi/\Lambda$ абсолютная величина волнового вектора, а Λ - длин звуковой волны.

Флуктуация термодинамической величины, такой как флуктуация давления ΔP, означает,

что в определенном месте в определенное время собрались в малом объеме молекулы, количество движения которых больше или меньше, чем среднее по объему.

Флуктуация концентрации бинарного раствора, например, ΔC означает, что в определенном месте гомогенного раствора в малом объеме собралась группа молекул, где преобладают молекулы одного или другого компонента в большей степени, чем в среднем в гомогенном растворе и т.д.

Флуктуации давления, температуры и концентрации предполагаются независимыми друг от друга. Возвращаясь к флуктуации давления следует отметить, что, возникнув, такая флуктуация обладает упругими свойствами не может оставаться на месте, но побежит внутри среды со скоростью звука.

Все эти флуктуации, так же как и все другие, здесь не рассматривающиеся возникают и рассасываются в любом месте и в любое время, постоянно заполняя собой весь объем среды.

Эйнштейн дал вполне современный способ расчета термодинамических флуктуаций, когда он решал задачу о количественном выражении интенсивности света, рассеянного на термодинамических флуктуациях плотности в чистой жидкости и на флуктуациях концентрации в растворах [1].

Двумя годами позже Дебай [2] развивая Эйнштейновскую теорию теплоемкости твердого тела, принял, что все 3N степеней свободы связанных атомных осцилляторов твердого тела следует рассматривать как энергию 3N нормальных упругих волн (здесь N - общее число частиц во всем образце).

Таким образом, Дебай рассматривает энергию теплового движения частиц твердого тела как энергию упругих волн.

С этой точки зрения флуктуации есть результат суперпозиции (интерференции) дебаевских волн. Упругие дебаевские волны могут быть представлены выражением (1), только их будет 3N - огромное количество и у них будут различные и совпадающие A_0, f, q и φ. Все эти упругие волны распространяются в самых разных направлениях и поэтому кажется, что выделить и изучить одну какую-нибудь волну из всей этой толчеи волн невозможно.

К счастью это не так и оказывается, что можно выделить любую из этих волн и изучить ее поведение, например, при фазовых переходах, что ниже и будет представлено.

Но прежде нужен способ выделения наперед заданной упругой волны которая затем будет изучаться.

<u>«Тепловой» звук</u>

Представим себе, что световая волна с длиной волны λ падает на образец сплошной материальной среды [среда, в которой длина свободного пробега атома или молекулы $\overset{\rho}{l}$ много меньше длины волны света $(\overset{\rho}{l} << \lambda)$.

Если в такой среде возникла стоячая акустическая волна[1], а при огромном количестве дебаевских волн это всегда возможно, то параллельный пучок света падающий на такую решетку, будет дифрагировать как на дифракционной решетке а дифрагированный луч света пойдет в направлении, заданном условием Брегга, именно

$$2n\Lambda \sin\frac{\theta}{2} = \lambda \tag{2}$$

n - показатель преломления.

Таким образом, при наблюдении дифрагированного (рассеянного) света под углом θ «выделяется» акустическая (дебаевская) волна с длиной волны Λ частотой $f = V/\Lambda$ (V - скорость звука), (рис.1).

Из выражения (2) и определения частоты следует, что изменение частоты вследствие модуляции света стоячей волной:

$$\pm\Delta\omega = \pm\Omega = 2\pi f = \pm 2n\frac{V}{c}\omega\sin\frac{\theta}{2} \tag{3}$$

[1] Модуляция света при дифракции на стоячей акустической волне (формула (3)) дает точно такой же результат как если бы изменение частоты происходило вследствие эффекта Допплера при отражении от волны, бегущей со скоростью звука [6]

$$V = \frac{\lambda f}{2n\sin\theta/2} \tag{4}$$

Ω, ω, c - циклическая частота звука, света и скорость света соответственно.

Из формулы (3) следует, что частота тепловой упругой волны может меняться от нуля при $\theta = \theta^0$ до $f = \frac{n}{\pi}\cdot\frac{V}{c}\omega$ при $\theta = 180^0$. Самая большая скорость V у алмаза и $f = 6\cdot 10^{10}$ Гц для λ=5144 $\overset{0}{A}$

Таким образом описанный здесь метод акустических исследований позволяет изучать особенности распространения звука, частота которого не выше -10^{10} - 10^{11} Гц, что на три - четыре порядка ниже границы спектра упругих колебаний в твердом теле, но достаточно велика, чтобы обнаружить, например, дисперсию скорости звука. Изучение низкочастотного звука (при $\theta \cong 0$) возможно, но представляет собой трудную экспериментальную работу. Наиболее комфортабельна работа этим способом при углах рассеяния в области $\theta = 90^0$

Эффект модуляции рассеянного света тепловыми волнами предсказали независимо друг от друга Мандельштам [1] и Бриллюэн [5], экспериментально наблюдал Гросс [3] см. также [4].

На рис.2 представлен спектр света, рассеянного в водном растворе в критической концентрации. На нем можно видеть смещенные компоненты Манделынтама-Бриллюэна и несмещенную релеевскую линию, вызванную флуктуациями энтропии.

В ту же линию дает вклад свет, рассеянный на флуктуациях концентрации растворах.

Полная теория явления дает количественное выражение для распределения интенсивности по частотам в компоненте Манделынтама-Бриллюэна [1].

Из этого выражения следует, что полная ширина δω компоненты (ширина на половине максимальной интенсивности компоненты) определяется выражением:

$$\delta\omega = 2\alpha V \tag{5}$$

Здесь α - амплитудный коэффициент поглощения звуковой волны, V - скорость гиперзвука, определенная по смещению $\Delta\omega$ (рис.2, формула 4)

Таким образом, изучение спектра света молекулярного рассеяния позволяет найти все основные характеристики упругой волны.

При наблюдении рассеянного света под углом $\theta = 90^0$, например, в жидкости могут быть получены акустические характеристики волны частоты $\omega \approx 10^9$ Гц.

Полная информация теоретических и экспериментальных достижений спектрального состава молекулярного рассеяния света представлена в монографии Фабелинского И.Л. [1]

Здесь мы только отметим, что приложена в практику исследования МРС современных источников света – лазеров, позволили существенно увеличить спектр практического применения метода МРС в изучении самых тонких физических процессов в жидкостях в различных термодинамических состояниях

В настоящей работе мы изложим основные результаты измерения характера распространения высокочастотного звука в растворах обладающих минимумом термодинамической стабильности в окрестности особой критической точке.

Остановимся кратко на основных характеристиках и свойством особой точки растворов.

Существуют специфические нерасслаивающиеся бинарные растворы (например, водные растворы неэлектролитов), которые обладают многими свойствами расслаивающихся растворов. В частности, по мере приближения к определенной концентрации и температуре раствора наблюдается рост флуктуаций. Принято говорить, что эти растворы обладают особой точкой. Этой терминологии мы будем придерживаться и дальше. В настоящее время нет единого мнения о природе этих растворов, обладающих температурным минимумом стабильности. В особой точке или вблизи нее в растворах обнаружены максимумы в интенсивности рассеянного света и в коэффициенте поглощения ультразвука. Предполагается, что растворы, имеющие особую точку, можно уподобить растворам с замкнутой областью расслаивания, полагая, что область расслаивания стянута в точку. Соответственно, предполагается, что особая точка раствора родственна двойной критической точке (ДКТ), а последняя генетически связана с верхней и нижней критическими точками расслаивания бинарного раствора [10,13-14].

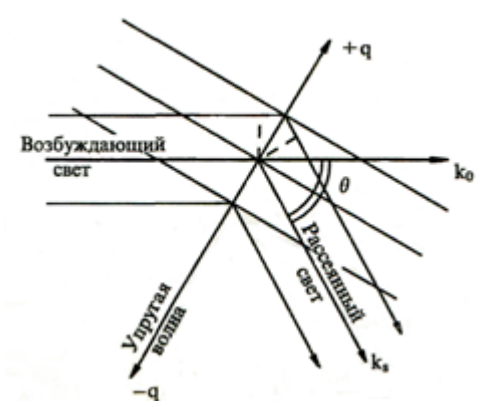


Рис.1. Схема рассеяния (дифракции) света на стоячей упругой тепловой волне. $\pm q$ - волновые вектора тепловых упругих волн, k_0 - волновой вектор возбуждающего света, k_S - волновой вектор рассеянного света, θ - угол рассеяния.

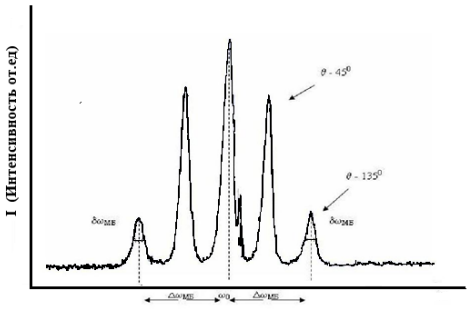


Рис.2. Спектр света рассеянного в ацетоне $\pm\omega = (\pm 2\pi f)$-смещение компонент Манделыптама-Бриллюена (КМБ) относительно центральной (Релеевской) линии определяемое скоростью звука, частотой звука и углом рассеяния θ (формулы 3,4) $\delta\omega$ - полуширина КМБ, определяемая коэффициентом поглощения тепловой звуковой волны (формула 5).

Механизм, ответственный за образование замкнутой области расслаивания и последующую ее трансформацию в особую точку, был предложен в [8,9], и мы изложим его, следуя этим работам.

Известно, что существует класс бинарных смесей, обладающих верхней критической температурой расслаивания (ВКТР). Они гомогенны только при температурах, превышающих критическую (T_K). Кривая сосуществования в этом случае выглядит так, как изображено на рисунке (рис.3-а). Если бинарный раствор гомогенен только при температурах ниже, чем T_K, то говорят о наличии нижней критической температуры расслаивания (НКТР) с кривой сосуществования, изображенной на рисунке (рис.3-b). Наряду с этим существуют бинарные смеси с замкнутой кривой сосуществования. Такая смесь дважды бывает в гомогенном состоянии: при температурах выше температуры НКТР и ниже температуры ВКТР. Замкнутой кривой сосуществования (рис.3-с) обладают обычно бинарные растворы неэлектролитов, компоненты которых способны при определенной температуре образовывать водородную связь.

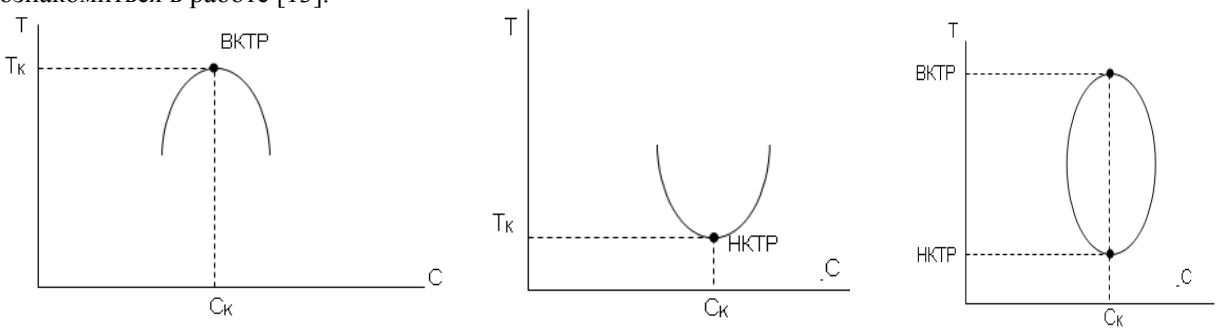
И в том, и в другом случае за счет изменения сил ван-дер-ваальсовского взаимодействия и водородных связей изменяется термодинамическое состояние раствора. Анализ фазовой диаграммы системы метонол-н-гептан [15-16], построенной по изменению теплоемкости, показал, что в результате уменьшения содержания воды область расслаивания смещается. Подобное изменение области расслаивания наблюдается также при наложении избыточного внешнего давления. Ниже, привлекая исследования Шнайдера и др. [21-23], мы покажем, как при изменении давления в растворе происходит «стягивание» замкнутой кривой сосуществования в двойную критическую точку (ДКТ), а затем - трансформация последней в особую точку раствора (точнее, в целую линию особых точек).

Особой точкой обладают растворы, концентрационные и температурные координаты которых хотя и совпадают с соответствующими координатами двойной критической точки $C_{ДКТ}$ и $T_{ДКТ}$, но из-за отличающегося значения давления (существенно большего или меньшего, чем в критическом растворе) пребывающие в ином термодинамическом состоянии.

Следует отметить, что термодинамическим состоянием раствора можно управлять не только изменением давления (P), но и добавлением к раствору третьей компоненты.

Рисунок (рис.4) заимствован нами из [17-19]. Кривые сосуществования в растворах метилпиридинов в воде представлены в этих работах в трехмерном пространстве с координатами T, C, P. Нулевая точка на оси давлений P соответствует нормальному атмосферному давлению P_H. Областью «отрицательных» давлений считается область при $P<P_H$; соответственно, положительными приняты давления $P>P_H$. На рисунке (рис.4) схематически представлена кривая

сосуществования для водного раствора 3-метилпиридина (β-пиколина) и ее динамика при изменении давления. С многообразием форм кривых сосуществования в разных растворах можно ознакомиться в работе [13].



a - с верхней критической температурой расслаивания; b - с нижней критической температурой расслаивания; c - с замкнутой областью расслаивания

рис.3 Фазовые диаграммы растворов

Как видно из рисунка, при повышении давления замкнутая область кривой сосуществования растворов метилпиридинов в воде постепенно стягивается в ДКТ. При дальнейшем увеличении давления мы получаем раствор, обладающий особой точкой, точнее - непрерывный ряд растворов, обладающих особой точкой. Дальнейший рост давления приводит к образованию второй ДКТ и области расслаивания при повышенных давлениях. Следует отметить, что для 2-, 3-, 4-метилпиридинов с H_2O, а также для 4-метилпиридина(γ-пиколина) с D_2O «купол расслаивания» (в координатах P, T, C) при низких давлениях смещен в сторону «отрицательных» давлений, и ДКТ расположены в области «отрицательных» давлений.

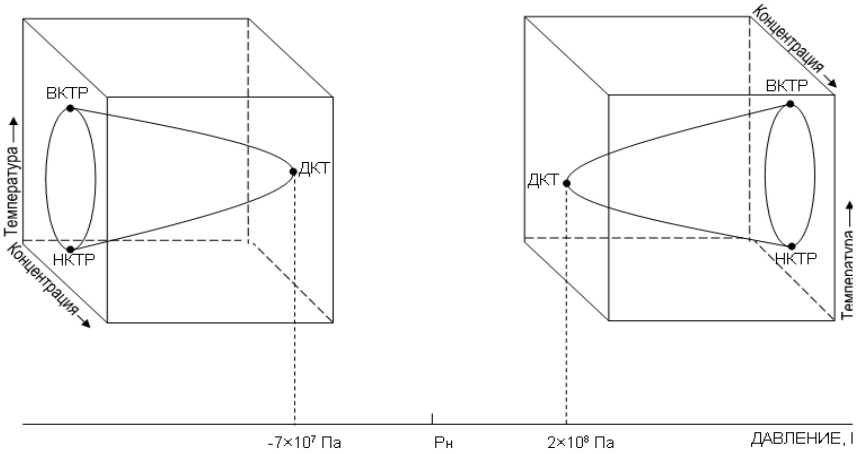


Рис.4 Схема фазовой диаграммы (P, T, C) для растворов β-пиколин-вода

При высоких давлениях $(2\cdot10^8 \div 5\cdot10^8\,Па)$ все монометилпроизводные пиридина с H_2O и D_2O образуют второй «купол расслаивания» (рис.4) причем для 3-метилпиридина с D_2O «купола» сливаются, образуя «перемычку» (то есть расслаивание происходит при всех значениях давления); 2-метилпиридин с D_2O образует уже при нормальном давлении замкнутую область расслаивания, которая при небольшом повышении давления стягивается в ДКТ, а при $(P > 2\cdot10^8\,Па)$ образуется новая область расслаивания [13].

Кроме того, в [10,13,17,18] показано для растворов монометилпиридинов и пиридина с водой, что при добавлении в растворы солей, в зависимости от типа соли и её концентрации, положение «купола расслаивания» сдвигается по координате давления.

Из всего этого следует, что идентификация растворов, обладающих особыми точками, очень затруднительна даже в нашем частном случае. Дело в том, что изучение растворов методом светорассеяния требует тщательной очистки жидкости. Наиболее оптически чистые растворы получаются при многократной перегонке раствора под вакуумом. При этом очень трудно в процессе

измерений проконтролировать давление в эвакуированной и отпаянной кювете с раствором. Термодинамическое состояние приготовленного раствора метилпиридина с водой может соответствовать любому значению координаты P на линии, соединяющей обе ДКТ. Реальнее всего, по-видимому, эта точка расположена ближе к ДКТ в области «отрицательных» давлений (вследствие эвакуации атмосферного воздуха в процессе подготовки кюветы с раствором).

Известно, что в ультразвуковых и гиперзвуковых экспериментах непосредственно характеристики флуктуаций параметра порядка (в данном случае – флуктуаций концентрации) не измеряются. Однако в результате взаимодействия звукового поля с флуктуациями параметра порядка вблизи ДКТ и особой точки могут наблюдаться аномалии как в поглощении, так и в скорости распространения звука. Ниже мы рассмотрим имеющиеся на настоящий момент экспериментальные данные, касающиеся характеристик распространения звука вблизи ДКТ и особой точки. Необходимо отметить, что данному вопросу посвящено ограниченное число работ, и настоящие спектроскопические исследования помогут значительно восполнить этот пробел.

Таким образом, данные по распространению ультразвука в области ДКТ позволяют сделать вывод, что либо избыточное поглощение ультразвука во всяком случае не превышает значений, наблюдаемых вблизи одинарной критической точки «жидкость-жидкость», либо это поглощение даже меньше. Однако характер избыточного поглощения остается прежним - обусловленным взаимодействием флуктуации параметра порядка со звуковой волной.

Исходя из этого, следует ожидать, что на высоких гиперзвуковых частотах избыточное поглощение звука вблизи особой точки раствора будет пренебрежимо малым. Это обусловлено тем, что типичная для рассеяния Мандельштама-Бриллюэна частота гиперзвука ($4.5\cdot10^9$ Гц) очень велика по сравнению с частотою релаксации (10^7 Гц), обусловленной диффузионным механизмом диссипации энергии звука [22-23]. Однако, гиперзвуковые экспериментальные данные в области особой точки, полученные методом Мандельштам-Бриллюэновского рассеяния света [24,25], обнаружили аномалии в поглощении гиперзвука в растворах ацетон-вода и β-пиколин-вода.

В растворе ацетон-вода измерения скорости и поглощения гиперзвука велись одновременно на частотах 6.2 и 2.6 ГГц [25]. В температурной зависимости скорости наблюдалась выделенная область $(293 \div 303)$ К, где температурный коэффициент скорости звука $d\vartheta/dT = 0$ d, а выше и ниже её (по температуре) температурные коэффициенты различались по величине.

Если на частоте 6.2 ГГц в зависимости α/f^2 в области температур от 293 до 303 К проявилась небольшая немонотонность, то на частоте -2.6 ГГц наблюдались два четко выраженных максимума в ограниченной области температур (295÷297.6 К), разделенные минимумом $(296.5 \div 297K)$. При температурах $(293K > T > 299.5K)$ поглощение слабо зависит от температуры и частоты. В области минимума значения α/f^2 одинаковы и для частоты ~6.2 ГГц и для ~2.6 ГГц. В пределах ошибок эксперимента дисперсия звука в растворе ацетон-вода в диапазоне частот 2.8 МГц ÷ 6.2 ГГц не обнаружена.

В растворе β-пиколин-вода измерения проводились только на частоте 4.6 ГГц. Был зафиксирован один максимум в зависимости α/f^2 от температуры, но сам ход зависимости [α/f^2](T) указывал на возможность появления второго максимума при более высоких, не исследованных температурах. Температурный коэффициент скорости гиперзвука $d\vartheta/dT$ был равен нулю в области максимума поглощения. При этом при температурах выше и ниже области максимума поглощения температурные коэффициенты скорости гиперзвука были отличны от нуля и существенно различались между собой. Температурная кинетика скорости ультразвука, исследованная на частоте 2.8 МГц, в растворе той же концентрации [22], аналогична наблюдавшейся для гиперзвука. Сравнение величин скоростей ультра- и гиперзвука выявило [24] положительную дисперсию скорости в интервале температур 313÷333 К, исчезающую в пределах ошибок эксперимента при повышении температуры.

Таким образом, природа наблюдавшихся различий температурных коэффициентов скорости и максимумов в поглощении гиперзвука в растворах с особыми точками остается невыясненной и требует дальнейших исследований. Для решения этой проблемы нам кажется целесообразным проведение тщательных температурно–концентрационных исследований частотного смещения

компонент Мандельштама-Бриллюэна в таком классе водных растворов в окрестности их особой точки устойчивости.

Достоверные исследования спектрального распределения интенсивности в спектрах тонкой структуры линии Рэлея стали возможными лишь благодаря применению лазерных источников света и высококонтрастных интерферометров. Существует большой круг физических задач, для решения которых разрешающая сила достаточна, но не хватает контраста при обычной схеме использования интерферометра Фабри-Перо. Недостаток контраста означает, что нельзя изучать слабые сателлиты линий спектра на фоне спектральных линий большой интенсивности [1]. Такая ситуация возникает и при исследовании смещения компонент Мандельштама-Бриллюэна в критических точках растворов, когда интенсивность центральной компоненты тонкой структуры линии Рэлея превышает на 3 и более порядков интенсивность КМБ (критическая опалесценция) [1]. Большая интенсивность на несмещенной частоте приводит к тому, что слабая смещенная линия КМБ маскируется «хвостом» центральной линии и поэтому из-за малого контраста спектральной картины наблюдение КМБ оказывается затруднительным, а в ряде случаев даже невозможным. По этой причине спектральные исследования тонкой структуры в окрестности критических точек до настоящего времени были весьма ограничены.

Один из способов повышения контраста спектрального распределения, получаемого с помощью интерферометра Фабри-Перо, основан на прохождении анализируемого света через интерферометр несколько раз [27].

Существует ряд специфических нерасслаивающихся бинарных растворов (водные растворы неэлектролитов), у которых в определенной области концентраций и температур поведение ряда их физических характеристик (интенсивность рассеяния света, поглощение ультразвука, теплоемкость C_P, взаимная диффузия и др.), имеет немонотонный характер с выраженными максимумами (минимумами). Эти особенности объясняются рядом авторов наличием в этих растворах развитых флуктуаций концентрации. По мере приближения к некоторой определенной концентрации x_0 и температуре t_0 в растворе имеет место рост флуктуаций концентрации, сопровождающийся увеличением радиуса корреляции этих флуктуаций [11,30,31].

Однако, не все экспериментальные факты, известные для водных растворов неэлектролитов, могут быть объяснены таким образом. Показательными в этом плане являются исследования интенсивности рассеяния света. Известно, например, что некоторые водные растворы неэлектролитов обнаруживают два максимума на концентрационной зависимости интенсивности светорассеяния (на это впервые обратил внимание М.Ф. Вукс). К таким растворам относятся, в частности, растворы спиртов в воде.

Увеличение температуры раствора приводит к росту флуктуаций концентрации и, соответственно, к росту интенсивности светорассеяния.

Наличие дополнительного, сравнительно узкого, максимума светорассеяния в области малых (0.03÷0.05) концентраций ТБС в воде вызвало оживленную дискуссию относительно природы наблюдаемого явления. Необычно температурное поведение этого максимума: с увеличением температуры раствора интенсивность светорассеяния уменьшается*.

Поведение интенсивности рассеянного света в водных растворах метилпиридинов в зависимости от концентрации и температуры раствора качественно может быть объяснено ростом флуктуаций концентрации. Однако, в такую трактовку результатов измерений оптических характеристик растворов существенным диссонансом входит ряд результатов исследований их ультраакустических параметров, анализ которых позволяет предположить проявление эффекта увеличения «жесткости» структуры растворов в области малых концентраций.

Как видно из вышесказанного, даже такой частный вопрос о физических процессах, обуславливающих аномальное поведение интенсивности светорассеяния при изменении концентрации и температуры водных растворов неэлектролитов, в настоящее время остается открытым.

Водные растворы третичного бутилового спирта – предмет интенсивных исследований различными методами, что объясняется многочисленностью особенностей их физических характеристик. Например, наблюдается рост длины корреляции флуктуаций, как при повышении, так и при понижении температуры, причем положение минимума длины корреляции меняется с концентрацией [20]; два максимума в концентрационной зависимости интенсивности рэлеевского

* По этой причине максимум в интенсивности рассеяния света в водных растворах неэлектролитов в области малых концентраций часто называют аномальным максимумом.

рассеяния света на концентрациях 0.03÷0.05 м.д. и 0.17÷0.2 м.д. ТБС [32], имеющие различные температурные зависимости; максимумы в температурной зависимости теплоёмкости, которые изменяют положение по шкале температуры с изменением концентрации раствора [20,33]. Предполагается [20], что все эти экспериментальные факты являются признаками близости фазового перехода «жидкость-жидкость», которые проявляются как при высоких, так и при низких температурах. Есть предположение (впервые на это обратил внимание М.А. Анисимов [20]), что могут осуществляться фазовые переходы типа «порядок-беспорядок» в жидкостях, имеющих квазикристаллическую структуру, когда ближний кристаллический порядок захватывает, по меньшей мере, несколько межмолекулярных расстояний. В таких жидкостях возможны фазовые переходы, связанные с перестройкой структуры в пределах масштаба, который соответствуют ближнему кристаллическому порядку. Наконец, в работе [20] развита концепция существования в таких растворах целой линии переходов.

Наши температурные и частотные исследования в водных растворах ТБС с концентрацией* 0.19 м.д. и 0.04 м.д., в сочетании с экспериментальными и теоретическими результатами, полученными другими авторами, дают основание предположить качественную картину наблюдаемых явлений, подтверждающую вышеуказанную интерпретацию.

На график 5a и 5b представлены полученные нами температурные зависимости величины смещения $\Delta\nu$ КМБ для угла рассеяния света 90^0 в растворе ТБС-вода с «критическими» концентрациями 0.19 и 0.04 м.д., при которых наблюдается максимум интегральной интенсивности спектрально неразложенного света [30].

Как видно из представленных на график 5a результатов, в зависимости $\Delta\nu(t)$ как для концентрации 0.04 м.д., так и для концентрации 0.19 м.д. можно выделить как минимум два температурных интервала, в которых изменение величины $\Delta\nu$ имеет различный характер.

Для раствора с концентрацией 0.04 м.д. увеличение температуры от 25 до 43 ^{0}C приводит к уменьшению $\Delta\nu$. Поведение $\Delta\nu$ в этом интервале температур хорошо описывается линейной зависимостью от t с температурным коэффициентом $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}\approx$-0.9×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C. При температуре ~43 ^{0}C происходит скачкообразное уменьшение величины $\Delta\nu$. В интервале температур от 44 до 82 ^{0}C поведение $\Delta\nu$ также хорошо описывается линейной зависимостью от t, но уже с другим температурным коэффициентом $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}\approx$-1.5×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C.

Таким образом, для раствора с концентрацией 0.04 м.д. при температуре около 43 ^{0}C имеет резкое изменение характера температурного поведения смещения КМБ. При этом происходит скачкообразное изменение как самой величины смещения $\Delta\nu$, так температурного коэффициента зависимости $\Delta\nu$ (t).

Похожая картина наблюдается и для раствора с концентрацией 0.19 м.д. Увеличение температуры от 6 до 33 ^{0}C приводит к уменьшению $\Delta\nu$. Поведение $\Delta\nu$ в этом интервале температур хорошо описывается линейной зависимостью от t с температурным коэффициентом $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}\approx$-7.2×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C. В интервале температур от 33 до 41 ^{0}C величина $\Delta\nu$ слабо изменяется с температурой. Температурный коэффициент смещения в этом интервале близок к нулю. В интервале температур от 41 до 85 ^{0}C поведение $\Delta\nu$ также хорошо описывается линейной зависимостью от t, но температурный коэффициент этой зависимости уже другой $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}\approx$-4.2×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C.

Таким образом, изменение температурного хода смещения КМБ $\Delta\nu$ (t) в растворе ТБС-вода при переходе из области низких температур в область высоких наблюдается как для концентрации 0.04 м.д., так и для концентрации 0.19 м.д. Однако, характер изменения $\Delta\nu(t)$ для этих растворов заметно отличается. Для раствора с концентрацией 0.04 м.д. при понижении температуры происходит скачкообразное уменьшение величины смещения КМБ при температуре

* Здесь и далее для краткости под концентрацией раствора подразумевается концентрация неэлектролита в воде.

~43 ^{0}C, сопровождающееся уменьшением температурного коэффициента смещения $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}$ приблизительно в 1.7 раза. Для раствора с концентрацией 0.19 м.д. картина повторяется с точностью до наоборот: температурный коэффициент смещения $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}$ при переходе от области низких температур к области высоких увеличивается приблизительно в 1.7 раза. Скачкообразного изменения величины смещения, как в случае концентрации 0.04 м.д., не происходит, но в небольшом интервале температур (от 33 до 41 ^{0}C) температурный коэффициент смещения близок к нулю, и величина смещения КМБ в этом интервале практически не зависит от температуры.

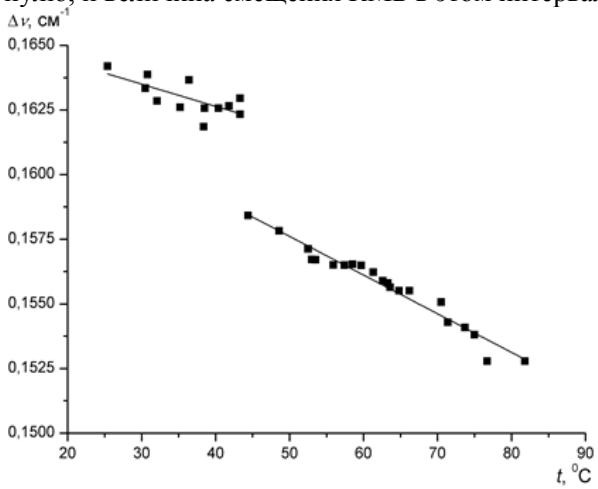


Рис. 5a Зависимость $\Delta\nu$ от t в растворе ТБС-вода (0.04 м.д. ТБС) для угла рассеяния 90^0

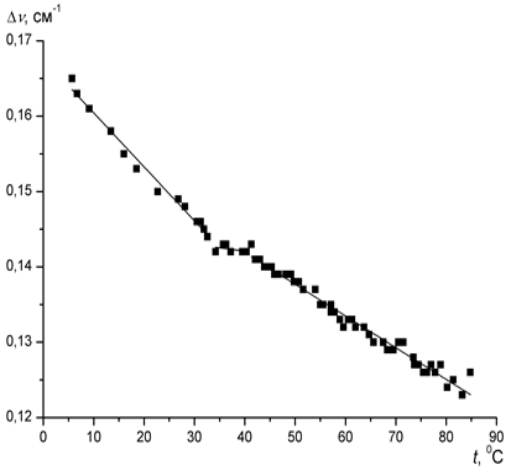


Рис.5d Зависимость $\Delta\nu$ от t в растворе ТБС-вода (0.19 м.д. ТБС) для угла рассеяния 90^0.

Общая картина поведения величины смещения при изменении температуры отличается для этих растворов также и тем, что в области низких температур отношение температурных коэффициентов смещения КМБ в растворах с концентрациями 0.19 и 0.04 м.д. равно 8 (т.е. величина температурного коэффициента смещения КМБ в растворе 0.19 м.д. в 8 раз меньше, по сравнению с раствором 0.04 м.д.), в то время как в области высоких температур это же отношение равно 2.8 (т.е. величина температурного коэффициента смещения КМБ в растворе 0.19 м.д. в 2.8 раз меньше, по сравнению с раствором 0.04 м.д.).

Наконец, к этому качественному и количественному различию в температурной зависимости величины смещения КМБ следует добавить то, что температура, при которой происходи переход («особая» точка) от зависимости $\Delta\nu$ (t) с одним температурным коэффициентом к зависимости $\Delta\nu$ (t) с другим температурным коэффициентом является разной для растворов различающихся концентраций. Другими словами каждый раствор обладает своей температурой «особой» точки: ~43 ^{0}C для раствора с концентрацией 0.04 м.д. и ~37 ^{0}C для раствора с концентрацией 0.19 м.д. Для раствора с концентрацией 0.19 м.д. «особая» точка несколько «размазана» по температуре.

Перечисленные экспериментальные факты указывают на то, состояния растворов в низкотемпературной и высокотемпературной областях существенно отличаются друг от друга. Это справедливо как для раствора с концентрацией 0.04 м.д., так и для раствора с концентрацией 0.19 м.д. Более того, немонотонное изменение величины температурного коэффициента смещения КМБ $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}$ при переходе от одного температурного интервала к другому (скачком от -0.9 до -1.5 для раствора с концентрацией 0.04 м.д., и скачками -7.2 до нуля, а затем от нуля до -4.2, для раствора с концентрацией 0.19 м.д.), указывает на то, что состояние растворов при таком переходе также изменяется скачкообразным образом.

Здесь мы можем сделать качественный вывод. Существование тонкой структуры линии Рэлея обусловлено наличием в жидкости адиабатических флуктуаций давления, распространяющихся в среде в виде упругих (гиперзвуковых) волн Эффект модуляции рассеянного света этими волнами (предсказанный, независимо друг от друга, Мандельштамом и Бриллюэном)

приводит к изменению (сдвигу) частоты рассеянного света $\Delta\nu$, которое, в свою очередь, определяется скоростью распространения гиперзвуковой волны в среде (формула (4)), т.е. таким параметром среды, как ее адиабатическая сжимаемость β_s.

Скачкообразное изменение как самой величины адиабатической сжимаемости раствора, так и ее температурного поведения могут однозначно трактоваться как изменение структуры раствора. Соответственно, изменение величины смещения КМБ $\Delta\nu$ и характера ее температурной зависимости $\Delta\nu(t)$ служат прямым указанием на проявление в спектрах рассеянного света процессов, связанных со структурной перестройкой раствора.

Анализ особенностей температурного поведения величины смещения КМБ, экспериментально зарегистрированный нами в растворах ТБС-вода с концентрациями 0.04 и 0.19 м.д., позволяет с уверенностью утверждать, что:

1. При фиксированной концентрации структура раствора существенно различна в температурных интервалах выше и ниже температуры особой точки. На это указывает скачкообразное изменение величины температурного коэффициента смещения КМБ при переходе от области низких температур к области высоких температур (от -0.9×10^{-4} к -1.5×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C в растворе с концентрацией 0.04 м.д., и от -7.2×10^{-4} к -4.2×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C в растворе с концентрацией 0.19 м.д.);

2. В фиксированном температурном интервале структура растворов различна для растворов отличающихся концентраций. На это указывает различие в величинах температурных коэффициентов смещения КМБ в области низких и высоких температур при переходе от одного раствора к другому (в области низких температур -0.9×10^{-4} и -7.2×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C для растворов с концентрациями 0.04 и 0.19 м.д., соответственно; (в области высоких температур -1.5×10^{-4} и -4.2×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C для растворов с концентрациями 0.04 и 0.19 м.д., соответственно);

3. На координатной плоскости *T-C* (*T* – температура, *C* – концентрация) существует, по-видимому, целая линия «особых» точек, которая разделяет состояния растворов, характеризующихся различной структурой. Переход от раствора с одной структурой в раствор с другой структурой может происходить как при изменении температуры раствора (для раствора с фиксированной концентрацией), так и при изменении его концентрации (для растворов с фиксированной температурой).

Обратимся к имеющимся в литературе результатам исследований водных растворов ТБС различными физическими методами, которые выявили ряд интересных явлений: рост длины корреляции флуктуации концентрации, как при повышении, так и при понижении температуры, причем положение минимума длины корреляции меняется с концентрацией [34]; два максимума в концентрационной зависимости интенсивности рэлеевского рассеяния света на концентрациях 0.03÷0.05 м.д. и 0.17÷0.2 м.д. ТБС [35], которые по-разному ведут себя при изменении температуры раствора; максимум в температурной зависимости теплоемкости C_p для растворов с концентрациями 0.07÷0.1 м.д. при понижении температуры в области температур 0-10 °C, а также рост теплоемкости при повышении температуры для концентрации 0.2 м.д. [20,36,37]. Предполагается, что все эти экспериментальные факты являются признаками проявления фазового перехода «жидкость-жидкость» как при высоких, так и при низких температурах растворов.

Как уже упоминалось, несмотря на то, что растворы, обладающие особой точкой, не расслаиваются, при определенной температуре раствора и концентрации неэлектролита в них имеют особенности, которыми обладают расслаивающиеся растворы вблизи критической точки расслаивания. Выявленный факт сдвига наблюдаемых эффектов по концентрации, а также зарегистрированные нами ранее особенности в характере изменения дисперсии скорости звука и максимум в зависимости коэффициента поглощения от температуры и концентрации, могут иметь место в случае, когда интервалы концентраций, в которых расположены предполагаемые области расслаивания, сдвинуты друг относительно друга.

Можно, таким образом, сделать предположение о том, что при изменении температуры раствора и концентрации неэлектролита в воде состояние раствора может изменяться от состояния, близкого к предполагаемой нижней критической точке расслаивания (при высоких температурах), к состоянию, близкому к предполагаемой верхней критической точке расслаивания (при низких температурах). Соответственно, при таком изменении состояния раствора должно иметь место и изменение его структуры.

Подтверждение этому служат результаты подробных температурных исследований длины корреляции ξ флуктуаций концентрации для водных растворов ТБС различных концентраций [34]. Исследовании проводились для растворов с концентрациями 0.07, 0.13, 0.20 и 0.26 м.д. ТБС в воде. Для каждой из изученных концентраций авторы зарегистрировали наличие минимума длины корреляции в температурной зависимости $\xi(t)$.

Переход от одной структуры раствора к другой, по-видимому, происходит в температурной области, где наблюдается минимум длины корреляции.

Для наглядности на рис.6 мы представили данные по длинам корреляции флуктуаций концентрации ξ из работы [34] в виде зависимости температуры минимума длины корреляции от концентрации раствора.

Незакрашеные точки на рис.6 представляют собой результаты, полученные в работе [34]. Пунктирной линией показан ход зависимости температуры, на которую приходится минимум длины корреляции, от концентрации раствора. Эта зависимость экстраполирована в область концентраций, меньших 0.07 м.д.

На этом же рисунке закрашенная точка представляет собой результат, полученный нами в настоящей работе для раствора с концентрацией 0.04 м.д. ТБС. Координата этой точки по шкале температуры соответствует той температуре (~43 ^{0}C), на которую приходится скачкообразное изменение как самой величины смещения КМБ $\Delta\nu$, так и его температурного коэффициента $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}$ (Рис.5a) Как видно из рисунка, наша точка отлично ложится на кривую, характеризующую положение минимума длины корреляции флуктуаций концентрации в растворе ТБС-вода в зависимости от температуры раствора и его концентрации.

Таким образом, полученные нами результаты для температурного поведения смещения КМБ $\Delta\nu$ не только подтверждаются результатами независимых измерений температурно-концентрационного поведения длины корреляции ξ но и в значительной степени дополняю картину поведения положения минимума длины корреляции в растворах ТБС-вода при изменении температуры и концентрации.

Согласованность результатов наших исследований смещения КМБ $\Delta\nu$ и радиуса корреляции ξ служат также дополнительным подтверждением нашего предположения о том, при определенной температуре и концентрации в растворе ТБС-вода происходит процесс структурной перестройки, причем переход от раствора с одной структурой в раствор с другой структурой характеризуется минимумом длины корреляции флуктуаций концентрации.

Для раствора с концентрацией 0.19 м.д. ситуация несколько сложнее. Как видно из, (рис.6) для этой концентрации минимум длины корреляции приходится на температуру ~5 ^{0}C. Изменение же температурного коэффициента смещения КМБ (рис. 5b) имеет место при более высоких температурах.

Подобное расхождение может иметь вполне естественное объяснение. Неконтролируемое давление в кювете с образцом в процессе приготовления оптически чистого раствора и последующей запайки содержащей его кюветы может сместить положение особой точки как по температуре, так и по концентрации.

Вместе с тем, нельзя пренебрегать возможностью того, что в области средних концентраций температура, при которой происходит структурная перестройка раствора, может, по ряду причин, не совпадать с температурой минимума длины корреляции флуктуаций концентрации. На это, в частности, могут служить указанием качественные различия в температурном поведении величины смещения КМБ для растворов с концентрациями 0.04 и 0.19 м.д. (рис.5a). Некоторые экспериментальные результаты непосредственно для раствора с концентрацией 0.19 м.д. будут приведены ниже.

Обсуждаемая концепция согласуется с теоретическими представлениями о существовании в водных растворах неэлектролитов недостижимых критических точек расслаивания, развиваемыми в работах [38,39]. Согласно этим представлениям, в водных растворах неэлектролитов малых и средних концентраций предполагается существование двух предкритических состояний - с верхней и нижней критическими температурами расслаивания, соответственно. В растворах малых концентраций это связано с гидрофобными эффектами молекул неэлектролита на фоне пространственной тетраэдрической сетки водородных связей (Н-связей) между молекулами воды; в растворах средних концентраций - с существованием

пространственной сетки Н-связей между молекулами воды и неэлектролита. Однако, эти критические точки расслаивания являются недостижимыми, ввиду того, разрушение сетки водородных связей является ограничивающим фактором при попытке достижения этих критических точек по концентрации.

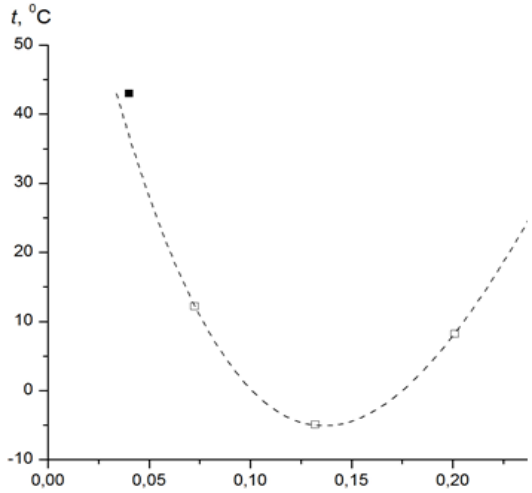


Рис.6 Положение минимума длины корреляции в растворе ТБС-вода: γ – результаты, взятые из [38], ● – результат настоящей работы.

В работах [38,39] поведение сетки Н-связей рассматривается в зависимости от концентрации. Однако, изменение температуры, по крайней мере, для области концентраций от малых до средних значений, также может привести к развалу пространственной сетки Н-связей одного типа и образованию пространственной сетки Н-связей другого типа. Это подтверждается как одинаковым характером температурной зависимости длин корреляции для растворов с концентрациями 0.07-0.26 м.д. ТБС [35], так и температурным поведением теплоемкости в зависимости от концентрации [20,38,39].

Перестройку пространственной сетки Н-связей раствора одной природы в пространственную сетку другой природы при изменении температуры можно отождествить со структурным фазовым переходом [39].

Наши исследования особенностей температурного поведения смещения КМБ в растворах ТБС-вода позволяют, в совокупности с результатами экспериментальных и теоретических работ других авторов, уверенно говорить о проявлении в спектрах Мандельштам-Бриллюэновского рассеяния света процессов, связанных со структурной перестройкой этих растворов как в области малых, так и в области средних концентраций.

Остановимся на характере структур, образующихся в водных растворах ТБС. На основании исследований температурной и концентрационной зависимостей коэффициента взаимной диффузии и концентрационной зависимости среднеквадратичных значений флуктуации концентрации в работе [40] сделан вывод о том, что молекулы воды образуют многогранники клатратной структуры с заключенными в них молекулами ТБС. С ростом температуры многогранники образуют агрегаты, движущиеся как одно целое. При этом повышение температуры (до 63 ^{0}C в [40]) приводит к росту размера агрегата. Так как многогранники в агрегатах сохраняют собственные грани, состоящие из воды, то рост агрегата вызывает образование фазы, обогащенной водой. При понижении температуры происходит ассоциирование многогранников, т.е. они объединяются, приобретая общие грани. При этом высвобождаются молекулы воды, и раствор опять приближается к состоянию фазового расслоения.

Экспериментальные исследования гиперакустических параметров водных растворов ТБС [40] выявили наличие максимума в поглощении гиперзвука на частоте ~4.5 ГГц. Зависимость коэффициента поглощения, отнесенного к квадрату частоты звука из [41] приведена рис.7(a) для раствора с концентрацией 0.19 м.д. Положение максимума поглощения по температуре соответствует, по-видимому, температуре перехода многогранников от агрегированного к ассоциированному состоянию. Такой переход можно отождествить со структурным фазовым переходом на масштабах, соответствующих ближнему кристаллическому порядку [21].

При температуре раствора t<20°C, как видно из рисунка (рис. 7b) наблюдается сильный рост скорости гиперзвука с понижением температуры. Если следовать выводам работы [40], то с понижением

температуры происходит рост ассоциатов, уподобляемых в [40] твердым соединениям включения, которые, естественно, малосжимаемы. По-видимому, зависимость скорости от температуры здесь может быть и нелинейной, так как происходит непрерывное изменение сжимаемости среды, связанное с изменением ассоциатов. В этой области температурный коэффициент скорости гиперзвука $d\upsilon/dt$ может изменяться с температурой раствора.

Таким образом, в разбавленных водных растворах ТБС в определенной области концентраций при понижении температуры раствор переходит из предкритического состояния с недостижимой нижней критической точкой расслаивания в предкритическое состояние с недостижимой верхней критической точкой. Две предкритические области разделены структурным фазовым переходом. По-видимому, подобная картина может наблюдаться и в других водных растворах неэлектролитов.

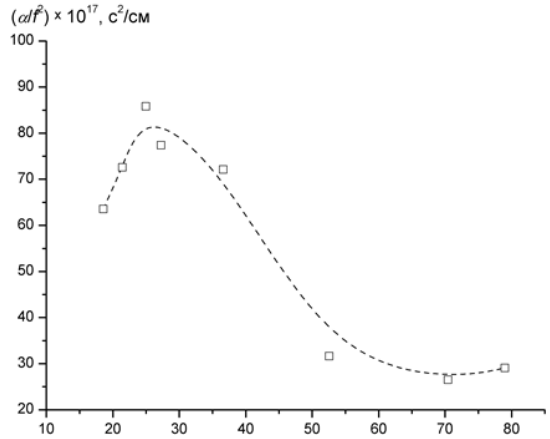


Рис. 7а ТБС-вода (0.19 м.д.) поглощение гиперзвука

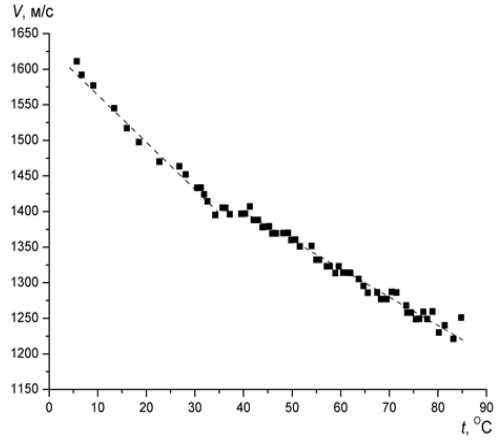


Рис.7b ТБС-вода (0.19 м.д.) скорость гиперзвука

По данным Вукса и Лиснянсного [30,32] в концентрационной зависимости интенсивности изотропного рассеяния света для водных растворов метилпиридинов ($\alpha-,\beta$- и γ-пиколинов) наблюдается максимум при концентрациях метилпиридинов 0.06-0.08 м.д.. Интенсивность рассеяния выше всего в растворах 3-метилпиридина ($\beta-$пиколина). Концентрационная зависимость функции флуктуаций концентрации, рассчитанной из термодинамических данных [11] по избыточному потенциалу Гиббса, также характеризуется максимумом в той же области концентраций. При повышении температуры интенсивность рассеяния в этих растворах растет немонотонно, проходя через максимум (при 60 ^{0}C для пиридина и при 70÷80 ^{0}C для пиколинов). Для $\alpha-$ и $\gamma-$пиколинов интенсивность возрастает в 2-3 раза, для $\beta-$пиколина - в 6÷15 раз.

В [11] отмечается, что водный раствор $\beta-$пиколина с концентрацией 0.06 м.д. в точке инверсии температурной зависимости концентрационного рассеяния света (~75 ^{0}C) очень близок к состоянию расслаивания. При этой концентрации значительно возрастает время релаксации анизотропии [30] от значения 5×10^{-12} с в чистом пиколине до 15×10^{-12} с в растворе.

К аналогичному выводу приходят авторы работ [12,30], исследуя угловую зависимость интенсивности рассеяния света в этом растворе. Рассматривая раствор $\beta-$пиколин–вода как систему, находящуюся на границе устойчивости (вторая производная термодинамического потенциала близка к нулю), они предполагают, что раствор должен отличаться высоким уровнем флуктуаций концентрации. Основываясь на теории критической опалесценции Орнштейна–Цернике–Дебая, в такой системе можно ожидать асимметрию индикатрисы рассеяния света. Исследования температурной зависимости отношения интенсивностей света, рассеянного под двумя углами $\frac{I_{45^0}}{I_{135^0}} = Z$, показали, что для раствора состава ~0.07 м.д. $\beta-$пиколина при температуре, близкой к 69.48 ^{0}C, соответствующей максимуму кривой интенсивности $I(t)$, асимметрия рассеяния Z достигает величины 1.5, будучи равной единице при всех других температурах. Область температур, где $Z>1$, простирается всего лишь на 0.3-0.4 ^{0}C.

Таким образом, концентрация x_0 и температура t_0 особой точки для раствора $\beta-$пиколин-вода, согласно данным различных авторов, находятся в пределах $x_0 \approx 0.1\div0.06$ м.д. и $t_0 \approx 60\div80$ ^{0}C.

В настоящей работе исследование величины смещения КМБ и интенсивности центральной несмещенной линии Рэлея в растворе с концентрацией 0.06 м.д. $\beta-$пиколина в воде было выполнено для трех углов рассеяния (135°, 90° и 45°) в относительно широком интервале изменения температуры раствора в окрестности температуры особой точки t_0.

В предварительном исследовании, опубликованном в работе [24], из-за ограниченного числа измерений и температурного интервала, а также использования излучения лазера ЛГ-159, не стабилизированного по интенсивности, нам не были зарегистрированы заметные особенности поведения интенсивности рассеяния в особой точке раствора. Расширение температурного интервала исследования и использование в качестве источника возбуждающего излучения стабилизированного по частоте и интенсивности лазера выявило ряд интересных особенностей в поведении интенсивности центральной компоненты рэлеевского триплета в окрестности температуры особой точки. Для иллюстрации на (рис.8) приведена температурная зависимость максимальной интенсивности центральной компоненты для угла рассеяния θ=90°(с учетом изменения интенсивности излучения лазера). Наблюдаемая картина необычна.

По мере приближения по температуре к области особой точки интенсивность монотонно возрастает, проходит через максимум при t≈58 °C. Ошибки измерения интенсивности (по повторяемости результатов) при этом не превосходят 11%. Аналогичная картина, имеет место в высокотемпературной области с соответствующим максимумом интенсивности при t≈72 °C (ошибки порядка 13%).

В промежуточной области изменение интенсивности с температурой неоднозначно: максимумы чередуются с минимумами. Несмотря на то, что ошибки измерения относительно малы (~24%), говорить о какой-либо закономерности в поведении интенсивности в интервале температур 59÷71°C трудно.

Такое поведение интенсивности при изменении температуры раствора характерно не только для центральной компоненты триплета. Подобным образом ведут себя и интенсивности компонент тонкой структуры. Очевидно, наблюдаемая картина объясняется тем, что раствор находится в состоянии неустойчивого равновесия в довольно протяженном интервале температур $\Delta t \approx$ 12 °C, и по этой причине незначительное внешнее воздействие, вносимое излучением лазера, условиями термостатирования и другими факторами, приводит к значительным отклонениям состояния раствора от равновесного, что и проявляется в наблюдаемой картине поведения интенсивности светорассеяния. Следует отметить, что до настоящего исследования обычно изучалась суммарная интенсивность рассеяния без спектрального разложения с относительно большим температурным интервалом между двумя измерениями. Не исключено, что по этой причине в работах [11,42] отмеченные в наших исследованиях особенности не наблюдались.

На рисунках (рис.9, 10,11) приведены результаты исследования температурных зависимостей смещения КМБ $\Delta\nu(t)$, которые выявили ряд особенностей. Прежде всего, характер изменения величины смещения при изменении температуры раствора различен для разных углов рассеяния.

Для излучения, рассеянного под углом $\theta = 135^0$ к направлению возбуждающего лазерного излучения (рис. 11) температурное поведение смещения КМБ можно аппроксимировать двумя линейными зависимостями $\Delta\nu$ от t с различными температурными коэффициентами (т.е. с различными наклонами относительно оси температуры). При повышении температуры раствора от 23 до ~60 ^{0}C величина смещения $\Delta\nu$ линейно уменьшается с температурным коэффициентом $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}$≈-1.6×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C. В области температур от ~60 до 81 ^{0}C наблюдается также линейное уменьшение величины смещения, но уже с температурным коэффициентом $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}$≈-3.3×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C.

Аналогичная картина поведения $\Delta\nu$ (t) наблюдается и для света, рассеянного под углом 90^0 (рис.10). С ростом температуры раствора от 13 до ~55 ^{0}C величина смещения линейно уменьшается с температурным коэффициентом $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}$≈-1.3×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C. В интервале

температур от ~55 до 84 ^{0}C величина смещения линейно уменьшается, но уже с температурным коэффициентом $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}$≈-2.2×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C.

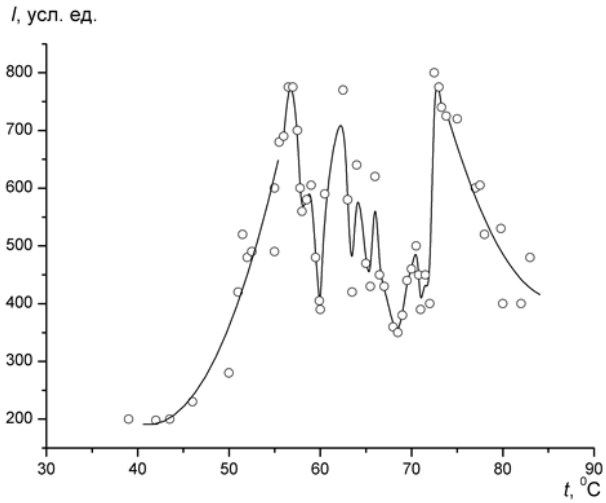


Рис.8 Интенсивность центральной компоненты рэлеевского триплета в растворе β – пиколин-вода (угол рассеяния 90^0).

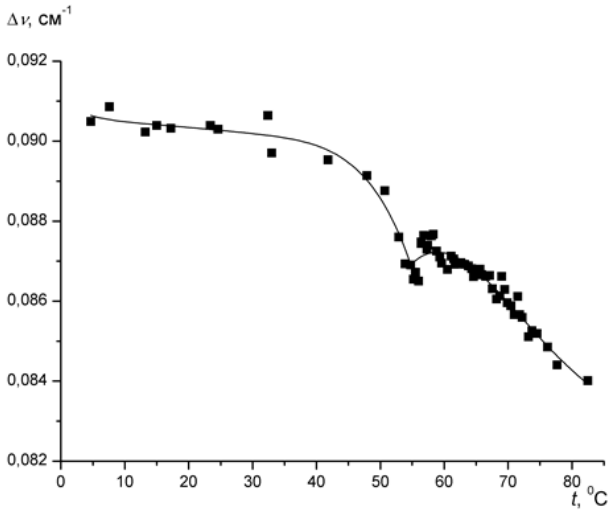


Рис.9 Зависимость $\Delta\nu$ от t в растворе β – пиколин-вода (0.06 м.д.) для угла рассеяния 45^0.

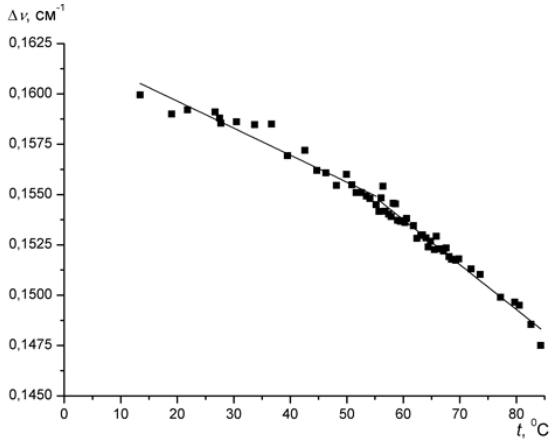


Рис.10 Зависимость $\Delta\nu$ от t в растворе β – пиколин-вода (0.06 м.д.) для угла рассеяния 90^0.

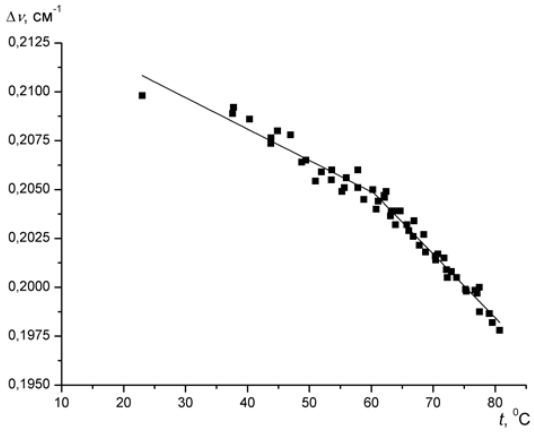


Рис.11 Зависимость $\Delta\nu$ от t в растворе β – пиколин-вода (0.06 м.д.) для угла рассеяния 135^0

Таким образом, изменение температурного коэффициента смещения КМБ, обнаруженное нами на температурной зависимости $\Delta\nu$ (t) происходит при температуре (~55-60 ^{0}C), которая приблизительно одинакова для разных углов рассеяния света. Для угла рассеяния 135^0 величина температурного коэффициента смещения уменьшается приблизительно в 2.1 раза при переходе из низкотемпературной области в высокотемпературную. Соответствующий переход для угла рассеяния 90^0 сопровождается уменьшением температурного коэффициента в ~1.7 раза.

Температура, при которой происходит изменение величины температурного коэффициента смещения КМБ, совпадает с температурой особой точки раствора, при которой наблюдается максимум интенсивности центральной компоненты рэлеевского триплета.

Картина температурного поведения величины смещения КМБ в растворе β – пиколин-вода с концентрацией 0.06 м.д., очень похожа на ту, которую мы наблюдали в водном растворе ТБС с концентрацией 0.04 м.д. Как в водном растворе ТБС (0.04 м.д.), так и в растворе β – пиколина (0.06 м.д.) имеет место изменение характера поведения величины смещения КМБ при изменении температуры раствора. Температура особой точки (своя для каждого

раствора) разделяет два температурных интервала, в которых зависимость величины смещения КМБ $\Delta\nu$ (t) характеризуется различными температурными коэффициентами. Переход от низкотемпературной (по отношению к температуре особой точки) области в высокотемпературную сопровождается немонотонным (скачкообразным) уменьшением температурного коэффициента зависимости $\Delta\nu$ (t) в 1.7-2 раза.

Как уже обсуждалось выше, совокупность экспериментальных данных, полученных как в настоящей работе, так и другими авторами, позволяют сделать вывод о структурной перестройке раствора ТБС-вода, происходящей в окрестности температуры особой точки. При этом, выше и ниже температуры особой точки структура раствора существенно различна, что, в частности, и проявляется в особенностях температурного поведения величины смещения КМБ.

Качественное совпадение характера изменения $\Delta\nu$ с температурой в водных растворах ТБС и $\beta-$пиколина при концентрациях, соответствующих особым точкам, позволяет сделать предположение, что в случае водного раствора $\beta-$пиколина (0.06 м.д.) физические механизмы, обуславливающие особенности температурного хода величины смещения КМБ, такие же, как и в водном растворе ТБС (0.04 м.д.). А именно, немонотонное изменение температурного коэффициента смещения КМБ является следствием структурной перестройки раствора в окрестности температуры особой точки. При этой температуре раствор находится в состоянии неустойчивого термодинамического равновесия (минимум термодинамической стабильности) [43]. Значительное различие в величине температурного коэффициента смещения в области высоких и низких температур служит указанием на то, что структура раствора существенно различна выше и ниже температуры особой точки.

В связи со сказанным заслуживают подробного анализа экспериментальные результаты, полученные в водном растворе $\beta-$пиколина (0.06 м.д.) для угла рассеяния 45^0 (рис.9).

В целом, картина поведения величины смещения КМБ для этого угла рассеяния аналогична той, которую мы наблюдали для больших углов: температурный коэффициент смещения КМБ сильно отличается в области низких и высоких температур, причем имеет место значительное уменьшение температурного коэффициента смещения (приблизительно в 9 раз) при переходе из низкотемпературной области в высокотемпературную. Однако характер изменения величины температурного коэффициента оказывается достаточно сложным. В интервале температур от 5 до ~40 ^{0}C величина смещения довольно слабо меняется с температурой. При повышении температуры раствора в этом интервале смещение КМБ уменьшается, температурный коэффициент зависимости $\Delta\nu$ (t) составляет $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}\approx$-0.2×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C. В интервале температур от 65 до 82 ^{0}C зависимость $\Delta\nu(t)$ также может быть аппроксимирована линейной зависимостью $\Delta\nu$ от t, но уже с температурным коэффициентом $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}\approx$-1.8×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C. В области температур от 40 до 65 ^{0}C наблюдается немонотонный ход зависимости $\Delta\nu$ (t), причем в интервале температур в окрестности температуры особой точки (55÷65 ^{0}C) температурный коэффициент смещения практически равен нулю. Немонотонное поведение величины смещения в интервале температур от 55 до 40 ^{0}C обуславливает также немонотонное изменение величины температурного коэффициента смещения в этом интервале.

Такое поведение как самой величины смещения КМБ, так и температурного коэффициента зависимости $\Delta\nu$ (t) является необычным и требует своего осмысления, которое будет сделано далее.

В ходе выполнения настоящего исследования нами была изучена также и температурная зависимость величины смещения КМБ в водном растворе γ-пиколина.

В водных растворах γ-пиколина, согласно работе [42], в концентрационной зависимости интенсивности изотропного рассеяния света наблюдается максимум при концентрации 0.06 м.д. γ-пиколина в воде. Согласно термодинамическим расчетам [11] по избыточному потенциалу Гиббса, на концентрационном поведении функции, характеризующей уровень флуктуаций концентрации в водных растворах γ-пиколина, имеет место максимум,

приходящийся на концентрацию 0.06 м.д. γ-пиколина. Нами были выполнены исследования температурной зависимости интенсивности центральной линии рэлеевского триплета и величины смещения КМБ в спектрально разложенном рассеянном свете в растворе с этой концентрацией.

Как и следовало ожидать максимум интенсивности, измеренной по центральной компоненте тонкой структуры линии Рэлея, расположен при температуре ~70^0 (рис.12). Рост интенсивности незначителен. Относительная высота максимума намного меньше, чем для интенсивности рассеяния в растворе β - пиколин – вода. Поведение смещения КМБ для раствора γ-пиколин-вода в зависимости от температуры изображено на (рис.13). Как видно из рисунка, температурный ход смещения КМБ может быть описан линейной зависимостью $\Delta\nu$ от t с температурным коэффициентом $\frac{d(\Delta\nu)}{dt} \approx -1.6\times10^{-4}$ $см^{-1}/^0C$, имеющим, в пределах ошибок измерений, постоянное значение во всем исследованном интервале температур.

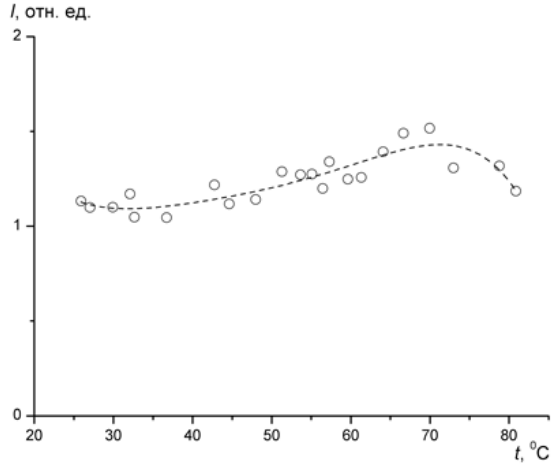


Рис.12 Интенсивность центральной компоненты рэлеевского триплета в растворе γ-пиколин-вода

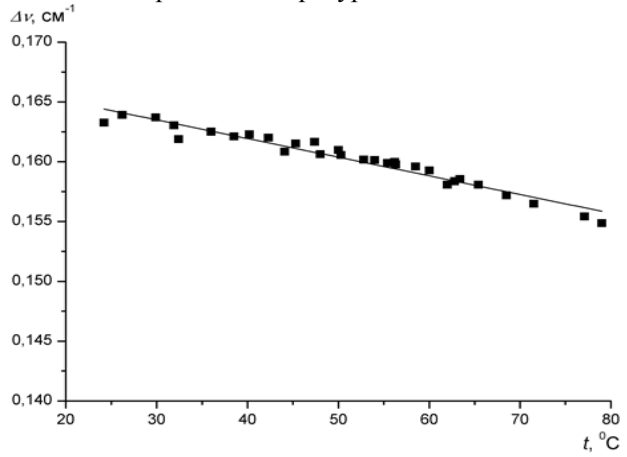


Рис.13 Зависимость $\Delta\nu$ от t в растворе γ-пиколин-вода (0.06 м.д.) для угла рассеяния 90^0.

Картина поведения величины смещения КМБ при изменении температуры раствора, как видно, заметно отличается от того, что мы наблюдали в растворе β-пиколина. Подобное расхождение может быть качественно объяснено следующим образом.

В работе [36] было показано, что состояние раствора γ-пиколин-вода является термодинамически более удаленным по координате давления от двойной критической точки по сравнению с раствором β- пиколина–вода. По этой причине авторы работы [11] считают, в растворах γ-пиколина уровень флуктуаций концентрации гораздо ниже, чем в водных растворах β-пиколина.

Может, таким образом, оказаться, что в водных растворах γ-пиколина структурная перестройка происходит в несколько другом интервале температур и концентраций. Для выяснения этого предположения нами были проведены исследования поведения величины смещения КМБ в широком интервале изменения температуры раствора и концентрации γ-пиколина в воде. Результаты этих исследований представлены в следующей главе настоящей работы.

Вернемся к раствору β-пиколин-вода. Необычное температурное поведение величины смещения КМБ при концентрации 0.06 м.д. для угла рассеянии 45^0 (рис.9) заслуживает проведения более тщательного анализа. Как показывают результаты исследований, температурную зависимость $\Delta\nu(t)$, полученную для этого угла рассеяния света, можно условно разделить на четыре области.

В первой, достаточно протяженной области от 5 до 35 ^{0}C величина смещения КМБ очень слабо меняется с температурой (температурный коэффициент смещения мал; по крайней мере, не меньше -0.2×10^{-4} $см^{-1}/^0C$).

Увеличение температуры раствора от 30 до 55 ^{0}C (вторая температурная область) приводит к значительному уменьшению величины смещения КМБ. Температурный коэффициент смещения $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}$ в этой области заметно уменьшается с ростом температуры. При температуре порядка 55 ^{0}C величина смещения проходит через небольшой минимум, глубина которого по величине превышает ошибки эксперимента. Прохождение смещения КМБ через минимум сопровождается инверсией знака температурного коэффициента смещения (знак меняется с отрицательного на положительный).

В третьей области температур, примерно от 55 до 65 ^{0}C поведение смещения КМБ достаточно сложно. В пределах ошибок эксперимента можно полагать, что в этом температурном интервале величина смещения остается практически неизменной. Однако, картина положения экспериментальных точек на графике очень напоминает такой ход зависимости $\Delta\nu$ (t), при котором величина смещения несколько возрастает, проходя через максимум при температуре около 60 ^{0}C. Прохождение через максимум сопровождается инверсией знака температурного коэффициента смещения (с положительного на отрицательный).

В области температур от 65 до 82 0C величина смещения монотонно убывает с ростом температуры. Температурный коэффициент смещения в этой области постоянен и равен приблизительно -1.8×10^{-4} см$^{-1}$/^{0}C.

Перечисленные характерные особенности в поведении смещения КМБ, а также наличие выраженных максимумов в температурной зависимости интенсивности рассеяния света, очевидно, обусловлены процессом структурной перестройки раствора при изменении его температуры.

Экспериментальные факты, полученные нами для водного раствора β-пиколина с концентрацией 0.06 м.д., по-видимому, нельзя считать случайными. Они имеют вполне реальную физическую основу. А именно, в температурном интервале, расположенном между двумя максимума интенсивности рассеяния света, (рис.8) свойства чистой воды и раствора наиболее близки друг к другу и практически неразличимы.

С учетом наличия двух максимумов интенсивности рассеяния света состояние раствора в этой области температур можно рассматривать как микрогетерогенное. Другими словами, в растворе в интервале от 55 до 70 ^{0}C присутствуют микрообласти со структурой, близкой к структуре компонент раствора.

Предположение о возможности существования микрогетерогенного состояния в водных растворах было высказано Даниловым с соавторами [44] при исследовании углового распределения интенсивности рассеяния рентгеновского излучения в растворе ацетон-вода. Ими были обнаружены на кривой интенсивности рассеяния отчетливый максимум 2.95 Å, характерный для чистой воды, и максимумы, близкие по положению к максимумам чистого ацетона. На примере растворов воды с целым рядом органических соединений возможность микрогетерогенного состояния раствора можно считать доказанной [44].

Согласно современным представлениям [45], сложившимися из рентгенографических и термодинамических исследований, водные растворы неэлектролитов относятся к веществам, называемым соединениями включения, которые образуются в результате внедрения одной или нескольких молекул одного вида в полость клатратной структуры молекул другого вида. Перемещение внедренной молекулы затруднено. Ван-дер-вальсовые силы, действующие на внедренную молекулу сравнительно малы. Тем не менее, энергия связи внедренной молекулы может оказаться в среднем равной 5-10 ккал/моль из-за того, что одна молекула окружена многими молекулами включающего вещества (растворителя).

Далее, известно, что устойчивость соединений включения зависит от концентрации растворяемого вещества: при больших концентрациях молекулы растворенного вещества разрушают сложившиеся структуры. В противоположность этому при малых концентрациях структура соединения упрочняется, приобретая более плотную упаковку. Процесс структурирования обладает высокой чувствительностью к внешнему давлению, что проявляется в смещении по температуре области существования структуры.

Дестабилизирующее действие также оказывает процесс нагревания системы. В этом случае в растворе имеется небольшой температурный интервал, в котором переход от одной структуры к другой заметно выражен.

Изучаемый раствор β-пиколин-вода, по-видимому, также может быть отнесен к соединениям включения. Соответственно, наблюдаемую картину температурного поведения как самой величины смещения $\Delta\nu$, так и температурного коэффициента зависимости $\Delta\nu$ (*t*) можно объяснить следующим образом.

В низкотемпературной области реализуется плотная упаковка раствора, при которой молекулы пиколина, внедренные в междоузлия рыхлой льдоподобной (тетраэдрической) структуры воды, между собой почти не взаимодействуют, а упрочняют структуру воды. Из малости величины температурного коэффициента смещения КМБ и его постоянства в области температур от 5 до 35 ^{0}С следует, что процесс дестабилизирующего действия температуры раствора на его структуру существенным образом компенсируется противоположным процессом образования более плотной упаковки за счет высвобождающихся из тетраэдрической полости не связанных молекул воды [46]. Трансляционная диффузия молекул пиколина сравнительно затруднена и практически не зависит от температуры, что согласуетея с исследованием Чайкова [47] температурной зависимости коэффициента взаимной диффузии в растворе β-пиколин- вода при той же самой концентрации пиколина. Ориентационное движение молекул пиколина также затруднено: согласно исслодованиям Лиснянского и Вукса [30, 48] время релаксации анизотропии при растворении пиколинов в воде увеличивается в три раза.

При дальнейшем повышении температуры раствора - вторая температурная область - энергия водородной связи молекул воды недостаточна для образования устойчивой тетраэдрической структуры, т.е. для образования соединений включения. Если для чистой воды этот процесс приводит к дальнейшему упрочнению ее структуры (уменьшение сжимаемости), то для раствора дестабилизация структуры направлена в сторону разрыхления (увеличение сжимаемости, обуславливающее, например, уменьшение скорости высокочастотного звука [49]). Значительное ослабление межмолекулярного взаимодействия легко прослеживается спектральными эффектами поведения полос поглощения О-Н связи воды в ИК области.

Перечисленние экспериментальные факты, а также рост интенсивности светорассеяния и коэффициента поглощения звука [50] позволяют предположить, что в этом температурном интервале происходит структурная перестройка раствора. Так как способность молекул пиколина к самоассоциации сохраняется, то перестройка структуры раствора, вероятно сопровождается образованием комплексов раздельно взятых компонент, что, естественно, приводит к возрастанию уровня флуктуаций и коэффициента диффузии [47].

В промежуточной области температур между двумя максимумами поглощения [49] и интенсивности (рис.8) состояние раствора нельзя назвать гомогенным по сравнению с низкотемпературной областью. Переход от одной структуры раствора в другую, похоже, происходит не мгновенно при строго определенной температуре, а растягивается на некоторую протяженную область температур (что и демонстрирует (рис.8), внутри которой две компоненты структуры (или несколько) сосуществуют вместе в виде некой суспензии мелких фрагментов структур. Раствор в этом температурном интервале, как это видно по поведению интенсивности, находится в состоянии неустойчивого равновесия. Это представление подтверждается экспериментально наблюдаемым минимумом в температурной зависимости коэффициента диффузии [47].

В заключение следует отметить, что разбиение на четыре температурные области возможно только для зависимости $\Delta\nu$ (*t*), полученной из рассеяния света под углом $\theta = 45^0$.

При регистрации спектров под этим углом, как видно из, (рис.8) особенности температурного поведения смещения КМБ выражены наиболее ярко. Для других углов рассеяния особенности в зависимости $\Delta\nu$ (*t*) проявляются менее отчетливо.

Таким образом, для всех исследованных растворов критической концентрации в окрестности температуры особой точки (температуры минимума термодинамической стабильности [43]) поведение величины смещения КМБ с температурой имеет характерные особенности, отличающиеся для различных растворов. Помимо этого, вид зависимости $\Delta\nu$ (*t*) различен также и для различных углов рассеяния света.

Выводы

Представленные в настоящей главе экспериментальные результаты о поведении частотного смещения в водных растворах ТБС, β-пиколина и γ-пиколина позволяют сделать некоторые качественные выводы, которые объединяют эти растворы:

• Прежде всего, характер изменения величины смещения КМБ при изменении температуры раствора различен в температурных интервалах, расположенных выше и ниже температуры особой точки раствора. Температурные коэффициенты зависимости $\Delta\nu(t)$ значительно различаются по разные стороны от температуры особой точки;

• Температура, при которой происходит изменение величины температурного коэффициента зависимости $\Delta\nu$ (t), совпадает с температурой особой точки, при которой наблюдается максимум интенсивности рассеяния света и максимум в величине коэффициента поглощения высокочастотного звука

• Переход от области температур, характеризующейся одним значением температурного коэффициента смещения КМБ $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}$, к области температур, характеризующейся другим значением $\frac{d(\Delta\nu)}{dt}$, разделен небольшим температурным интервалом, в котором $\frac{d(\Delta\nu)}{dt} \approx 0$. Ширина этого интервала и его положение по шкале температур различны для разных растворов;

• Анализ совокупности экспериментальных результатов, представленных в настоящем разделе диссертации, позволяет сделать вывод о том, что для водных растворов неэлектролитов «критических» концентраций изменение температуры приводит к структурной перестройке раствора, происходящей при температуре, соответствующей особой точке состояния раствора в координатах «температура-концентрация».

Перечисленные особенности не в полной мере отражают физическую картину процессов структурной перестройки в исследованных нами растворах ввиду того, что для их описания одних только температурных исследований недостаточно. Структурообразующим параметром является не только температура раствора, но и его концентрация, т.е. количество компонент и их соотношение в растворе. По этой причине, целесообразно иметь полную картину поведения величины частотного смещения компонент тонкой структуры рассеянного света при изменении в широком интервале как температуры раствора, так и концентрации неэлектролита в воде. Такого рода исследования были выполнены нами для водных растворов γ-пиколина.

Литература

1. Фабелинский И.Л. Молекулярное рассеяние света. – М. Наука, 1965,
2. P.Debya J.Appl. Phys. 39. 789, 1012
3. Г.С.Ландсберг УФН 36, 284, 1948
4. Л.И.Мандельштам. ЖРФХО 58, 381, 1926. Полное собрание трудов Т1. (М-Л Изд во АН СССР 1947).
5. I.Brillouin Amid Phys/ (Paris) 17, 88.1926
6. Е.Ф.Гросс. Zs f. Phys. 63, 685, 1930
7. Фабелинский И.Л.. УФН, 170, 93, 2000.
8. Анисимов М.А, Исследование критических явлений в жидкостях. – УФН, 1974, Т. 114, №2, с. 249-294.
9. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Гостехиздат, 1953, 788 с.
10. Коваленко К.В., Кривохижа С.В., Чайков Л.Л., Чабан И.А. Обнаружение различных фаз в жидкостях по скорости и затуханию гиперзвука вблизи замкнутых областей расслаивания растворов. ЖЭТФ, 2008 том 133 в.2 ст.330-338.
11. Вукс М.Ф. Рассеяние света в газах, жидкостях и растворах. Л., Изд-во Ленинград., 1977, 320 с.
12. Эскин В.Е., Нестеров А.Е. Аномальное рассеяния света в нерасслаивающихся растворах и уровень флуктуаций. // Укр. физ. жур. 1964. т.9.№5. с.540-543.
13. Schneider G. Phaseng Leich gewichte in Flussigen systemen bei hohen drucken. // Ber. Bunsenges Phys. Chem-1966-70, №5,- p 497-519.
14. Harada J. Pseudo – Critical dynamics in binary fluids // bussey kinky –1981. –37, №2-122p.
15. Саидов А.А., Пальчикова Л.В., Карабаев М.К. Молекулярная структура водных растворов и бутанол. //Изв. АН УзССР.-1986.-№2.-с.83-85.
16. Саидов А.А., Хабибуллаев П.К., Атабаев О.М., Турсунов Ш.О., Тажибаев П. Неравновесный фазовый переход, обусловленный внешним воздействием в системы метанол-н-гептан. //ДАН. СССР. -1990.-№47-Т. с. 889-891.

17. Schneider G.M Phase behavior and critical phenomenes in fluid mixtures under pressure // Ber. Bunsenges. Phys. Chem-1972.-76 ¾- p 325-331.

18. Schneider G.M., Russo C. Druckeinfluss auf die Entmischung flussigen system V . salzeffekte auf die Entmischung bei 1-Propanol -H_2O, Butanol-H_2O und Pyridin-H_2O bis 6000 bar // Tbid. -1966 - 70, №9-p. 1008-1014.

19. Schneider G.M., Novak J.R., Druckeinfluss auf die Entmischung flussigen susteme VII . salzeffekte auf die Entmischung bei Alkahol - wasser und pyridin-wasser bis 3500 bar// Tbid 1968-72, №7-p791-798-1014.

20. Анисимов М.А. Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах. -М.: Наука, 1987.-271 с.

21. Larsen G.A., Sorensen G.M. Light scattering and viscosity studies of a ternary mixture with a double critical point // J. Chem. Phys.-1985-89, №4-P.1985-19842.

22. Fixman M. Density correlations critical opalescence and the Free energy of nonuniform – fluids// J. Chem. Phys. – 1960 – 33/ - P. 1357 – 1362.

23. Fixman M. Absorption and dispersion of sound in critical mixtures// I bid. – 1962 – 36. № 8 – P. 1961 – 1964.

24. Кривохижа С.В., Сабиров Л.М., Туракулов Я., Утарова Т.М. Изучение спектра рассеяния света и распространения ультра и гиперзвука в растворе β - пиколин – вода. // Письма ЖЭТФ. – 1980. – 31. №12. – с 746-749.

25. Исмаилов Э., Сабиров Л.М., Туракулов Я., Утарова Т.М. Температурная зависимость скорости и коэффициента поглощения гиперзвука и растворе ацетон – вода. // Физика жидкого состояния. – Киев, 1985. - №13 – с. 99 – 96.

26. Чабан И.А. Общая теория распространения звука и рассеяния света в растворах с сильными флуктуациями концентрации// Акустический журнал. – 1983. – 28. Вып.5. – с. 685-692.

27. Sandercock I.R., Some recent developments in Brillouin scattering-RCA Rev., 1975, v. 36, p. 86-107.

28. Толожский С. Спектроскопия высокой разрешающей силы. – М.: И. Л, 1955, 436 с.

29. Фабелинский И.Л., Чистый И.Л. Спектроскопия высокой разрешающей силы. – УФН, 1976, т. 119, №3, с. 487-524.

30. Лиснянский Л.И. Исследование интенсивности светорассеяния и времени ориентационной релаксации в растворах с сильным межмолекулярным взаимодействием – Дис…. Канд. Физ.-мат. Наук – Ленинград, 1962. 172 с.

31. Эскин В.Е. Рассеяние света растворами полимеров. – М.: Наука, 1973.

32. Л.И. Лиснянский, М.Ф. Вукс, Укр. Физ. Журналы 7(7), 778 (1962).

33. J. Kenttavaa, E. Tommila, M. Martti, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A, Chimie 93,1(1959).

34. Enliss Q.W., Sore use n CM. Dynamic light scattering, studies of concentration fluctuations in aqueous t-butyl alcohol solutions / J. Chem. Phys. 1984. V. 80. № 10. P. 4767-4773.

35. Вукс М.Ф. Рассеяние света в газах, жидкостях и растворах. Л.: Изд. ЛГУ, Ленинград. 1985. 178 с.

36. Malomuzh N.P., Slinchak E.L., Abnormal increase of the Landau-Placzek ratio near the pseudospinodal in diluted aqueous-alcoholic solutions, Ukr. J. Phys., 2008, v.53, N.10, pp. 966-970.

37. Malomuzh N.P., Pankratov K.N., Slinchak E.L., Self-diffusion processes in diluted aqueous-alcoholic solutions, Ukr. J. Phys., 2008, v.53, N.1, pp. 1080-1085.

38. Родникова М.Н, Ланшина Л.В., Чабан И.А. Недостижимая критическая точка расслаивания разбавленных водных растворов неэлектролитов / ДАН СССР. 1990. Т. 315. № 1. С 148-152.

39. Ланшина Л.В., Родникова М.Н., Чабан И.А. Существование недостижимой критической точки расслаивания в водных распорах неэлектролитов ЖФХ. 1992. Т. 66. Выи. 1. С. 204-208.

40. Nubuyuki lio.Tadashi Kato. Tsunetake Fujiyama Determination of local structure and moving unit formed in binary solution of t-butyl alcohol and water / Bull. Chem.Soc. Japan. 1981. V. 54. № 9. P. 2573-2578.

41. Кашаева Л.М, Омонова Н.Ш, Сабиров Л.М, Сабиров Р.Л, Туракулов Я.Т, Утарова Т.М. Акустический журнал. 1996, том 42 №5 с 639-643.

42. Вукс М.Ф., Лиснянский Л.И. Межмолекулярное взаимодействие и рассеяние света в растворах пиридина и α -пиколина в воде. – В кн.: Критические явления и флуктуации в растворах. М., 1960, с 27.

43. Andon R.I. L. Cox J. O. Herington E.F.G. Phase relationships in the pyridine series Pt. 6. The thermodynamics properties of mixtures of pyridine and of three its homologues with water// Trons.

Foraday. Soc 1957. -53. Pt. -410-425.

44. Скрышевский А.Ф. – Структурный анализ жидкостей и аморфных тел. – М.: В.Ш., 1980 с. 298 – 301.

45. Крамер Ф. – Соединение включения – М.: 1958.

46. Самойлов О.Я. – Структура водных растворов неэлектронов и гидратация ионов – М.:1957.

47. Чайков Л.А. – Письма в ЖЭТФ, 1984, Т. 34. №4, С.45.

48. Вукс М.Ф., Лиснянсикий Л.И. – В сб.: Водородная связь; М.: Наука,1964.

49. Сабиров Л.М. диссертация доктора «Спектры молекулярного рассеяния света и распространение гиперзвука в жидкостях и растворах». 1984г.

50. Sabirov L.M., Semenov D.I., Haydarov H.S., “Temperature and Concentration Dependences of the Frequency Shift of the Rayleigh Line Fine-Structure Components in Aqueous Solutions of γ-Picoline”, Optics and Spectroscopy, 2007, v.103, #3, pp.490-495).

УДК: 534.28

ЗАТУХАНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН И АКУСТИЧЕСКИЙ ПАРАМЕТР ГРЮНАЙЗЕНА В АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВАХ

Ф.Р. Ахмеджанов[1,2], А.Ф. Болтабаев[2], Э.Н. Курталиев[1], Ж.Т. Назаров[3]

[1]Самаркандский государственный университет

[2]Институт ядерной физики АН РУ

[3]Навоийский государственный горный институт

E-mail: akhmedzhanov.f@gmail.com

Аннотация. Исследовано затухание ультразвуковых волн и акустический параметр Грюнайзена в алюминиевых сплавах АМГ-2 и САВ-1, применяемых в качестве конструкционного материала в ядерных реакторах. Измерения коэффициента затухания акустических волн проводились эхо-импульсным методом на частотах 10 и 30 МГц, в диапазоне температур 290-580 К. Наблюдаемые максимумы коэффициента затухания объясняются различными релаксационными процессами.

Ключевые слова: акустическая волна, сплав, коэффициент затухания, эхо импульсный метод, время релаксации, механизмы затухания.

Alyuminiy qotishmalarda ultra tovush to‘lqinlarning so‘nishi va akustik gruneisen parameteri

Annotatsiya. Yadro reaktorlarda konstruktsion materal sifatida ishlatilayotgan AMG-2 va SAV-1 alyuminiy qotishmada bo‘lama akustik to‘lqinlarning so‘nishi tadqiqot qilingan. Akustik to‘lqinlarning so‘nish koeffisientini o‘lchovlari 10 va 30 MGts chastotalarda hamda 290-580 K temperaturaviy diapazonida aks sado impuls metodi yordamida o‘tkazilgan. Temperaturaviy bog‘lanishda kuzatilayotgan so‘nish koeffisientining maksimumi turli relaksatsiya jarayonlari bilan tushuntiriladi.

Tayanch so‘zlar: akustik to‘lqin, qotishma, so‘nish koeffisienti, aks sado impuls metodi, relaksatsiya vaqti, so‘nish mexanizmlari.

Attenuation of ultrasonic waves and acoustic gruneisen parameter in aluminum alloys

Abstract. Attenuation of acoustics waves and Grüneisen parameter has been investigated in AMG-2 and SAV-1 aluminum alloys used as a construction material in nuclear reactors. The measurements of attenuation coefficient of longitudinal acoustics waves were carried out by the echo pulse method at frequencies 10 and 30 MHz and temperature range 290 – 580 K. The maximum observed in temperature dependence of attenuation coefficient is explained by different relaxation mechanisms

Key words: acoustic wave, alloy, attenuation coefficient, echo pulse method, relaxation time, attenuation mechanism.

Введение. В работе исследованы линейные и нелинейные упругие свойства алюминиевых сплавов САВ-1 и АМГ-2, которые относятся к группе сплавов тройной системы Al-Mg-Si и Al-Mn-Si. Фазовый состав таких сплавов зависит от соотношения концентраций в нем алюминия и легирующих элементов магния, марганца и кремния [1]. Из-за высокой теплопроводности и устойчивости к воздействию больших доз нейтронного излучения они используются в качестве конструкционного материала при изготовлении защитных оболочек тепловыделяющих элементов в активной зоне водоохлаждаемых ядерных реакторов типа ИРТ, ВВР-М, ВВР-Ц и др. [2]. Многие

физические свойства сплавов исследованы в ряде работ [3,4], однако их акустические свойства мало изучены. В частности не исследованы нелинейные характеристики, такие как коэффициент Грюнайзена и упругие постоянные третьего порядка. В настоящей работе на основе определения линейных свойств (упругие постоянные второго порядка) этих сплавов рассчитаны нелинейные характеристики – коэффициент Грюнайзена и коэффициенты затухания ультразвуковых волн в диапазоне 10-50 МГц.

Методика эксперимента

Исследованные образцы поликристаллических сплавов АМГ-2 и САВ-1 приготавливались в виде цилиндров диаметром ~1 см и высотой ~2 см. Противоположные торцы образцов, служащие акустическими зеркалами, обрабатывались с помощью механической шлифовки и полировки по 14 классу точности. Плотность сплава определялась по измерениям массы и объема образцов с погрешностью 0,1% и оказалась равной для сплавов АМГ-2 и САВ-1, соответственно, 2.68 и 2.69 г/см3.

Элементный состав сплавов определялся рентгеновским микроанализатором «Jeol» JSM 5910 IV [4]. Согласно анализу массовая доля основных легирующих элементов Mg, Si и Mn в образцах АМГ-2 и САВ-1 составляла примерно от 0.07 до 2.1%. При этом наибольшая доля магния была в образцах АМГ-2 (2.1%), а кремния в образцах САВ-1 (0.7%)

Измерения скорости распространения и коэффициента затухания ультразвуковых волн производились с помощью ультразвуковой установки на частотах 10 и 30 МГц. Продольные и поперечные ультразвуковые волны возбуждались пьезоэлектрическими преобразователями из кварца X- или Y- среза, соответственно, с резонансной частотой ~10 МГц. Для склейки пьезопластин к образцам использовался эпоксидный клей. Скорость ультразвуковых волн определялась фазово-импульсным методом Лэмба [5, 6], который был модифицирован так, что позволял с высокой точностью одновременно определять скорость (0,01%) и коэффициент затухания ультразвуковых волн (5%). Генератор высокочастотных импульсов, подаваемых на пьезопреобразователь, запускается от генератора низкочастотных электромагнитных колебаний. За счет изменения периода низкочастотных колебаний наблюдалось несколько максимумов и минимумов амплитуды отраженных акустических импульсов.

Регистрируя с помощью цифрового частотомера последовательные значения частоты, при которых амплитуда результирующего импульса проходит через минимумы, можно определить скорость акустической волны из соотношения [5]:

$$V=2L\cdot\Delta\nu, \qquad (1)$$

где L – длина образца, $\Delta\nu$ – разность двух соседних частот высокочастотного генератора, соответствующих противофазной интерференции.

Коэффициент затухания продольных акустических волн α определялся по амплитудам соседних импульсов A_1 и A_2 в серии затухающих импульсов из соотношения:

$$\alpha = \frac{20\ell g(A_1/A_2)}{2L}, \qquad (2)$$

где L – длина образца.

Температурная зависимость коэффициента затухания волн исследовалась в диапазоне 290 – 590 K с помощью печи электросопротивления, в которой размещалась измерительная ячейка с образцом. Температура в печи поднималась со скоростью 0.2 K/min и контролировалась хромель-алюмелевой термопарой с точностью ±0.1 K.

Результаты эксперимента и их обсуждение

На рис. 1 представлены результаты эксперимента для сплава АМГ-2. Видно, что в температурной зависимости акустического затухания на обеих частотах наблюдается максимум при температурах 323 и 383 K.

Результаты эксперимента использовались для расчета упругих постоянных исследованных алюминиевых сплавов и на их основе были определены акустический параметр Грюнайзена и коэффициент Пуассона. Параметр Грюнайзена γ определялся из значений скоростей продольных (V_L) и поперечных (V_S) акустических волн из соотношения [7]:

$$\gamma = \frac{9(V_L^2 - 4V_S^2/3)}{2(V_L^2 + 2V_S^2)}, \qquad (3)$$

Определяемый по (3) параметр Грюнайзена принято называть акустическим.

Исследованные алюминиевые сплавы САВ-1 и АМГ-2 имеют кубическую симметрию и относятся к твердым растворам внедрения [4]. В таком, свободном от напряжений, твердом растворе распределение растворенных атомов изотропно относительно каждого атома основной решетки. Это означает, что ближайший растворенный атом имеет одинаковую вероятность располагаться вдоль любого возможного кристаллографического направления.

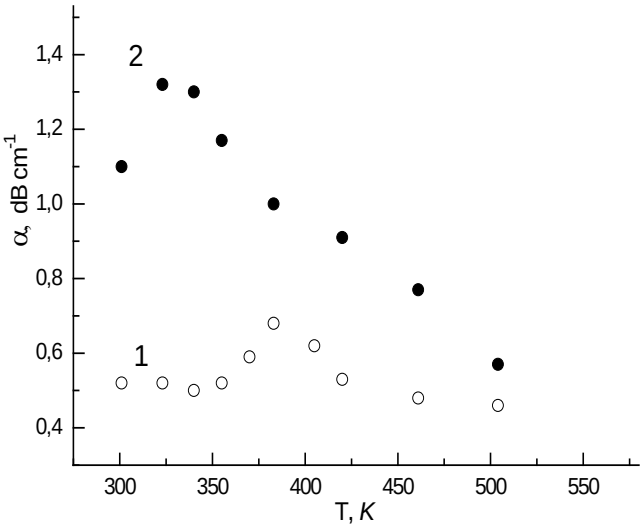


Рис 1. Температурная зависимость затухания продольных акустических волн с частотой 30 МГц (1) и 10 МГц (2) в сплаве АМГ-2.

В гранецентрированной кубической решетке атомы внедрения большей частью находятся не в местах с наибольшим свободным объемом, а в середине ребер или центре ячейки. Расположенные в таких местах внедренные атомы деформируют решетку, создавая искажения, обладающие тетрагональной симметрией. Максимальные искажения получаются в направлении между двумя ближайшими атомами растворителя, т. е. по одной из главных осей типа <1, 0, 0>.

В отсутствие напряжений все три вида позиций внедрения замещены беспорядочно, поэтому на каждый тип позиций внедрений приходится 1/3 общего числа внедренных атомов. При распространении упругой волны в таком твердом растворе изотропное распределение атомов нарушается; равновесным распределением теперь будет такое, в котором большее число растворенных атомов находится в позициях с тетрагональной осью, вдоль которой волной создается упругая деформация.

Таким образом, наблюдаемые максимумы затухания акустических волн могут быть обусловлены тем, что деформация, создаваемая акустической волной, нарушает равновесное распределение растворенных атомов относительно атомов основной решетки. За счет перемещения и переориентации внедренных атомов осуществляется переход в новое равновесное состояние, характеризуемый временем релаксации τ, и для ультразвуковых волн будет наблюдаться релаксационный пик поглощения с максимумом, отвечающим условию [6]:

$$\nu = \nu_0 e^{-U/kT} \tag{4}$$

где ν_0— частота колебаний внедренного атома в позиции внедрения, U – энергия активации движения примесных атомов, k – коэффициент Больцмана. Величина энергии активации определяется типом и позицией внедренных атомов и природой атомов растворителя [8,9]. Энергия активации, определенная по частотному смещению, релаксационных пиков в сплаве АМГ-2, оказалась равной 0,26 эВ. Эта энергия активации связана, по-видимому, с движением ионов магния в решетке сплава,

Другим возможным механизмом затухания акустических волн, является механизм Ахиезера, который обусловлен взаимодействием акустической волны с тепловыми фононами [6, 10]. Акустическая волна нарушает равновесное распределение тепловых фононов, происходит перераспределение энергии между фононами, что приводит к необратимому процессу диссипации энергии. Этот механизм также имеет релаксационный характер, в котором роль времени релаксации играет время свободного пробега фонона, определяемое из выражения [8].

$$\tau_{\phi} = \frac{3\kappa}{C_V V_{cp}^2}, \quad (5)$$

где κ - коэффициент теплопроводности, C_V – теплоемкость единицы объема, $V_{ср}$ – средняя скорость звука в дебаевском приближении. Для оценки величины затухания по этому механизму мы воспользовались формулой Мэзона [6]:

$$\alpha = \frac{3 \cdot 8.68\gamma^2 \kappa T \Omega^2}{2\rho V^2 \cdot V_{cp}^2}, \quad (6)$$

где ρ - плотность, V и Ω – скорость и частота акустической волны, соответственно,

Полученные расчетные значения акустического параметра Грюнайзена, упругие модули второго порядка и литературные данные по теплопроводности [4] использовались для расчета затухания в исследованных сплавах. Расчет по формулам (3), (5) и (6) показал, что в исследованных сплавах затухание акустических волн по механизму Ахиезера на порядок меньше наблюдаемых значений затухания. Кроме того на низких частотах велик вклад кажущегося затухания, обусловленного расходимостью акустического пучка, что и объясняет большую величину затухания на 10 МГц, по сравнению с затуханием на 30 МГц. В металлах также может иметь место механизм затухания акустических волн, связанный с взаимодействием акустической волны с электронами проводимости – акустоэлектронное взаимодействие. Согласно [6] этот механизм проявляется при температурах ниже ~10 К и при высоких температурах им можно пренебречь.

Таким образом, можно сделать вывод, что температурная зависимость коэффициента затухания в сплаве САВ-1 обусловлена релаксационными процессами при внутреннем трении и наблюдаемые два максимума затухания связаны с отличием времен релаксации, описывающих переход атомов основных легирующих элементов магния и кремния в новое равновесное состояние под действием акустической волны.

Для разделения вкладов отдельных механизмов затухания необходимо провести исследования температурной зависимости затухания акустических волн на более высоких частотах, на которых вклад механизма Ахиезера в величину затухания может стать определяющим [10]. Отметим также, что рассмотренный подход позволяет определять температурную зависимость параметра Грюнайзена и соответственно прогнозировать зависимость коэффициента акустического затухания от температуры.

Литературы

1. Алюминиевые сплавы (свойства, обработка, применение). Справочник под ред. Х. Нильсена. –М.: Металлургия. –1979. –679 с.

2. О.П. Максимкин, А.В. Яровчук, Д.С. Аулова, Л.Г. Турубарова, С.В. Карбышева Коррозийная стойкость алюминиевого сплава САВ-1 после эксплуатации в активной зоне реактора ВВР-К и хранения в водном бассейне. Вопросы атомной науки и техники. –2010. №5. –с.78-83.

3. В.М.Лебедев, В.Т.Лебедев, С.П.Орлов, Б.З.Марголин, А.М. Морозов. Исследование наноразмерной структуры сплава САВ-1, облученного быстрыми нейтронами до высоких флюенсов, методом малоуглового рассеяния нейтронов. Физика твердого тела. –2014. Т. 56, №1. –с.160-164.

4. Sh. A. Alikulov, F. R. Akhmedzhanov, S. A. Baitelesov, A. F. Boltabaev, F. R. Kungurov

5. E. T. Rakhimov, U. S. Salikhbaev. High temperature electric and thermal conductivity of the Aluminum Alloys SAV-1 and AMG-2. Atomic Energy. 2015. V. 117 (5) p.334-339.

6. Р.Труэлл, Ч.Эльбаум, Б.Чик. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. 1972. –М.: Мир, – 307 с.

7. У. Мэзон. Физическая акустика. Т.3. часть Б. Динамика решетки. М.:Мир. 1968. – 392 с.

8. В.Н. Беломестных Акустический параметр Грюнайзена твердых тел. Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, №3, –с.14-19.

9. А.Новик, Б.Бери. Релаксационные явления в кристаллах. –М:Атомиздат. –1975. –472с.

10. В.С. Постников. Температурная зависимость внутреннего трения чистых металлов и сплавов. Успехи физических наук. 1958. Т.66, №1. –с.43-77.

11. Б.И. Капранов, М.М Коротков. Акустические методы контроля и диагностики. Томск: ТПУ. – 2008. –186 с.

УДК.535.11.1.

ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТЕЙ И НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ БОРОСЛИКАТНЫХ СТЕКОЛ

Н. Холдоров, И. Турдибеков, Ф.Джамолов
Самаркандский государственный институт архитектуры и строительства
E-mail: fazliddin.djamolov@mail.ru

Аннотация. В данной работе исследовано влияние травления в 0,1 HCl и 0,1 л растворе NaOH на оптические характеристики поверхностных слоев (ПС) боросиликатных стекол. Изучено изменение эллипсометрических параметров ПС стекла в процессе травления раствором $Pb(NO_3)_2$ – 0,1 N(HCl). Доказано, что боросиликатное стекло более стойко к химическим воздействиями вследствие меньшего коэффициента термического расширения.

Ключевые слова: Поверхностный слой, микрорельеф, тонкопленочная микроэлектроника, гетерогенный катализ, показатель преломления, эллипсометрия, коэффициент теплового расширения.

Yuzalarning optic xususiyatlari dinamikasini va boroslikatli shishalarning fizik parametrlarini o'rganish

Annotatsiya. Mazkur ishda 0,1 HCl va 0,1 l NaOH eritmasida ishlov berishning boroslikatli shisha sirt qatlami (SQ)ning optic xarakteristikalariga ta’siri tadqiq qilingan. Shisha SQning $Pb(NO_3)_2$ – 0,1 N(HCl) eritmasida ishlov berish jarayonida ellipsometrik parametrlarining o’zgarishi o’rganilgan. Boroslikatli shishaning kimyoviy ta’sirlarga mustahkamligi uning issiqlikdan kengayish koeffisiyentining kichikligidan kelib chiqishi ko’rsatilgan.

Kalit so’zlar: Sirt qatlam, mikrorelef, geterogenli kataliz, yupqapardali mikroelektronika, sindirish ko’rsatkichi, ellipsometriya, issiqlikdan kengayish koeffisiyenti.

Study of the dynamics of the optical properties of surfaces and some physical parameters of boroslicate glasses

Abstract. The present paper examines the influence of etching in 0,1HCl and 0,1 liter in solutionNaOH on optical characteristics of surface layers (SL) of borosilicate glasses. The changing of ellipsometric parameters SL of glass in the process of etching by solution $Pb(NO_3)_2$ – 0,1 N(HCl) was studied. It was proved that borosilicate glass is more resistant to chemical influences due to the lower coefficient of thermal expansion.

Key words: Surface layer,microrelief, thin film microelectronics, heterogeneous catalysis, refractive index,ellipsometry, coefficient of thermal expansion.

В последнее десятилетие поверхность твердого тела (ПТТ) является одним из основних объектов физических исследований. Дальнейшее развитие таких областей науки и техники как тонкопленочная микроэлектроника, гетерогенный катализ, материаловедение и целого ряда направлений оптики, невозможно без тщательного изучения ПТТ.

Через поверхность осуществляется любое взаимодействие твердого тела с окружающей средой. Поэтому знание свойств поверхности существенно при изучении изменений, претерпеваемых объемными характеристиками твердого тела.

Исследования были проведены на стеклах 6Ва – 4 размером 15 х 5 х 5 мм^2. Образцы были отполированы по стандартной технологии (водная суспензия полирита). В исходном состоянии после полирования наблюдались большие отклонения в показателях преломления (***$\Delta n=0,05$***) от объемного значения и разброс эффективных толщин ПС (***$\Delta d=1500$Å***), как от образца к образцу, так и по поверхности образца.

При этом рассматривались изменения оптических характеристик поверхностных слоев (ПС) в зависимости от травления в слабом растворе ***HCl***и щелочи.

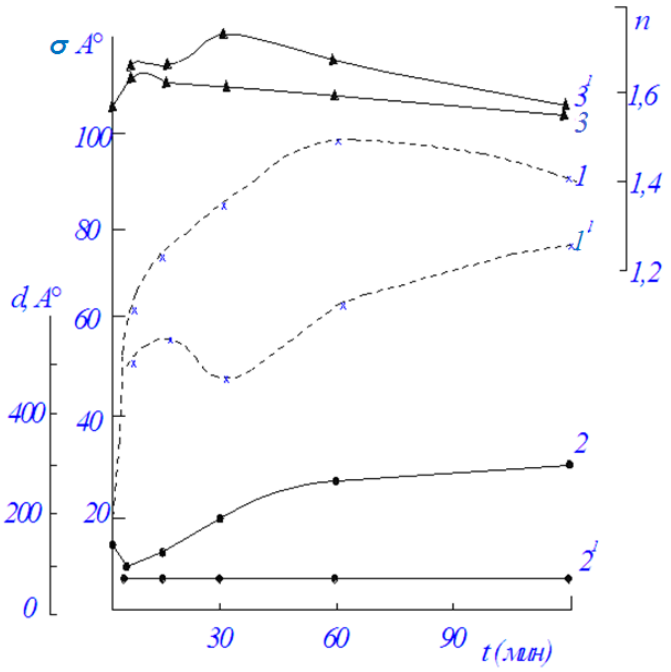
На стекле 6Ва – 4 было исследовано влияние травления в 0,1 растворе ***HCl*** и 0,1 л растворе ***NaOH*** на оптические характеристики ПС. Результаты представлены на рис.1. Видно, что при воздействии раствором ***HCl*** происходит увеличение толщины ПС, а также увеличение микрорельефа среднеквадратичной высоты шероховатости σ, рассчитанной по формулам, приведенным в работе [1]. Показатель преломления с течением всего времени травления уменьшается. Характер этого изменения подробно описан в работе[2 – 3]. Исследование поверхности стекла 6Ва – 4 при травлении

в щелочной среде проводилось на образцах предварительно отработанных раствором ***HCl***. Для каждого образца выбиралось определенное время травления.

На рис.1 кривые 1^1, 2^1, 3^1, соответствуют результатам, полученным после щелочной обработки. Из рис.1 видно, что происходит уменьшение среднеквадратичной высоты шероховатости, толщины ПС и увеличение показателя преломления ПС.

По – видимому это связано с удалением кремнекислородной пленки, образованной при кислотной обработке.

Отсюда следует очень важный вывод, что даже при перетравлении в соляной кислоте, щелочная обработка приводит к сглаживанию поверхности и к малому разбросу в толщине ПС, хотя после обработки в кислоте разброс по толщине составлял от 100 до 300Å при травлении от пяти минут до 2 – х часов. Изменение эллипсометрических параметров ПС стекла 6Ва – 4 в процессе травления раствором ***Pв(NO$_3$)$_2$+HCl(0,1N)*** представлено в табл.1.



1. Изменение оптических параметров ПС стекла 6Ва-4 в процессе кислотной (HCl) и щелочной обработки (NaOH):
- изменение σ, d, n - при кислотной обработке;
1',2',3' - σ, d, n - при щелочной обработке.

Изменение эллипсометрических параметров ПС стекла в процессе травления раствором Pв (NO$_3$)$_2$–0,1N(HCl)

Таблица 1

Время травления	ϕ0	△	Ψ	n	d	d$_0$
5"	60 65	37,58 11,12	3,28 10,45	1,454 1,4758	229 253	2709 2716
15"	60 65	25,03 5,46	2,29 10,01	2,1608 1,8757	1577 1875	1598 1926
25"	60 65	21,02 4,58	2,27 10,05	2,7463 2,9543	1207 1120	1213 1125
55"	60 65	23,10 5,21	2,31 10,10	1,5117 1,3874	91 83	4167 3011
1'25"	60 65	22,58 5,26	2,32 10,09	1,2328 1,3171	77 76	3606 3310
1'55"	60 65	24,36 5,51	2,33 10,10	1,7700 1,3329	92 83	4021 3237
3'55"	60 65	28,01 6,31	2,39 10,13	1,2297 1,3953	97 104	3624 2982
5'55"	60 65	26,26 6,34	2,40 10,12	1,3727 1,3555	99 96	 2970
7'55"	60	28,26	2,44	1,3727	109	2959

	65	7,05	10,13	1,3462	103	3158
11'55"	60 65	28,39 7,22	2,46 10,18	1,4065 1,4438	119 137	2854 2815
16'55"	60 65	29,56 7,46	2,51 10,18	1,4321 1,4191	138 133	2773 2895
26'55"	60 65	30,52 7,56	2,52 10,17	1,4141 1,3897	135 125	2829 3003
46'55"	60 65	32,10 8,24	2,60 10,23	1,4510 1,4513	167 162	2795 2791
92'	60 65	39,25 12,27	3,38 10,48	1,4554 1,4494	248 250	2705 2797
150'	60 65	39,25 11,47	3,35 10,43	1,4511 1,4500	239 235	2717 2795
180'	60 65	39,40 12,08	3,36 10.44	1,4472 1,4429	238 236	2728 2817

Для данного раствора характерен более «мягкий» характер травления; время образования кремнеземистой пленки примерно в 1,5 – 2 раза больше, по сравнению с раствором 0,1 NHCl. Таким образом, варьируя состав применяемого травителя, можно управлять оптическими параметрами ПС стекла.

Можно отметить, что поверхностный слой стекол 6Ва – 4 состоит из слоя адсорбированной свободной воды толщиной от 100 до 300 Å диффузного слоя связанной воды толщиной от 1500 Å до 2000 Å (а может и больше, т.к. эллипсометрия позволяет определить толщину прозрачных слоев с точностью до полупериода, который в этом случае составляет около 2000 Å).

У боросиликатном стекле щелочные компоненты в исходном сырье заменены на оксид бора (BrO3). Большое влияние на свойства стекла оказывает частичная замена двуокиси кремния на окись бора. С другой стороны в состав оптических стекол оксид бора вводятся для того, чтобы повлиять на характер зависимости показателя преломления от длины волны света [1]. Боросиликатное стекло более стойко к химическим воздействиями вследствие меньшего коэффициента термического расширения. Менее чувствительно к резкому изменению температуры. У боросиликатного стекла коэффициент теплового расширения примерно в три раза меньше, чем у натрий-известкового стекла. Это позволяет стеклу не трескаться при резких изменениях температуры. Этим также обусловлено его применение в качестве противопожарного и других случаях, когда необходима термическая стойкость. Поскольку коэффициент плотности у боросиликатной основы выше чем у силикатных стекол, оно лучше защищено от риска физических повреждений. Этим достигается повышение химической стойкости и уменьшение коэффициента линейного теплового расширения до 3,1·10-6 ºС-1 при 20 ºС.

Боросиликатные стекла различных составов составляют значительную часть марок оптических стекол. В частности, к классу боросиликатных относятся такие типы кроновых оптических стекол как легкие (ЛК), обычные (К), тяжелые (ТК) и баритовые кроны (БК).

Из боросиликатного стекла изготавливают не только линзы, но и зеркала для телескопов-рефлекторов. Причина этого малого коэффициента температурного расширения [2].

Литература

1.Азам Р., Башара Н. “Эллипсометрия в поляризации света”. М: Мир. 1981, 583 с.

2. Э.В.Емельянов. Анализ температурных режимов элементов 6-М телескопа БТА и объема башни. Астрофизический бюллетень. – 2015. – Т. 70, № 3.

3. С.В.Немилов. Оптическое материаловедение: оптические стекла. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011.

4. В.И.Пшеницын, М.И.Абаев, Н.Ю.Лызлов. «Эллипсометрия в физико–химических исследованиях». Ленинград: «Химия». 1986, 152 ст.

5. Н.Холдоров и др. “Изучение динамики оптических характеристик поверхностного слоя стекол при внещних воздестивиях”. “Архитектура ва қурилиш сохаларида инавацион технологияларни қуллаш истиқболлари” халқаро илмий – техник конференция материаллари. Самарқанд, 2016. I–қ., 2016 – 2017 с.

УДК 539.16.04

ПЛОТНОСТИ ПОТОКОВ РАДОНЕ В ПОЧВАХ НУРАТИНСКОГО И ОТРОГАХ ЗАРАФШАНСКОГО ХРЕБТОВ

Н.Н.Базарбаев[1], Т.Т.Мавланов[2], И.Т.Муминов[1], Т.М.Муминов[1,2], О.Б.Маматкулов[2*], Р.Р.Муратов[2], Л.Т.Нурмуродов[2], Б.А.Синдаров[1], К.И.Умаров[2], А.Т.Худойбердиев[3]

[1]Национальный университет Узбекистана
[2]Самаркандский государственный университет
[3]Каршинский филиал Ташкентского университета информационных технологий
orifjon.m1974@mail.ru

Аннотация. Методом пассивной сорбции воздуха исследованы плотности потоков радона с поверхностей почв отдельных местностей в горах Нуратау и Зарафшанского хребта. Обсуждаются флуктуации и различия их средних значений в почвах исследованных местностей.

Ключевые слова: радионуклид, гамма-спектр, радон, спектрометр, активность.

Nurota tog‘lari va Zarafshon tizmasi tuproqlaridagi radon oqimining zichligi

Annotatsiya. Nurota tog‘lari va Zarafshon tizmasidagi ayrim hududlari tuproqlaridagi radon oqimlarining zichligi passiv havo sorbsiyasi usuli bilan o‘rganildi. Maqolada o‘rganilayotgan hududlar tuproqlaridagi radonning o‘rtacha qiymatlarining fluktuatsiyasi hamda farqlari muhokama qilingan.

Kalit so‘zlar: radionuklid, gamma-spektr, radon, spektrometr, aktivlik.

Radon flux densities in the soils of Nurata and spurs of Zarafshan ridges

Abstract. “Passive sorption of air” technique was used to study radon flux densities from soil surfaces for the areas of Nuratau mountains and Zarafshan range. Herein discussed are fluctuation and differences in average values in soils of studied areas.

Keywords: radionuclide, gamma-spectrum, radon, spectrometer, activity.

Исследование плотности потока радона (ППР) с поверхности почв местности является актуальной радиоэкологической задачей.

В общей дозе облучении населения Земли ионизирующими излучениями, по данным ВОЗ [1], 43 % обусловлено ингаляцией радона. Изотопы радона ^{222}Rn ($T_{1/2}$≈3,82 дн), ^{220}Rn ($T_{1/2}$≈56 с) и ^{219}Rn ($T_{1/2}$≈4 с) образуются, в горных породах подстилающих почвенный покров Земли. Через поры и трещины, пород слои почв или природных вод они эманируют в приземные слои воздуха, проникают в помещение и ингалируются человеком. Согласно международным и национальным законодательствам, концентрации радона в помещениях и на местностях, в зависимости от их назначения не должны превышать соответствующие уровни, установленные нормами радиационной безопасности.

В настоящей работе приведены результаты исследовании плотности потока радона (ППР) с поверхностей почв в урочище ПАНГАТ, на южном склоне центральной части Северо-Нуратийского хребта, урочище САРЫКУЛЬ в Каратепинских горах и СЕДЛОВИНЕ Каратепинских и Чакиркалянских гор Заравшанского хребта.

1. Пробные площадки

Исследование ППР проведены с поверхности почв 21 площадки в ПАНГАТЕ, 15 – в САРИКУЛЕ 15 и 9 – в СЕДЛОВИНЕ. Площадки, в первом приближенным равноудалены друг от друга и расположены на азимутальных линиях, проходящих через первые №1 и последние №f площадки (таблица 1).

Таблица 1.

Координаты (N и E) и высоты над уровнем моря (H) первых (№1) и последних (№f) площадок местностей.

Местность	№1	№f
ПАНГАТ	$N_1$40°24′08″, $E_1$66°39′09″, $H_1$1196 м	N_{21}40°24′39″, E_{21}66°32′11″, H_{21}1050 м
САРЫКУЛЬ	$N_1$39°29′55″, $E_1$66°31′4″, $H_1$1077 м	N_{15}39°25′55″, E_{15}39°29′55″, H_{15}874 м
СЕДЛОВИНА	$N_1$39°17′45″, $E_1$66°54′29″, $H_1$1690 м	$N_9$39°17′17″, $E_9$66°39′09″, $H_9$1179 м

Над каждой площадкой, на высоте 1 м, поисковым радиометром СРП-68-01 измерялась **мощность эквивалентной дозы** (МЭД) фонового γ-излучения.

Отбор проб на площадках ПАНГАТА и САРЫКУЛЯ осуществлен 9 и 11 апреля, а с площадок СЕДЛОВИНЫ 14 июля 2018 г. Отметим, что одновременно с этих площадок отбирались образцы почв, для установления в них вертикальных распределений первичных естественных радионуклидов ^{226}Ra, ^{232}Th, ^{40}K, космогенного ^{7}Be и техногенного ^{137}Cs (результаты этих исследований опубликованы в работе [2]).

2. Методика исследований ППР

Исследования ППР проведены квази-интегральным методом, путем пассивной сорбции воздуха на сорбционных детекторах ДРСП, представляющих собой полые дюралюминиевые цилиндры, размерами ∅70×18 мм, заполненные активированным углём, марки СКТ-3, с торцов закрытые сетками из нержавеющей стали. Детекторы предварительно дегазировались в сушильном шкафу при температуре 110°С, после чего помещались в защитный герметический футляр.

Процедуры получения измерительных проб заключались в следующем:

- площадки почвы ∅40 см очищались от корневых систем растений на глубину 5-10 см,
- в их центрах устанавливалось стойки с сорбционными детекторами и накрывались камерами объемом 3,3 л,
- после 3-х часовой экспозиции детекторы снимались со стойки, помещались в маркированные защитные футляры и транспортировались в лабораторию.

Гамма спектры проб измерялись на сцинтилляционном спектрометре (NaI(Tl), ∅80×80 мм, энергетическое разрешении 8,5% на линии 662 кэВ ^{137}Cs). Калибровка спектрометра осуществлялась с помощью эталонного источника ^{226}Ra, активностью 680 Бк, осажденного на активированном угле сорбционного детектора.

Набор и обработка спектрометрической информации проб осуществлялось на PC с помощью программного обеспечения ASW, НТЦ RADEK. Погрешности в значениях ППР варьировались в пределах от 15 до 40 %. Минимально определяемые уровни ППР – 9 мкБк/м^{2}с. Спектрометр эталонный источник и методика обработки спектров сертифицированы в ВНИИМ им. Д.И.Менделеева.

На рис.1, в качестве примера, приведены гамма-спектры активированного и дезактивированного сорбционного детектора, их разность и спектр эталонного источника ^{226}Ra.

3. Экспериментальные результаты

Полученные **значения ППР** сильно флуктуируют, при этом их средние арифметические значении на площадках САРЫКУЛЯ и СЕДЛОВИНЫ близки между собой и заметно ниже чем на площадках ПАНГАТА (таблица 2).

Таблица 2.

Значения ППР – R (мкБк/м^{2}с) в почвах площадок местностей

ПАНГАТ ($R_{ср}$ = 92, $R_{мин}$ = 12, $R_{макс}$ = 265)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R	93	79	92	192	208	153	101	50	119	110	114
№	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
R	173	56	30	58	86	265	112	38	80	12	

САРЫКУЛЬ ($R_{ср}$ = 48, $R_{мин}$ < 9, $R_{макс}$ = 10)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
R	21	<9	<9	76	45	44	53	20	101	38	<9	23	<9	56	57

СЕДЛОВИНА ($R_{ср}$= 51, $R_{мин}$ = 30, $R_{макс}$ = 82)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R	42	60	47	40	46	30	82	55	57

В отличие от ППР, **флуктуации МЭД и удельных активностей ^{226}Ra** в 30 сантиметровых слоях почв [2] исследованных площадок не превышает погрешностей в их значениях. При этом, так же, как и для ППР их среднеарифметические значении на площадках Сарыкуля и Седловины близки между собой и ниже, чем на площадках Пангата (таблица 3).

Таблица 3.

Средние и предельные значения ППР – R, МЭД – D и удельных активностей ^{226}Ra – A в почвах площадок местностей.

Местность	$R(R_{мин} - R_{макс})$ мкБк/м^{2}с	$D(D_{мин} - D_{макс})$ мЗв/час	$A(A_{мин} - A_{макс})$ Бк/кг
ПАНГАТ	92 (12-265)	0,27 (020-034)	29 (26-37)
САРИКУЛЬ	48 (<9-101)	0,21 (018-025)	24 (19-32)
СЕДЛОВИНА	51 (30-82)	0,21 (019-026)	26 (20-35)

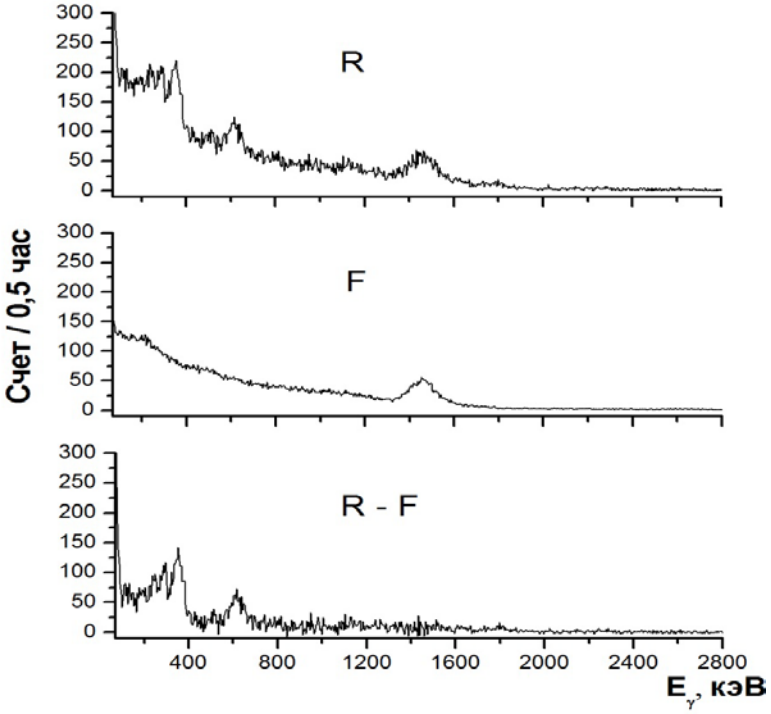


Рис.1. Спектры активированного (R) и дезактивированного (F) сорбционного детектора, их разность и спектр эталонного источника (R–F).

4. Обсуждение результатов

Отмеченные факты можно объяснить следующими обстоятельствами:

– сильные флуктуации значений ППР в почвах соседних площадок местности обусловлены различиями в структуре (размеры, количество трещин и т.д.) подстилающих горных пород,

– слабые отличия значений МЭД и удельных активностей ^{226}Ra в почвах площадок связаны со слабыми различиями состава веществ на ограниченных участках местности,

– практически равные усредненные значения ППР, МЭД и удельных активностей радия в почвах площадок **САРЫКУЛЯ** и **СЕДЛОВИНЫ** можно понять учитывая, что они входят в состав одного и того же Заравшанского хребта и, по-видимому, имеют близкое геологическое строение, а заметно большие их значения в почвах **ПАНГАТА** – наличием в горах Нуратау богатых урано-содержащих горных пород, например доломитов-рудовмещающих и свинцово-цинковых руд с активностями ^{226}Ra свыше 650 Бк/кг [3].

Заключение

Проведенное исследование позволило выявить

– сильные флуктуации значений ППР в почвах площадок местностей, при этом флуктуации соответствующих значений МЭД и удельных активностей Ra-226 незначительны,

– средние значения ППР, МЭД и удельных активностей Ra-226 в почвах ПАНГАТА (Нуратинские горы) выше, чем в САРЫКУЛЕ и СЕДЛОВИНЕ (отроги Зеравшанского хребта).

Литература

1. UNSCEAR-2000 report to the General Assembly sourse effects and ricks of ionizing radiation, NY,United Nation Soientific Committe on the Effects of Atomic Radiation.

2. Базарбаев Н.Н., Иванов А.К., Мавланов Т.Т., Муминов И.Т., Муминов Т.М., Маматкулов О.Б., Нурмуродов Л.Т., Сафаров А.А., Синдаров Б.А., Худайбердиев А.Т., Чиндалиев М.Х. Первичные, техногенные и космогенные радионуклиды в почвах Нуратинского и отрогах Заравшанского хребтов // Журнал “Научный вестник СамГУ” (в печати)

3. Inoyatov A.Kh., Muminov I.T., Mukhamedov A.K., Rashidova D.Sh., Osmanov B.S., Safarov A., Safarov A.N., Khushmurodov Sh.Kh. Radionuclides in the environment of Nuratau. // Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry, 2007, Vol.273, No.2, pp.497-506.

УДК 537.622;539.12.04;541.161;666.01

ОБНАРУЖЕНИЕ МЕТАМАТЕРИАЛЬНЫХ СВОЙСТВ В КАЛИЕВОАЛЮМОБОРАТНЫХ СТЕКЛАХ С ДОБАВКАМИ ОКСИДОВ ЖЕЛЕЗА, ПОДВЕРГНУТЫХ ТЕРМИЧЕСКОМУ, РАДИАЦИОННОМУ И ТЕРМОРАДИАЦИОННОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ

Э.М.Ибрагимова[1], А.Н.Салахитдинов[2], М.К.Салахитдинова[3]
[1]Институт ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан
[2]Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий
[3]Самаркандский государственный университет
E-mail: smaysara@yandex.ru

Аннотация: В статье представлены основные экспериментальные результаты по изучению микро- и наноструктуры калиевоалюмоборатных стекол, исследование механизмов формирования нанокомплексов в КАБ стеклах с добавками (3d-) элементов при комплексном воздействии жесткого электромагнитного излучения, высоких температур с помощью магнито-оптических, ЭПР-спектроскопических и структурных методов. Теоретически и экспериментально показано, что показатель оптического поглощения Δα и Δn при сильных внешних воздействиях (как, например, при терморадиационных условиях) становятся отрицательными. Следовательно, можно предложить формулу поиска метаматериала в оптической области (по крайней мере в первом и во втором приближениях).

Ключевые слова: метаматериалы, отрицательный показатель преломления, оптический спектр поглощения, ЭПР-спектры, переключательный эффект, нелинейные эффекты, терморадиационное воздействие, валентно-координационные переходы.

Kaliy-alyuminoborat shishalarning metamaterial xossalarini termik, radiatsion va termoradiatsion ta’sirida aniqlash

Annotatsiya. Maqolada kaliy-alyumino-borat shishalarining mikro- va nanostrukturalarini o‘rganish bo‘yicha asosiy eksperimental natijalar, qattiq elektromagnit nurlanishga murakkab ta’sir ostida (3d-) elementlarini qo‘shish, magneto-optik, EPR spektroskopik va struktura usullarni qo‘llagan holda yuqori harorat bilan KAB shishlaridagi nanokomplekslarni shakllantirish mexanizmlarini o‘rganish keltirilgan. Kuchli tashqi ta’sirida optik yutilish ko‘rsatkichi Δα va Δn (masalan, termoradiatsion sharoitda) manfiy bo‘lishi nazariy va tajriba yo‘li bilan ko‘rsatilgan. SHunday qilib, optik sohada metamaterialni izlash formulasini taklif qilish mumkin (xech bo‘lmaganda birinchi va ikkinchi yaqinlashish).

Kalit so‘zlar: metamateriallar, manfiy sindirish ko‘rsatkichi, optik yutilish spektri, EPR-spektrlari, o‘zgartiruvchi effekt, nochiziqli effektlar, termoradiatsion ta’sir, valent-koordinatsion o‘tishlar

Detection of metamaterial properties in potassium aluminum glasses with additives of iron oxides exposed to thermal, radiation and thermoradiation interaction

Abstract. The article presents the main experimental results on the study of micro- and nanostructures of potassium aluminoborate glasses, the investigation of the mechanisms of formation of nanocomplexes in KAB glasses with additives (3d-) elements under the complex effect of hard electromagnetic radiation, high temperatures using magneto-optical, EPR spectroscopic and structural methods.It has been shown theoretically and experimentally that the optical absorption index Δα and Δn under strong external influences (such as, for example, under thermoradiation conditions) become negative. Consequently, it is possible to propose a formula for searching for metamaterial in the optical domain (at least in the first and second approximations).

Keywords: metamaterials, negative refractive index, optical absorption spectrum, EPR spectra, switching effect, nonlinear effects, thermoradiation effect, valent-coordination transitions**.**

Исследованию метаматериалов с отрицательным показателем преломления – искусственных материалов, состоящих из наноструктурных элементов, вид и взаимное расположение которых можно задать в процессе изготовления и воздействия на них различных внешних полей.

Интенсивные исследования, проводимые в течении последних десяти лет, привели к созданию метаматериалов, демонстрирующих отрицательный показатель преломления в гигагерцовой области частот. Отмечены новые тенденции, которые позволяют получить метаматериалы с отрицательным показателем преломления в ультрафиолетовой и ближней инфракрасной области спектра.

Актуальность задачи обусловлено, прежде всего уникальностью свойствами новых материалов с точки зрения их прикладного применения. Кроме того, изучение оптических, терморадиационных и магнитных свойств этих стекол является весьма важным, как для изучения механизмов формирования нанокомплексов в научном плане, выявление магнитооптических эффектов, проявляющихся в калиевоалюмоборатном (КАБ) стекле с добавками оксидов железа, так и для практического использования в наноэлектронике и компьютерной технологии в оптическом диапазоне. Квантовые динамически переключающиеся эффекты, проявляющиеся в квантовых точках ионов переходных металлов, обеспечивают материалам перспективы использования в оптике, медицине, биологии, оптоэлектронике, в том числе и в магнитооптике.

Цель настоящей статьи заключается в предоставлении основных экспериментальных результатов по изучению микро- и наноструктуры калиевоалюмоборатных стекол, исследование механизмов формирования нанокомплексов в КАБ стеклах с добавками (3d-) элементов при комплексном воздействии жесткого электромагнитного излучения, высоких температур с помощью магнито-оптических, ЭПР-спектроскопических и структурных методов.Такого рода исследования повышает интерес к магнитным наносистемам, обусловленный перспективой их использования в магнитооптике и технологии квантовых компьютеров. Воздействие проникающего ионизирующего излучения при повышенных температурах облучения стекла с оксидами металла влияет на его валентность и координацию в наношкале.

Магнитооптические свойства наноструктуированных объектов были изучены в [1-4]. Значительное число исследований посвящены изучению магнитных наночастиц, формирующимся в стекольных матрицах, активированных парамагнитными элементами ионов Cu, Fe, Co, Mn.

В отличие от этих исследований работа [5] посвящена изучению калиевоалюмоборатных (КАБ) стекол, содержащих ионы Fe^{2+} и Fe^{3+} под воздействием термических, радиационных и терморадиационных обработок. При этом наноструктурированные парамагнитные, суперпарамагнитные комплексы и кластеры проявляются в необычных парамагнитных радиационно-оптических свойствах (магнитный фазовый переход, валентно-координационные переходы $B–O–R^+$, где R^+ -ионы переменной валентности и др.). В перспективе применение КАБ стекол с добавками Fe_2O_3 как магнитооптических метаматериалов, возможно, требующих терморадиационной модификации структуры и свойств.

В отличие от [4] были исследованырадиационные воздействия на спектры поглощения и пропускания калиевоалюмоборатных стекол с добавками оксида железа различных концентраций и различной толщины образцов [6]. Показано, что в отличии образцов малой толщины (1 мм) в образцах с толщиной 8 мм наблюдается явление самопрозрачности образцов, где рассматривается возможный механизм обнаруженного дифференциального отрицательного поглощения ΔD, связанного с образованием наноструктурных единиц.

В работе [7] выявлено физическая сущность термических, радиационных и терморадиационных воздействий, используя феноменологические модели процессов и изложены также результаты исследований радиационно-оптических характеристик наноразмерных структур неактивированных и активированных оксидом железа калиевоалюмоборатных стекол состава КАБ-50 (50 моль.% B_2O_3) и КАБ-55 (55 моль.% B_2O_3) мол.%, которые являются перспективным материалом для магнито- и наноэлектроники.

В работах Levy P.W. и другие показывают, что для боросиликатных стекол радиационно-наведенное поглощение, образуемых суперпозицией ряда индивидуальных полос поглощения можно представить в виде гауссовой формы для каждого центра окраски α(E) как коэффициент поглощения фотонов с энергией E:

$$\alpha(E)=\alpha_m \exp[- (4\ln 2/\Delta E_{1/2})(E - E_0)^2], \quad (1)$$

где α_m – коэффициент поглощения при максимуме гауссовой кривой; $\Delta E_{1/2}$ – ширина на полувысоте максимума. Исходя из дозной зависимости оптической плотности (D) можно оценить число центров окраски N_i подвижных электронов по формуле Смакулы.

$$N_i \cdot f = 0.87 \cdot 10^{17} \cdot [n/(n^2+2] \cdot \Delta E_{1/2} \cdot \alpha_m, \quad (2)$$

где α_m= (2,303/d)·D; d – толщина образца в см.

Учитывая дисперсионные кривые и их связь через (1) и (2): $\alpha_m=\alpha_m(E)$, $n = n(E)$, для изменений α_m и n можем написать

$$[d\alpha_m(E)/dn(E)] = [d\alpha_m(E)/dE] / [dn(E)/dE]. \quad (3)$$

Предположим, что

$$n(E)=n_0 + \delta n_E = n_0(1+(\delta n_E/n_0)), \quad (4)$$

где n_0 - постоянный показатель преломления, $\delta n_E/n_0$– относительный показатель преломления, учитывающий дисперсию. Заменяя, для простоты $\alpha_m(E) =\alpha_\sim$; $n_E =n_\sim$ и учитывая (2) и (4) для производной $[d\alpha_\sim/dn_\sim]$ находим:

$$\left[d\alpha_\sim / dn_\sim\right] = C \cdot \left[N / \Delta E_{1/2}\right] \cdot \left\{(d / dn_\sim)\left[\left(\left(n_0^2 + 2\right)/\left(n_0 + n_\sim\right)\right) + \left(\left(2n_0 + n_\sim\right)/\left(n_0 + n_\sim\right)\right)\right]\right\} \quad (5)$$

Для простоты обозначим $\left(n_\sim / n_0\right) = n_\sim^{'}$ и окончательно получим

$$\left[d\alpha_\sim / dn_\sim^{'}\right] = \Delta\alpha_\sim = \left[2/\left(1+n_\sim^{'}\right)\right] - \left[\left(1+\left(2/n_0^2\right)\right)/\left(1+n_\sim^{'}\right)^2\right] - \left[\left(2n_\sim^{'}\right)/\left(n_0\left(1+n_\sim^{'}\right)^2\right)\right] \quad (6)$$

Для метаматериала можно принять границы изменения $-1< n_\sim^{'} <+1$ и вычисление по (6) показывает, $-4< \Delta\alpha_\sim< -2.25$. Таким образом, отрицательное значение коэффициента поглощения n, обусловленное терморадиационным воздействием, приводит к отрицательному значению индекса преломления оксидного стекла. Физически это означает, что при определенных условиях эксперимента стекло становится самопрозрачным.

В работе [8] исследованы оптические свойства калиевоалюмоборатных (КАБ) стекол состава ($25K_2O{\cdot}25Al_2O_3{\cdot}50B_2O$), мол.% с добавками Fe_2O_3 от 0,1 до 3,0 масс.% К, которые подвергнуты отжигу и терморадиационной обработке. Образцы имели форму полированных пластин площадью 1 см^2 и толщиной 1±0,05 мм. Облучения проводили гамма-квантами ~1.25 МэВ радиоизотопа ^{60}Co в установке ИЯФ АН РУз, дозой 1.7 МР при мощности дозы 236 Р/с (≤) и температурах образцов 323, 423, 473, 523, 573 К, которые ниже температур варки 1603 К и размягчения ~1000 К, но близки к температурам Кюри и образования кислородных дефектов. Спектры поглощения регистрировали на однолучевом спектрофотометре СФ-56 в пределах 190 - 1100 нм с погрешностью ± 3 %. На рис. 1 представлены дифференциальные спектры $\Delta D=D_1-D_{обр.}$, где D_1- спектр оптической плотности для исходных образцов, $D_{обр.}$- послесоответствующих термо- или радиационных обработок.

На рис. 1 приведены экспериментальные результаты терморадиационных исследований для стекла КАБ-50 с добавками Fe_2O_3 (1 mass %, сверх 100%) при температурах облучения образцов 423, 473 К (рис.1, кривые 2,3). Видно, что с увеличением температуры образцов значительно изменяется вид спектров, а именно при 423 К (рис.1, кривая 2) обнаруживается отрицательное дифференциальное поглощение в ультрафиолетовой области до 340 нм, затем наблюдается переключательный эффект координационно-валентного переброса состояния ионов железа в положительную область.

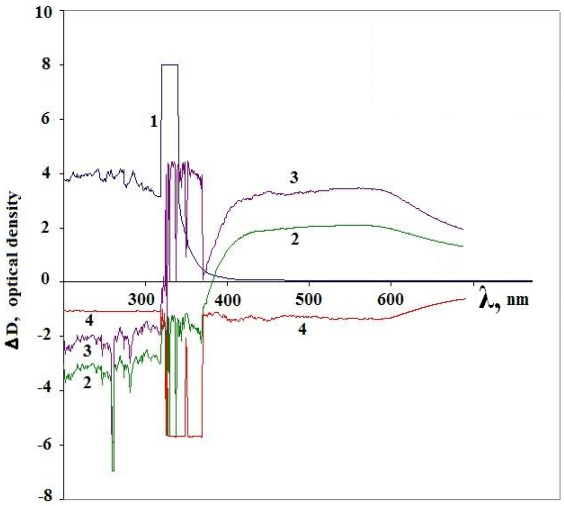


Рис.1.Дифференциальные спектры поглощения стекол КАВ-50 2.0 масс.% Fe_2O_3 в зависимости от температуры образца при гамма-облучении: 1 – оптическая плотность необлученного стекла; 2,3 – дифференциальная оптическая плотность после терморадиационной обработки при 423 и 473 К, соответственно; 4 – разность спектров 2 и 3.

Положительные изменения в дифференциальных спектрах в области 440-680 нм и 1100 нм (рис.1, кривые 2,3) обусловлены ион-ионными суперпарамагнитными взаимодействиями {ионы железа – матрица стекла}. Изменения спектров поглощения, а также дифференциальных спектров поглощения более существенны, поскольку указанные взаимодействия более сильны, как в УФ-области, так и в видимой области спектра: усиливается переключательный эффект в УФ-области и явно видно заметные изменения в области в области 440-680 нм, обусловленные образованием радикало-подобных образованием наночастиц $[FeO]^x$. Интересно то, что с увеличением температуры от 423 до 573 К степень отрицательности в УФ-области уменьшается. При 523 и 573 К как бы происходит компенсация отрицательного поглощения. Вероятнее всего, это явление обусловлено электронно-дырочными генерационно-рекомбинационными процессами на краю УФ-поглощения. Об этом свидетельствуют положительные выбросы в УФ-области, обусловленное электронно-дырочными рекомбинационными процессами. Следовательно, если отрицательное дифференциальное поглощение $\Delta\alpha_\omega$, как указано выше, можно связать с отрицательным индексом преломления, то наночастицы, образовавшиеся при терморадиационной воздействиях могут служить признаком «мета-материальности»: стекло становится самопрозрачной, котораяобусловливается валентно - координационными превращениями ионов Fe^{3+}, где неизбирательная самопрозрачность (190-700 нм) возникает в результате изменения наноструктуры матрицы стекла. Валентно-координационный переход ионов железа наблюдается в области 327 нм. При радиационном термообработке четко скачком образуются отрицательные полосы в областях 420 нм, 340 нм и 250 нм, которые можно использовать как области поиска метаматериала по отношению к калиевоалюмоборатных стекол с добавками Fe_2O_3 за счет терморадиационного воздействия. Можно перефразировать скачкообразные $\Delta D(+) \rightarrow (-)$ или $\Delta D(-) \rightarrow (+)$ области как частоты переключения фаз наночастиц. Действительно переключательные эффекты происходят в очень узкой области длин волн (частот) с крутизной переключения $\leq 0{,}1$ нм.

Обнаруженные и исследованные радиационно-оптические нелинейные эффекты имеют как научное, так и прикладное значение, в частности вышеуказанный переключательный эффект можно использовать для создания сверхбыстродействующих наноразмерных объемов записи, чтения и кодировки информации, а также для хранения их в памяти компьютерных устройств.

Нелинейные эффекты наблюдаются также в ЭПР-спектрах кислородсодержащих калиевоалюмоборатных (КАБ) стеклах с добавками Fe_2O_3, подвергнутых радиационной, термической и терморадиационной обработке. Взаимодействие и влияние термоотжига и гамма-облучения со стеклом приводят к нелинейным зависимостям интенсивности радиационно-наведенного ЭПР спектра от дозы гамма-облучения КАБ-стекла с добавками оксида железа. В таком случае ионы Fe^{3+} служат ЭПР-зондом и обладают парамагнитными свойствами при определенных достаточно малых концентрациях ионов железа.

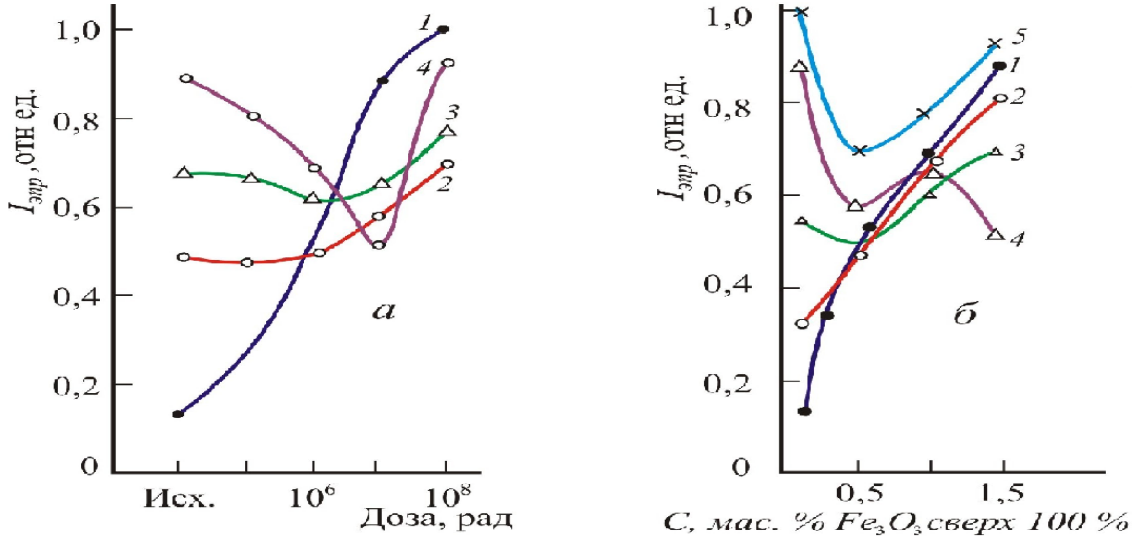


Рис.2.*Зависимость (а) максимальной амплитуды производной сигнала ЭПР от дозы γ-облучения для РПЦ $[AlO_4]^{e+}/[Fe^{3+} + e^-]$ в КАБ стекле при концентрациях добавки (масс.% сверх 100 %): 1 - 0,1; 2 - 0,5; 3 - 1,0; 4 - 1,5 %; б – концентрационная зависимость при дозах γ- облучения (Гр): 1 – необлученная, 2 – 10^3; 3 – 10^4; 4-10^5; 5-10^6.*

В работах [9-10] нами приведены экспериментальные результаты по зависимостям спектров ЭПР при облучении КАБ стекла как от состава $22{,}5K_2O*22{,}5Al_2O_3{\cdot}55B_2O_3$ (мол.%) с содержанием Fe_2O_3 от 0,1 до 1,5 масс.% сверх 100%, так и от дозы гамма-облучения в пределах от 10^3 до 10^6 Гр. Увеличение концентрации и дозы гамма-облучения ионов Fe^{3+} (Рис.2, а,б) приводит к качественно новой нелинейным зависимостям: при концентрации Fe_2O_3 равной ≥ 1 масс.% нелинейности интенсивностей ЭПР- сигнала от $[[AlO_4]+e^+]/[Fe^{3+}+e^-]$ -комплекса обусловлены образованием не только кластеров, но и небольших скоплений, крупных ассоциатов, т.е. сильно взаимодействующих между собой ионов Fe^{3+}.

Это предположение согласуется с тем, что с ростом дозы гамма-облучения подавляется сигнал от комплекса $[AlO_4]^{e+}$ (Рис. 2, а,б) и сигнал от ионов Fe^{3+} становится в сильной степени ассиметричным. Таким образом, исследованные семейства нелинейных зависимостей показывают, что при дозах при дозах меньших чем 10^5 Гр и концентрациях Fe_2O_3 меньших, чем 0,5 масс.% превалирует процесс локализации дырки, а при обратных соотношениях превалирует локализация электронов, при этом локализация электронов и дырок происходят в существенно измененных полях лигандов. Особенностью такого фазового перехода должна была бы быть скачок магнитного свойства или же существенное изменение магнитного параметра (например, намагничивания). Однако, на практике такое явление ни кем не было обнаружено. Измеренные нами дозная и концентрационная зависимость интенсивностей ЭПР-сигнала в пределах 0,1 ÷ 0,25 масс. % Fe_2O_3 имеет возрастающую линейную зависимость, в то время как при 0,5÷1,0 масс.% Fe_2O_3 наблюдается волнообразная нелинейная зависимость. Другими словами, в случае «суперпарамагнетизма» появляется недонасыщенная доменная структура. Для более точного определения суперпарамагнетизма, по-видимому, следует провести дальнейшие прецизионные измерения намагниченности и микроскопические исследования доменной структуры от дозы гамма-облучения и концентрационной зависимости.

Отметим, что в работе [10] рассматривалось зависимость ЭПР-спектра ионов Fe^{3+} от длительности варки и радиационной обработки щелочно-боратных стекол, где впервые рассматривается нелинейная зависимость интенсивности ЭПР-сигнала от Fe^{3+} и условия обеспечения однородности распределения ионов железа в матрице стекла от времени варки. Оказалось, что однородность распределения имеет критическое время варки и следовательно суперпарамагнитные состояние Fe^{3+} определенно связано с критической концентрацией 0,5- 1,0 масс.% Fe_2O_3 и временем варки. Таким образом, вероятно, обеспечения однородности распределения ионов Fe^{3+} можно принять за суперпарамагнитные фазовое состояние, фактически обусловленное самоорганизацией кластерных молекул $\{O=[Fe^{2+} - Fe^{3+}] \equiv O\}^x$.

Таким образом, исследования нелинейных эффектов, наблюдаемые с помощью оптической и ЭПР-спектроскопии в кислородсодержащих калиевоалюмоборатных (КАБ) стеклах с добавками Fe_2O_3, подвергнутых радиационной, термической и терморадиационной обработке. Взаимодействие и влияние термоотжига и гамма-облучения со стеклом приводят к нелинейным зависимостям интенсивности радиационно-наведенного ЭПР спектра от дозы гамма-облучения КАБ-стекла с добавками оксида железа. В таком случае ионы Fe^{3+} служат ЭПР-зондом и обладают парамагнитными свойствами при определенных достаточно малых концентрациях ионов железа.

Выводы:

1. Сопоставление результатов терморадиационных исследований при мощности γ-поля ^{60}Co 2600 Р/с при температуре облучения 673 К с аналогичными исследованиями при мощности 236 Р/с и температур облучения 423-573 К показали, что при оптимальных условиях температуры облучения стекло становится самопрозрачной, дифференциальная оптическая плотность в диапазоне УФ длин волн (от 200 до 350 нм) имеет отрицательное значение по отношению к эталонному образцу.
2. В настоящей работе теоретически и экспериментально показано, что показатель оптического поглощения Δα и Δn при сильных внешних воздействиях (как, например, при терморадиационных условиях) становятся отрицательными. Следовательно, можно предложить формулу поиска метаматериала в оптической области (по крайней мере в первом и во втором приближениях).
3. При некоторых оптимальных условиях терморадиационного воздействия в дифференциальном спектре поглощения в очень узкой области длин волн Δλ = 0.1-0.2 нм для стекла РАВ- 50 с добавками ионов железа (1-2 масс.%) происходит скачкообразный переход от - Δα на + Δα. Это процесс мы называли переключательным эффектом, поскольку при $\lambda_{пер.}$= 320-340 нм происходит, как показано в настоящей работе, валентно-координационный переход ионов железа по отношению к радикалам атомов кислорода.
4. Исследования нелинейных эффектов, наблюдаемые с помощью оптической и ЭПР-спектроскопии в кислородсодержащих калиевоалюмоборатных (КАБ) стеклах с добавками Fe_2O_3, подвергнутых радиационной, термической и терморадиационной обработке. Взаимодействие и влияние термоотжига и гамма-облучения со стеклом приводят к нелинейным зависимостям интенсивности радиационно-наведенного ЭПР спектра от дозы гамма-облучения КАБ-стекла с добавками оксида железа. В таком случае ионы Fe^{3+} служат ЭПР-зондом и обладают парамагнитными свойствами при

определенных достаточно малых концентрациях ионов железа. Полученные результаты модификации структуры магнитных стекол полезны для магнито-оптики и дозиметрии.

В заключении можно отметить, что переключательные эффекты можно использовать для создания динамической памяти квантового компьютера.

Литература

1. Т.Н.Василевская, Т.В.Антропова. Изучение структуры стеклообразных нанопористых матриц методом рентгеновского малоуглового ррассеяния. Физика твердого тела. 2009. Т.51, №12. с.2386-2393.

2. В.Б.Гусева, А.Ф.Зацепин, В.А.Важенин, Б.Шмидт, Н.В.Гаврилов, С.О. Чолах. Магнитный резонанс металлических наночастиц в стеклообразном диоксиде кремния, имплантированном ионами железа. Физика твердого тела. 2005. Т. 47. №4. с.650-653.

3. И.В.Голосовский, И.Мирбо, Ж.Андре, М.Товар, Д.М. Тоббенс, Д.А.Курдюков, Ю.А Кумазеров. Магнитный фазовый переход в антиферромагнетике CoO, наноструктурированном в пористом стекле. Физика твердого тела. 2006. Т. 48, №11. с. 2010-2013

4. О.С.Иванова, Д.А.Великанов, Н.Диденко, В.И. Зайковский. Магнитные свойства и морфология наночастиц феррита марганца в стекле. Журнал Сибирского Федерального университета. Серия Математика и физика. 2011. Т.4, №4. с.470-478.

5. А.Н.Салахитдинов, М.К.Салахитдинова, А.А.Юсупов. Исследование наведенных гамма-радиацией оптических спектров поглощения калиевоалюмоборатных стекол с добавками Fe_2O_3. Узбекский физический журнал. 2014. Т.16, № 2.с.144-148.

6. Э. М. Ибрагимова, А. Н. Салахитдинов, М.К.Салахитдинова, А. А. Юсупов. Влияние гамма-радиации на поглощение калиево-алюмоборатных стекол с добавками оксида железа. Журнал прикладной спектроскопии.2018. Т. 85, № 2. с.227-231.

7. E.M. Ibragimova, A.N. Salakhitdinov, M.K.Salakhitdinova, N.Saydirasulov,A.A. Yusupov.Thermoradiation modification of nanostructure of potash-alumo-boronglasses with iron oxide additives. Journal of Magnetism and Magnetic Materials. (2018) 459.

8. A.N.Salakhitdinov, E.M.Ibragimova, M.K.Salakhitdinova. Negative induced absorption and negative index of refraction for iron doped potash–alumina–borate glasses subjected to thermal-radiation treatment. Applied Physics A (2018) 124:187, pp.1592-1597.

9. М.К.Салахитдинова, А.Н.Салахитдинов, Х.Б.Мирзокулов. Нелинейные эффекты гамма-облучения по спектрам ЭПР в магнитооптических калиевоалюмоборатных стеклах. Сборник трудов XXIII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах», Москва, 30 июня-5 июля 2018 г., с.337-339.

10. М.М.Миркамалов, А.Н.Салахитдинов, М.К.Салахитдинова, А.А. Юсупов. «ЭПР-спектроскопия кристаллов граната и щелочно-боратных железосодержащих стекол, имеющих наноструктурные единицы и синтезированных путем терморадиационного воздействия». «Материаловедение», 2012. № 8. с.35-46.

УДК 621.315.592

СКОПЛЕНИЕ ЦЕНТРОВ ДОНОРНОГО ТИПА В Р-КРЕМНИИ, ВЫРАЩЕННОМ ПО МЕТОДУ ЧОХРАЛЬСКОГО И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С СОБСТВЕННЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

[1]О.Рахимов, [2]А.А.Эшбеков, [2]С.Н.Сражев

[1]Самаркандский государственный институт архитектуры и строительства

[2]Самаркандский государственный университет

Аннотация Обнаружено, что в p-Si, выращенном по методу Чохральского при температуре (600°C и 900 °C) возникают квазиточечные скопления дефектов донорного типа, содержание по 3-10 дефектов в каждом. В p-Si, не подвергавшимся термообработке, таких скоплений не обнаружено. Экспериментально установлено, что в результате гамма облучения скопления доноров в p-Si растет (число входящих в них доноров увеличивается), если в не облученном материале есть зародыши скоплений.

Ключевая слова: N_A акцепторы и N_D доноры, собственно-точечный деффект, эффективние сечение, диффузия, путь дрейфа, электро активные центры, термодонор.

Choxralskiy usulida olingan p-kremniy donor tir markazlarini to‘plash va ularning xususiy nuqtaviy nuqsonlar bilan o‘zaro ta’siri

Annotatsiya. Choxralskiy usuli bilan olingan 600 °S va 900 °S haroratda toblangan p-Si 3 tadan 10 tagacha termodonorli nuqsonlar majmuasi hosil bo‘lishi kuzatilgan. Toblanmagan p-kremniyda esa termodonorlar majmuasi kuzatilgan. p-Si da termodonorlarning 3 tadan 10 tagacha kichik sonli majmualari mavjud bo‘lsa, gamma nurlanishda bu majmualar ichidagi termodonorlar sonining ortishi tajribada aniqlangan.

Kalit so‘zlar: $N_A$akseptorlarva $N_D$donorlar, xususiy-nuqtaviy nuqsonlar, effektiv kesim, diffuziya, dreyf yo‘li, elektr faol markazlar, termodonor.

Accumulation of donor-type centers in p-silicon grown by the cochralian method and their interaction with own dot-effects

Abstract. It was found that in p-Si grown by the Czochralski method at a temperature (600 ºC and 900 ºC) quasi-point accumulations of onor-type defects appear, the content of 3-10 defects in each. In p-Si, not subjected to heat treatment, such clusters were not found.It was established experimentally that as a result of gamma irradiation, the accumulation of donors in p-Si increases (the number of donors increases in them), if there are nuclei of accumulations in the non-irradiated material.

Keywords: $N_A$absorbers and N_D donors, specific dental disorders, effective section, diffusion, drifting, electric-active centers, thermal donor.

Исследование дефектов структуры в кристаллах имеют большое значение как для развития теории твердого тела, так и для решения практических задач, поскольку возникновение дефектов может оказывать рещающее влияние на различные свойства кристаллов и приборов на их основе.

Настоящая работа работа посвящена изучению распределения центров донорноготипа в p-кремнии, выращенное по методу Чохральскогои подвергнутоготермообработкам, а также исследованию изменений этого распределения при гамма облучения. Кремний p-типа с концентрацией бора 1,5-2,0·10^{15} $см^{-3}$, кислорода 8,7·10^{17} $см^{-3}$ и углерода 1·10^{17} $см^{-3}$ подвергался термообработке при 600°C и 900 °C. При этом разносная концентрация акцепторов и доноров уменьшалась незначительно (в пределах 10%). Параметры материала до облучения, до термообработки и после термобработки (образцы 1-3) и контрольного материала p-Si<p> (образец 4) представлены в таблице 1.

Экспериментальные данные

Температура зависимости, а также концентрации и подвижности носителей заряда экспериментально получен.

Этот же p-кремний облучался на гамма-установке^{60}Co при комнатной температуре. Концентрация и подвижность носителей заряда в результате облучения изменялись незначительно (ср.данные таблице 1 и 2).

Для обнаружения скоплений донорных центров и нахождения функции распределения скоплений доноров, т.е. зависимости концентрации скоплений N_Z от числа z входящих в них термодоноров до и после γ-облучения использовались данные фотоэлектрических измерений, производившихся по методу, описанному в [1]. Найдены из экспериментальных данных зависимости $\varphi_2(t)$ от времени наблюдения, η(t) текущего заряди η от времен наблюдения (t) и зависимость f(t) для объема занимаемой область пространственного заряда (ОПЗ) f скоплений от времени наблюдения t после выключения света для разных образцов p-Si до и после гамма-облучения. Путем сопоставления значений η(t) и f(t) в один и то же моменты времени найдена зависимость f(η) (до и после облучения) и эта зависимость представлена на рис 1.

Результаты анализа этой зависимости, проведенные с использованием формулы по медоду [1], представлены на рис.2.

В контрольном материале, не подвергнутом термообработке,фотопроводимость не наблюдалась в пределах точности измерений $5\%)$ ни до, ни после облучения.

Следовательно, как можно утверждать, что концентрация скоплений с Z≥5 не превышает $10^{11}см^{-3}$.

Таблица №1

№ образца	P_{300K}, см$^{-3}$	Температура термообработки *) °С	Время термообработки *)	P_{300K}, см$^{-3}$	Rσ, см^2/В·с		N_Aсм$^{-3}$	$N_Д$см$^{-3}$	K
	До термаобработки			После термаобработки	78 K	300 K			
1	$1{,}77\cdot10^{15}$ *)	600	6	$1{,}35\cdot10^{15}$	$8{,}71\cdot10^{3}$	404	$1{,}52\cdot10^{15}$	$1{,}71\cdot10^{14}$	0,11
2	$1{,}78\cdot10^{15}$ *)	600	8	$1{,}26\cdot10^{15}$	$8{,}91\cdot10^{3}$	454	$1{,}41\cdot10^{15}$	$1{,}54\cdot10^{14}$	0,11
3	$1{,}75\cdot10^{15}$ *)	900	24	$1{,}51\cdot10^{15}$	$7{,}77\cdot10^{3}$	390	$1{,}65\cdot10^{15}$	$2{,}34\cdot10^{14}$	0,14
4	$2{,}3\cdot10^{15}$	-	-	-	$1{,}03\cdot10^{4}$	470			

**) данные П.Гаваршевски и К.Шмальца*

Таблица №2

№ образца	$Ф\cdot10^{-18}$, см$^{-2}$	$P\cdot10^{-15}$, см$^{-3}$ 300K	Rσ, см^2/В·с	
			78K	300K
1	7,30	1,35		364
2	5,95	1,23	$3{,}5\cdot10^{3}$	364
3	6,73	1,10	$6{,}17\cdot10^{3}$	329
4	6,51	2,24	$9{,}86\cdot10^{3}$	461

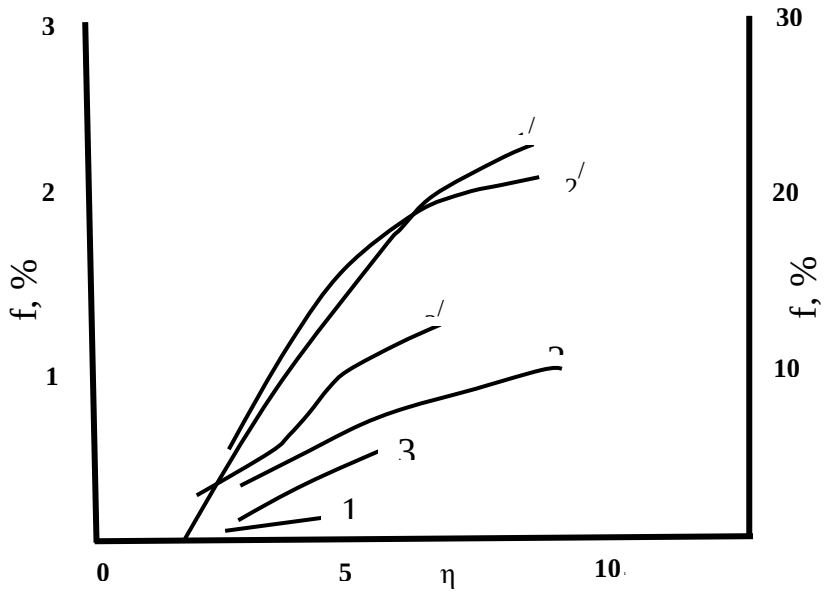


Рис. 1. Зависимость доли объема занимаемой ОПЗ скоплений f от текущего заряда η после выключения света для разных образцов p-Si до и после облучения. 1,2,3 – Ф=0; 1$^/$ Ф=$7{,}30\cdot10^{18}$ см$^{-2}$; 2$^/$ Ф=$5{,}95\cdot10^{18}$ см$^{-2}$; 3$^/$ Ф=$6{,}73\cdot10^{18}$ см$^{-2}$. Горизонтальная линии соответствуют темновым значениям f. Кривые 1, 1$^/$: масштаб – левая ось, кривые 2, 2$^/$, 3, 3$^/$: масштаб – правая ось.

Таким образом, оказалось, что скопления дефектов донорного типа образуются именно при термообработке.

В виду того, что обнаруженные скопления характеризуются небольшими значениями Z, и существует опасность появления больших ошибок в определении N_Z, связанная с невыполнением условия $R_{опз}>L_{св.пр.}$.

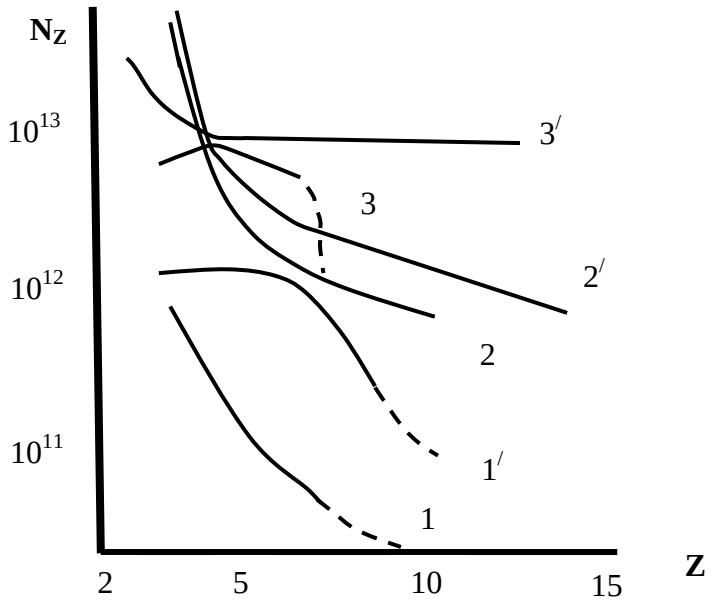


Рис. 2. Зависимости концентрации скоплений от числа входящих в них термодоноров в p-Si для разных обрацов. 1,2,3 – Ф=0; 1/ Ф=7,30·10^{18} $см^{-2}$; 2/ Ф=5,95·10^{18} $см^{-2}$; 3/ Ф=6,73·10^{18} $см^{-2}$.

Сотрудниками ФТИ имени А.Ф.ИоффеН.Т.Баграевым и Л.С.Власенко по нашей просьбе было проведен исследование функции $N_Z(Z)$,т.е. зависимости концентрации скоплений N_Z от числа z входящих в них термодоноровв изученных нами образцах p-Si методы оптической поляризации ядер (ОПЯ) [2]. Результаты этих исследований свидетельствуют о наличии неодноростей в распределении термодоноров и о том, что эти неоднородности характеризуются двумя резко различными масштабами величины. Оказалось, что существуют макронеоднородности со средним размером ~2,5÷5 мкм, концентрация их ~10^9 $см^{-3}$ и микронеоднородности, содержание нескольких доноров, входящие в состав макронеоднородностей.

В кремнии, термообработанном при 600°С, наряду с макронеоднородностями, имеются мелкие одиночные кислородные термодоноры с E_C – 0.07 эВ и с концентрацией ~5·10^{13} $см^{-3}$, каторые находятся в пространстве между макронеоднородностями и также вносят вклад в релаксацию и поляризацию ядер.

Величина времени ядерной релаксации в пространстве между макронеоднородностями в кремнии, термообработанном при 900°С, указывает на практически полное отсутствие между ними термодоноров и других дефектов решетки. Обнаружено, что макронеоднородностивключают в себя как одиночные термодоноры, так и их скопления. С помощью зависимостей времени релаксации ОПЯ отмагнитного поля оказалось возможным найти распределение скоплений по числу составляющих их парамагнитных центров. На рис. 8 доказано распределвние$N_Z(Z)$, полученное двумя методами: с помощью исследования фотоэлектрических свойств материала (кривые I, 2) и с использованием метода ОПЯ (кривые 1/,2/). (кривые 1/,2/ рис.3 соответствуют кривым 2,3 рис.2).

Видно удовлетворительное согласие результатов, подученных этими двумя методами для кремния, термообработанного как при 600°С, так и при 900 °С.

Это согласие дает основания для следующих заключений:

1. Парамагнитные центры проявляющихся вэкспериментах по ОПЯ являются электрически активными.
2. Погрешности в определении f, связанные с нарушением условия $R_{опз}>L_{св.пр.}$, становятся недопустимо большими лишь при $Z<4$.

Для больших скоплений метод фотоэлектрической регистрации скоплений э.а.ц. дает вполне удовлетворительные результаты и может быть использован для нахождения функции распределения $N_Z(Z)$.

Обсуждение результатов

1. Скопления термодоноров в р-кремнии, выращенном по методу Чохральского, появляются только в результате дополнительной термообработки. В контрольное материале, не подвергнутом термообработке, скопления обнаружены не были ни фотоэлектрическим методом, ни методом ОПЯ.
2. Функции распределения числа скоплений по числу составляющих их термодоноров оказываются различными в материалах, подвергнутых термообработке при.различных температурах.

Наиболее существенное отличие состоит в том, что в материале, обработанном при 900°С, концентрация одиночных глубоких термодоноров существенно меньше, чем в материале, обработанном при 600°С. Есть основания полагать, что это является следствием интенсивного распада твердых растворов углерода и кислорода в условиях прогрева при900°С.

При этом процесс образования скоплений, по-видимому, определяется преципитацией углерода. Чем выше температура термообработки, тем интенсивнее происходит преципитация углерода, скоплениятомов которого являются центрами зародышеобразования при распаде твердого раствора кислорода. Если при термообработке при 600°С
в кристалле еще сохраняются одиночные или парные центры углерода, которые при взаимодействии с мигрирующими в процессе распада атомами кислорода образуют одиночные точечные глубокие, термодоноры, то при 900°С в кристалле практически не остается одиночных атомов углерода, что приводит к резкому снижениюконцентрации одиночных глубоких термодоноров. (см. кривые 2 и $2^{/}$, рис.3) [8].

При высоких температурах, вследствие распада твердого раствора углерода, могут образовываться достаточно крупные скопления глубоки-термодоноров, которые, в свою очередь являются центрами зародышеобразования при распаде твердого раствора других остаточных примесей.

Основным глубоким тернодонором, образующимся при распаде твёрдыхрастворов углерода и кислорода, является центр, обладающий донорным уровнем E_c-0,48 эВ [7]. При формировании скоплений энергия ионизации уровня флуктуирует за счет взаимодействия дефектов между собой и взаимодействия термодоноров с акцепторами III группы [3].

Мелкие термодоноры с уровнем E_C – 0,07 эВ присуствуют только в материале, обработанном при 600°С; это связано с тем, что температура600^{O}С еще недостаточна для полного отжига точечных кислородсодержащих термодоноров, интенсивно образующихся при распаде твердого раствора кислорода в интервале температур 350-5ОО ^{O}С[4-6].

3. При термообработке кремния возникают неоднородности двух различных масштабов. Макронеоднородности в распределении термодефектов с размерами в несколько микрон в свою очередь состоят из одиночных термодефектов и их скоплений. В пространстве между макронеоднородностями мелких скоплений термодефектов не наблюдается[9-11].

Метод фотоэлектричеекой регистрации скоплений не выявляет макронеоднородностей, поэтому для получения полбой картины распределения примесей и дефектов желательно, привлекать совокупность различных методов обнаружения скоплений.

4. Видно (см. рис. 2), что облучение приводит к росту размеров скоплений донорных центров и к увеличению концентрации скоплений с определенным Z.

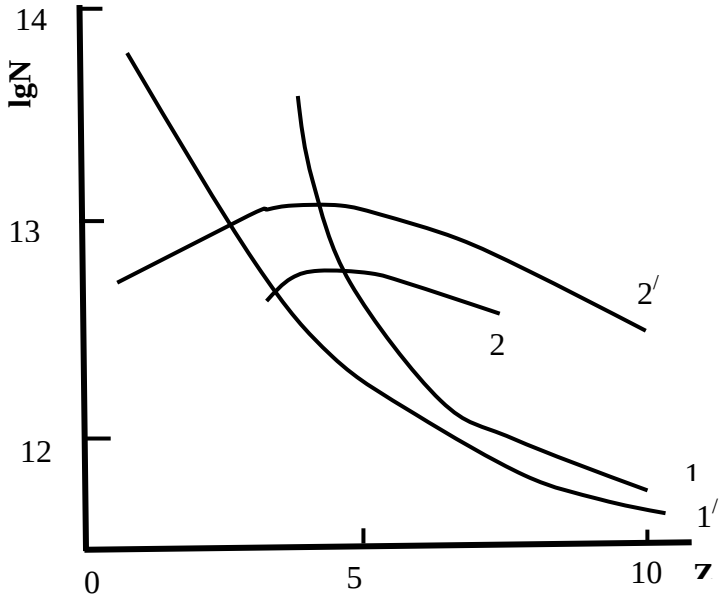


Рис. 3. Зависимости концентрации скоплений от числа входящих в них термодоноров.
1, $1^{/}$ - после термообработки при 600°С;
2, $2^{/}$ - при 900°С;
1, 2 – данные фотоэлектрических исследований;
$1^{/}$, $2^{/}$ - данные исследования ОПЯ.

Можно указать две возможные причины роста скоплений при облучении:

1. Существует определенная вероятность рождения дефектов структуры внутри области пространственного заряда (ОПЗ) уже имеющихся скоплений.
2. Рождающиеся вне скоплений (в матрице кристалла) дефекты могут путем диффузии или дрейфа захватываться скоплениями.

Кроме того, следует учитывать, что при облучении за счет уменьшения разности концентрации акцепторов N_Aи доноров N_Dвозрастает дилина экранирования и, следовательно, радиусы ОПЗ.

Литература

1. Витовский Н. А. Метод определения заряда квазиточечных скопленийатомов примесей и функции распределения скоплений по их заряду.ФТП, 1982, Т.5, с. 882-885.
2. Баграев Н.Т., Власенко А. С, Оптическая поляризация ядер в кремниипри оптической накачке в слабых магнитных полях. ЖЭТФ, 1979, т. 75вып5,с. 1743-1754.
3. Баграев Н. Т., Власенко Л.С., Карпов Ю. А., Туровский В.М. Распадтвёрдого раствора в бездислакационном кремнии ФТП, 1983, т. 16, вып.2, с: 276—280.
4. Gaworzewski P., SchmalzK. On the Kinetiks of Thermal Donora in Oxygen-Rich Silicon in tne Range from 450 to 900°C Phys. Stat. Sol. (a) m1980, v. 58, № 2, P, k 223-k 226.
5. Комалеев Ф. Н., Мордкевич В. Н., Темпер Э.М., Харченко В.А. Влияниетермообработки и облучения на состояние кислорода в кремнии. ФТП,1976, т. 10, вып. 2, с. 320-323.
6. Miller S.H., TuynmanCM., Sieverts E. G., Ammerlaan C.A.J. Elektronparamannetic resonance on iron-related conters in silicon. Phys. Rev., 1982,v. 25, №1, p. 25-40.
7. Батавин В.В., Земко А.Е., Салманов А.Р., Шелоков А. Н. ТезисыдокладовVВсесоюзной конференции по физ - хим основамлегированных полупроводниковых материаллов. Москва, 1982, с. 124.
8. Gapper P., Jones A.W., Wallhouse E. J., Wilkes. J. G. The effects of heat treatments on dislocation-free oxygen-containing silicon crystals. J. Appl.Phys.,1997, v. 48,№4, p. 1646-1655.
9. Рахимов О. In P материалидаги акцептор мажмуаларининг гамма кванти таъсирида ҳосил бўладиган нуқтавий нуқсонлар билан ўзаро таъсири. Меъморчилик ва қурилиш муаммолари (илмий - техникжурнал), № 3-4,Самарқанд, 2003, с. 64-67.
10. Рахимов О., Холдоров Н. Изменение электропроводимостив p-Si приоблучении *f*-квантами. "Ҳозирги замон физикасининг долзарб муаммолари" Республика илмий-назарий конференция. Термиз, 2006.
11. Рахимов О., Тугалов Ф. n-InPakseptor klastrlari o'lchamlari gamma-kvanti ta'sirida o'zgarishi. SamDAQI "Архитектура ва қурилиш соҳаларида инновацион технологияларни қўллаш истиқболлари" mavzusidagi xalqaro ilmiy-texnik konferensiya materiallari, II-qism, Samarqand, 2016 (27-28 may), 97-98 betlar.

UDK: 52

MAYDANAK OBSERVATORIYASIDA KUZATILGAN BLAZARLARNING OPTIK YORQINLIK O’ZGARISHLARI

B.Sh. Jurayev, S.Sh. Ergashev, L.F. Iskandarova, O.B. Saydayev
Samarqand davlat universiteti
ergashev.salohiddin@bk.ru

Annotatsiya. Maqolada Maydanak balandtog‘ observatoriyasining Zeiss-600 teleskopida 2014 va 2016 yilda kuzatilgan CTA 102, BL Lacyerta, 3C454.3 blazarlarining fotometriyasi natijalari keltirilgan. Natijalarni tahlil qilinganda bu blazarlarning yorqinligi tez va tartibsiz o‘zgarganligi va kuzatilgan vaqt davomida yulduz kattaligi amplitudasi mos ravishda CTA 102 blazari uchun $1^m.79$, BL Lacertae uchun $0^m.63$ va 3C454.3 blazari uchun $1^m.64$ ga teng bo‘lganligi aniqlandi.

Kalit so‘zlar: blazar, CTA 102, 3C454.3, BL Lacertae, ZAQ kamera, IRAF dasturi

Вариаций оптические яркости блазаров на майданакской обсерватории

Аннотация. В статье приведен анализ результатов фотометрии блазаров CTA 102, BL Lacertae и 3C454.3.Наблюдения были выполнены в фильтре R на 60 см "южном" телескопе Zeiss-600 Майданакской высокогорной обсерватории. В результате анализа обнаружены быстрые и беспорядочные изменения блеска блазара, амплитуда которых составила порядка $1^m.79$ звездной величины в CTA 102, $0^m.63$ звездной величины в BL Lacertae, $1^m.64$ звездной величины в 3C454.3.

Ключевые слова: blazar, CTA 102, 3C454.3, BL Lacertae, ZAQ kamera, IRAF программы.

Variations optical brightness of the blazar at the maidanak observatory

Abstract. In this work preliminary results of an optical photometric monitoring of the blazars CTA102, BL Lacertae and 3C454.3 in observing season of 2014 and 2016 at the Maidanak Observatory are presented. From the Fig. 4 one can easily see the variations of blazars as: $\Delta R=1^m.79$, $\Delta R=0^m.63$, $\Delta R=1^m.64$ respectively.

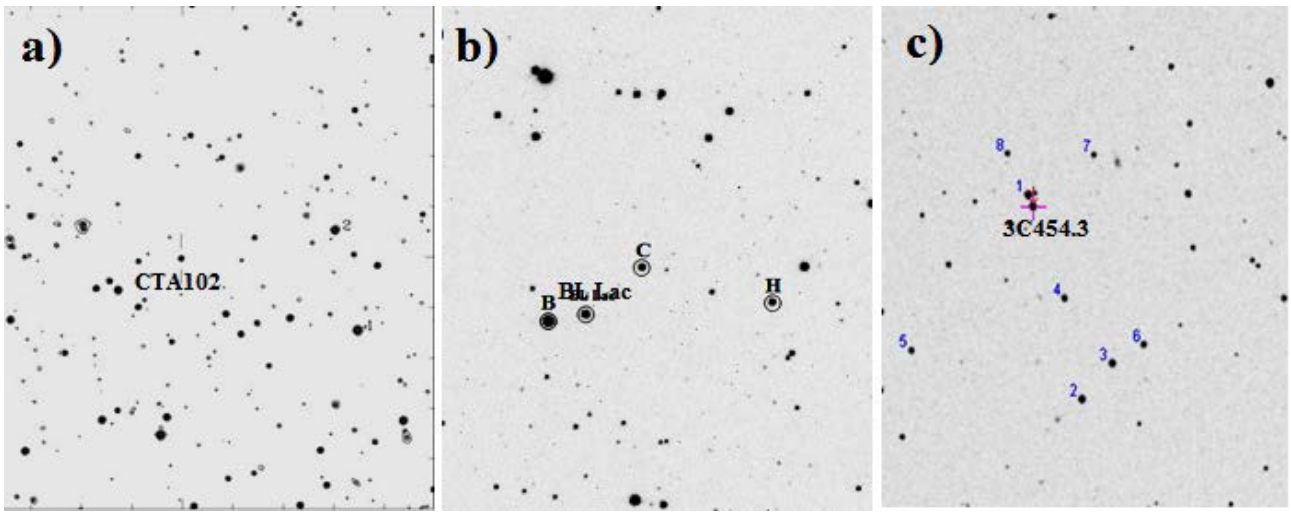
Keywords: blazar, CTA 102, 3C454.3, BL Lacertae, ZAQ kamera, IRAF program.

Kirish. Galaktikadan tashqaridagi manbalar kuzatuvi zamonaviy astrofizikaning dolzarb yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Shu jumladan optik o‘zgaruvchan blazarlar ham. Blazarlar faol yadroli galaktikalarning yosh vakillaridan bo‘lib ular barcha elektromagnit to‘lqinlarda nurlanish tarqatishlari bilan xarakterlidir. Ilk blazar 1929 yilda nemis astronomi Cuno Hoffmeister [1] tomonidan kashf etilgan. Dastlab blazarlarga galaktikalardagi noto‘g‘ri o‘zgaruvchan yulduzlar deb tasnif berilgan. 1968 yilda astronom Djon Shmid (John Shmitt) [2] tomondan spektrini o‘rganish natijasida oradan 30 yil o‘tib blazarlar o‘zgaruvchan yulduz emas — balki faol yadroli galaktikalar ekanligi aniqlandi. Blazarlar yorqinligining o‘zgarishi optik diapazonda 4-5 yulduz kattaligigacha yetadi. Bu turdagi obyektlar optik spektrida qalin emissiya chizig‘i mavjud emasligi bilan kvazarlardan farq qiladi.

Ushbu maqolada CTA 102, BL Lacertae, 3C454.3 blazarlarining 2016 yil avgust-sentabr va 2014 yil iyul oyi davomida olingan kuzatuv ma’lumotlarining fotometrik tahlili natijalari yoritilgan. Barcha kuzatuvlar Maydanak balandtog‘ observatoriyasi teleskoplarida olib borilgan.

CTA102 (PKS2232+1143) ilk bor radiomanba sifatida 1969 yilda Kaliforniya texnologiyalari institutida aniqlangan (1-rasm a). Ilk kuzatuvlarda ushbu blazar 200-400 kunlik davr bilan o’zgaruvchan manba sifatida o’rganilgan (A. Volvach va boshqalar). Uning koordinatalari 2000.0, yil epoxasi bilan RA $16^h35^m15.5^s$, DEC +38°08’04" ga teng. CTA 102 blazari 2016 yilning 14 avgustidan 28 dekabrigacha kuzatilgan bo‘lib, 32 kunlik kuzatuv ma’lumotlari va 104 tasvir mavjud.

BL Lacertae (BL Lac) ham aynan optik o‘zgaruvchanligi yuqori bo‘lgan blazarlardan biri bo‘lib 1968 yilda Schmitt tomonidan topilgan (1-rasm b). Dastlab o‘zgaruvchan yulduz sifatida kashf etilgan bu manba keyinchalik faol yadroli galaktika (blazar) ekanligi aniqlandi. Ushbu blazargacha bo‘lgan masofa Oke va Gunn [3] tomonidan aniqlangan bo‘lib, qizilga siljishi z = 0.069 teng. Uning koordinatalari 2000.0, yil epoxasi bilan RA $22^h02^m07^s$, DEC +42°16’40" ga teng. Bu blazar kuzatuvlari tarixida bir necha bor yuqori aktivlik va chaqnashlar kuzatilgan. O‘rganishlar davomida bu obyekt 4 va 8 yillik davr bilan yuqori aktivlikka erishishi aniqlangan. BL Lacertae blazari 2014 yilning 1 iyuldan 22 iyulgacha kuzatilgan bo‘lib, 14 kunlik kuzatuv ma’lumotlari va 42 ta tasvir mavjud.



1-rasm. CTA 102(a), BL Lacertae (b) va 3C 454.3 (c) blazarlarining

USNO katalogidan olingan kartasi.

3C454.3 (2251+158). Qizilga siljishi z = 0.860 ga teng bo‘lgan bu obyekt blazar orasida juda ham o‘zgarishi yuqori bo’lganlaridan biridir (1-rasm c). Bu obyekt yuqori gamma nurlanishga ega bo‘lgan osmon jismlarining yaqqol namoyon etuvchi manbalardan biri hisoblanadi. 3C454.3 blazari Maydanak balandtog‘ observatoriyasining Zeiss-600 teleskopida 2014 yilning 1 iyuldan 30 iyulgacha kuzatilgan bo‘lib, 22 kunlik kuzatuv ma’lumotlari va 107 tasvir olingan.

Kuzatuvlar O’zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Ulug‘bek nomidagi Astronomiya instituti Maydanak balandtog‘ observatoriyasining ko‘zgusining diametri 60 sm bo’lgan “janubiy” Karl Seyss teleskopida FLI Pro Line PL 4710 ZAQ kamerasida olib borilgan.Kamera xarakteristikalari 1-jadvalda berilgan.

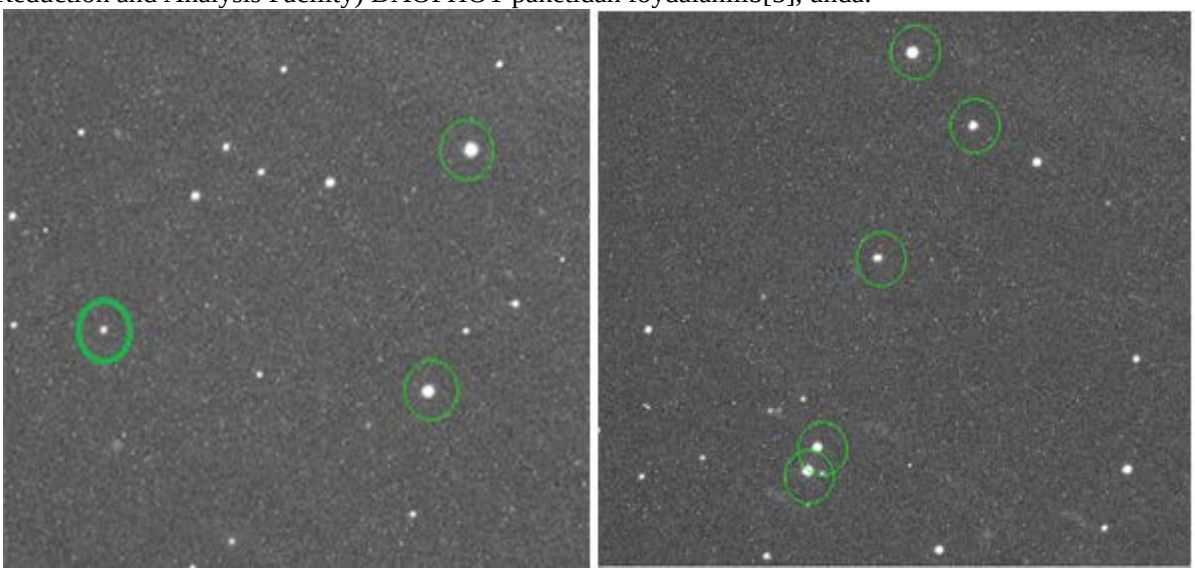
Tasvirlar R filtrda CTA102 -120, BL Lacertae - 90 va 3C454.3 -120 sekundlik ekspozitsiya vaqti bilan olingan.

1-jadval. FLI Pro Line PL 4710 ZAQ kamerasining texnik xarakteristikalari

Piksellarsoni	Ko‘rish maydoni (minut)	O‘qish shovqini	Kattalashtirish koeffisiyenti
1024x1057	6.5x6.5	8.373	1.24

Kuzatilgan blazarlar «Butun dunyo blazar teleskoplari» (WEBT) kompaniyasining GLAST-AGILE kuzatuv programmasi (GASP) uchun tanlab olingan 28 radio-optik aktiv blazarlaridandir [4].

Ma’lumotlarni fotometrik tahlilqilishda LINUX operatsion sistemasida ishlovchi IRAF (Image Reduction and Analysis Facility) DAOPHOT paketidan foydalanilib[5], unda:



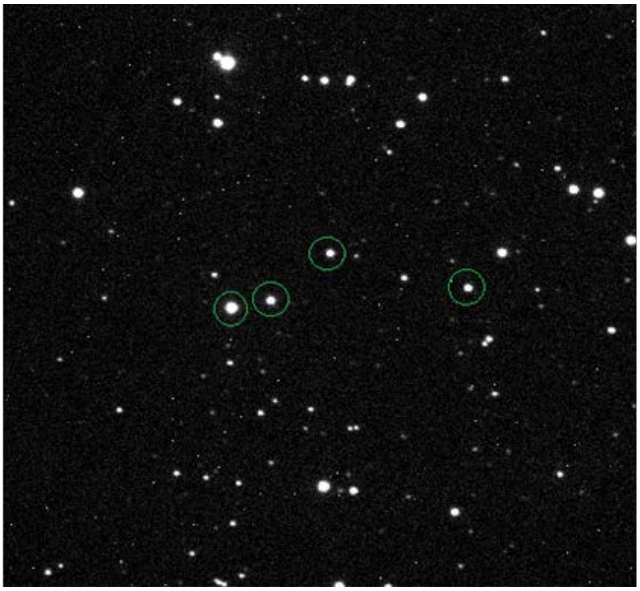
2-rasm.

CTA 102 va 3C454.3 blazarining Maydanak observatoriyasi teleskopida olingan tasviri.

1) Tasvir maydonida 0 punktning siljishini (bias) xisobga olish
2) tasvir maydonining qorong’ulik tokini korreksiyalash (dark)
3) flat (flat) tasvirlari yordamida maydonni tekislash
4) asosiy obyekt tasviridan qo’shimcha tasvirlarni ayrish

ishlari olib borildi.

Ma’lumki, har bir obyektni o‘rganishda shu obyekt kuzatilgan maydonda mavjud bo‘lgan yulduzlardan solishtirma yulduzlar belgilab olinadi. Bu yulduzlar obyekt o‘zgarishlarini aniqlash uchun juda muhim bo‘lib, solishtirma yulduzlarning o‘z yorqinliklari o‘zgarmas bo‘lishi talab etiladi. Tanlab olingan blazarlarning ma’lumotlarini tahlil qilish uchun solishtirma yulduzlarni tanlab olishda bizdan oldin o‘rgangan olimlarning maqolalarida tanlab olingan yulduzlardan foydalanildi[6,7]. Bunda CTA 102 blazari uchun 2 ta 3C454.3 blazari uchun 4 ta va BL Lacertae blazari uchun 3 ta solishtirma yulduzlardan foydalanildi (2-3-rasm).



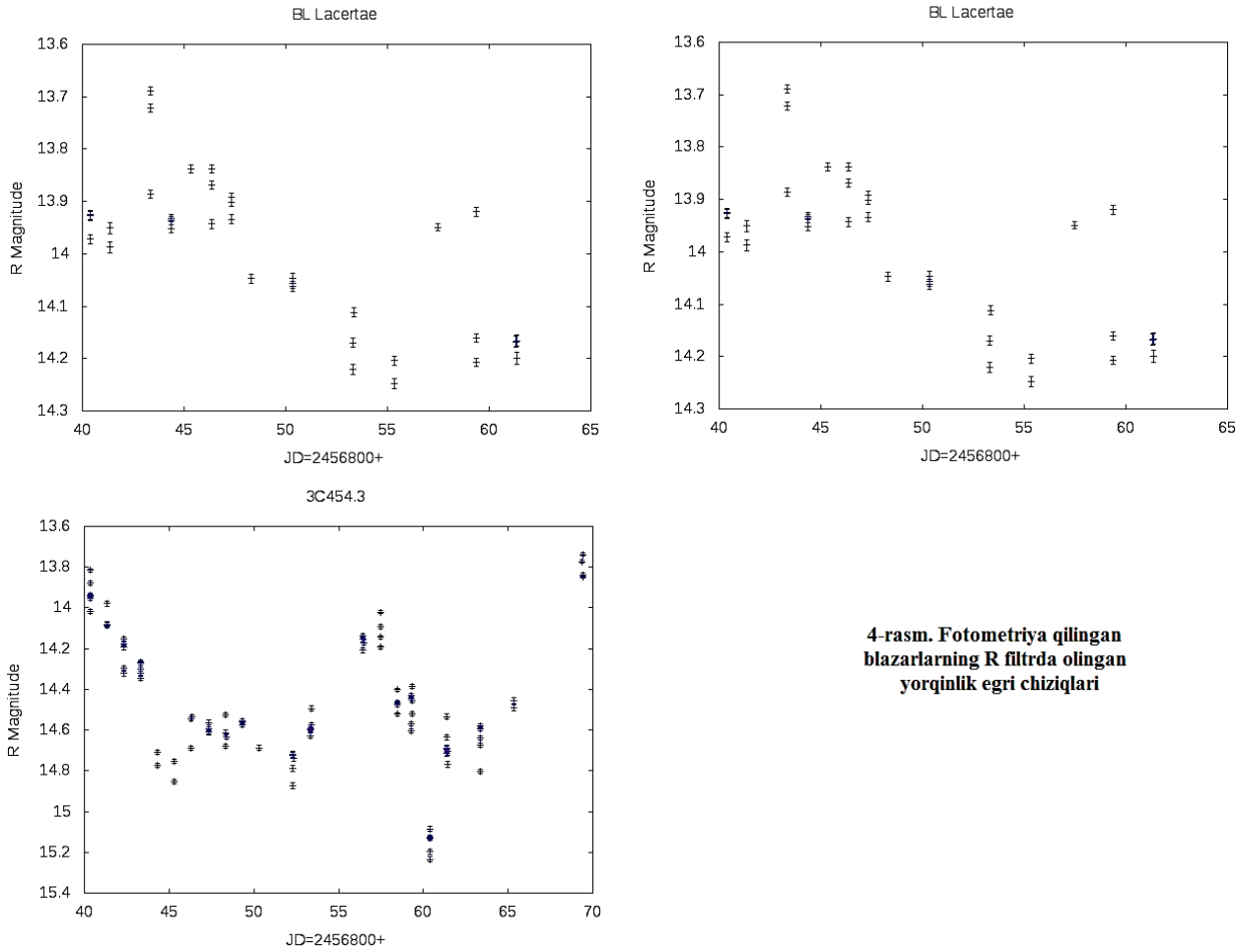
3-rasm BL Lacertae blazarining solishtirma yulduzlari.
Maydanak observatoriyasida olingan tasvir.

Olib borilgan fotometrik tahlillar shuni ko‘rsatmoqdaki, ushbu blazarlar o‘rganilgan davrda optik diapazonda tez va tartibsiz o‘zgargan. Jumladan:

Fotometrik tahlil qilish vaqtida CTA 102 blazarining yorqinligi R filtrda 15.866 ± 0.006 dan 14.076 ± 0.010 nisbiy yulduz kattaligigacha orasida o‘zgarib, uning o‘rganilgan vaqt davomida umumiy yorqinlik o‘zgarish $\Delta m_R = 1.79$ nisbiy yulduz kattaligiga teng ekanligi aniqlandi (4-rasm).

BL Lacertae blazarining yorqinligi R filtrda 13.617 ± 0.006 dan 14.247 ± 0.01 nisbiy yulduz kattaligigacha orasida o‘zgarib, uning o‘rganilgan vaqt davomida umumiy yorqinlik o‘zgarish $\Delta m_R = 0.63$ nisbiy yulduz kattaligiga teng ekanligi aniqlandi (4-rasm).

3C454.3 blazarining yorqinligi R filtrda 13.586 ± 0.009 dan 15.233 ± 0.012 nisbiy yulduz kattaligigacha orasida o‘zgarib, uning o‘rganilgan vaqt davomida umumiy yorqinlik o‘zgarish $\Delta m_R = 1.647$ nisbiy yulduz kattaligiga teng ekanligi aniqlandi (4-rasm). Xulosa qilib aytganda, biz



4-rasm. Fotometriya qilingan blazarlarning R filtrda olingan yorqinlik egri chiziqlari

o‘rgangan blazarlar kuzatuvlar davomida juda aktiv o‘zgarishga ega bo‘lgan.

Adabiyotlar

1. S. Hoffmeister. 1929 AstronomischeNachrichten, 236, p.233-244
2. Schmitt, John L. 1968,Nature 218 ,5142, p. 663
3. Oke J.B. &Gunn J.Ye. 1974, 189. p.L5
4. http://www.oato.inaf.it/blazars/wyebt/
5. http://iraf.noao.yedu/
6. Fiorucci&Tosti. 1996, A&AS 116, p.403
7. Raiteri C.M. yet al., 1998, A&AS 130, p.495

UDK 523.2

MAYDANAK OBSERVATORIYASIDA (5889) MICKIEWICZ VA (13063) PURIFOY ASTEROIDLARINING KUZATUVLARI TAHLILI

K.E. Ergashev[1], Y.Sh. To‘rayev[1], B.Sh. Jurayev[2], A.Q.Ajabov[2]
[1]*O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Astronomiya instituti*
[2]*Samarqand Davlat Universiteti*

Annotatsiya. Maqolada (5889) Mickiewicz va (13063) Purifoy asteroidlarining Maydanak baland – tog‘ observatoriyasidagi kuzatuvlari natijalari yoritilgan. Kuzatuvlar jarayonida (5889) Mickiewicz va (13063) Purifoy asteroidlari uchun mos holda 610 va 877 ta ZBQ tasvirlari olingan. Olingan ZBQ tasvirlari IRAF dasturlar paketi yordamida qayta ishlangan va fotometrya qilingan. Fotometrya natijalarini tahlil qilish natijasida ilk marotaba (5889) Mickiewicz va (13063) Purifoy asteroidlarining o‘z o‘qlari atrofida aylanish davrlari katta aniqlikda topilgan. Aniqlangan aylanish davrlari (5889) Mickiewicz va (13063) Purifoy uchun mos ravishda 6.1412 ± 0.0543 soat va 10.3435 ± 0.2451 soatga teng bo‘lib chiqdi. Kuzatuv davrida ularning ko‘rinma yulduz kattaliklari mos holda 0.369 ± 0.054 mag va 0.858 ± 0.097 mag yulduz kattaliklariga teng o‘zgarishlar berdi.

Kalit so’zlar: Mickiewicz va Purifoy asteroidlari, fotometrya, aylanish davri, yulduz kattaligi.

Наблюдений астероидов (5889) Mickiewicz и (13063) Purifoy на майданакской обсерватории

Аннотация. В статье представлены результаты наблюдений астероидов (5889) Mickiewicz и (13063) Purifoy, выполненных на Майданакской астрономической обсерватории (МАО). В результате наблюдений астероидов (5889) Mickiewicz и (13063) Purifoy было получено 610 и 877 ПЗС снимков, соответственно. Все этапы обработки и фотометрии всех полученных ПЗС снимков выполнены с помощью пакета программ «IRAF» под ОС LINUX. На основе анализа полученных кривых блесков избранных малых планет, нами впервые определены их синодические периоды вращения. Найденные значения периодов вращения для астероидов (5889) Mickiewicz и (13063) Purifoy составили 6.1412 ± 0.0543 час и 10.3435 ± 0.2451 час, соответственно, а амплитуда вариаций блеска астероидов в R фильтре составила 0.369 ± 0.054 mag и 0.858 ± 0.097 mag звездных величин, соответственно.

Ключевые слова: астероиды Mickiewicz и Purifoy, фотометрии, периоды вращения, звездные величины.

Results of asteroids (5889) Mickiewicz and (13063) Purifoy at the maidanak observatory

Abstract. Results of observations of the asteroids (5889) Mickiewicz and (13063) Purifoy, carried out at the Maidanak Astronomical Observatory (MAO) are presented. During observations of the asteroids (5889) Mickiewicz and (13063) Purifoy 610 and 877 the CCD images were recorded. All stages of the image processing obtained CCD images and the photometry of the research objects are produced using the software package «IRAF» under OS LINUX. Based on the analysis of the light curves of selected minor planets, the synodic period of rotation are measured. The values of the rotation periods for asteroids (5889) Mickiewicz and (13063) Purifoy are 6.1412 ± 0.0543 and 10.3435 ± 0.2451 hour, respectively. The amplitude variations of the brightness of asteroids in R light filter were 0.369 ± 0.054 mag and 0.858 ± 0.097 magnitudes, respectively.

Keywords: The asteroids Mickiewicz and Purifoy, the photometry, the rotation period, magnitude.

I. Kirish.

Quyosh tizimining kichik jismlari orasida asteroidlar, kometalar, meteor oqimlari va sayyoralararo changlar mavjud. Asteroidlar notoʻgʻri shakldagi, diametri bir necha metrdan 1000 km gacha oʻlchamga ega boʻlgan osmon jismlaridir. Asteroidlar orbitalarining asosiy qismi Mars va Yupiter orbitalari orasiligʻida joylashgan. Bu asteroidlar asteroidlar bosh belbogʻini tashkil qiladi. Ularning orbita radiuslari Quyoshdan taxminan 2.2 a.b (astronomik birlik) dan 3.3 a.b gacha oraliqda joylashgan [1].

Asteroidlarning orbital parametrlari ancha keng chegaralarda joylashgan boʻlib ($e \leq 0.3$), ularning oʻz oʻqi atrofida aylanish davri bir necha soatdan bir necha sutkagacha, Quyosh atrofida aylanish davri esa bir necha yillar hisobida boʻladi. Asteroidlar juda koʻp sonda boʻlgani bilan, bosh belbogʻ asteroidlarning umumiy massasi taxminan Yer massasining atigi 0.05 % ini tashkil qiladi [1,2].

Asteroidlar bosh belbogʻining strukturasi, ular tarkibidagi moddalarning fizik holatlari, nafaqat asteroidlarning oʻzi, balki butun quyosh tizimidagi jarayonlarning evolyutsiyasi bilan ham belgilanadi. Asteroidlarni oʻrganish bizga Quyosh tizimining evolyutsiyasi haqida juda koʻplab ma'lumotlar berishi mumkin. Hozirgacha 800 mingdan ortiq asteroidlar Garvard xalqaro kichik sayyoralar katalogida roʻyxatga olingan boʻlsada [3], ammo ularning koʻplab parametrlari, shu jumladan, oʻz oʻqi atrofida aylanish davrlari haligacha toʻla oʻrganilmagan.

II. (5889) Mickiewicz va (13063) Purifoy asteroidlarining oʻrganilish darajasi

(5889) Mickiewicz va (13063) Purifoy asteroidlari dunyoning bir qancha astronomik observatoriyalari tomonidan kuzatilgan, masalan, Crimea-Nauchnij (1979-yil), Palomar Mountain (1990-yil), Oak Ridge Observatory (1991-yil), Lincoln Laboratory ETS, New Mexico (1999-yil), Catalina Sky Survey (2001-yil), Lowell Observatory-LONEOS (2007-yil), Space Surveillance Telescope, Atom Site (2014-yil), Pan-STARRS 1, Haleakala (2018-yil) va boshqa observatoriyalar.

(5889) Mickiewicz asteroidi birinchi marta 1979 yil 31 martda N.S. Chernykh tomonidan kuzatilgan, bu asteroid nomi buyuk Polyak yozuvchisi Adam Mickiewicz nomiga shunday nomlangan, yangi topilgan vaqtda unga 1979 FA3 birlamchi nomlanish berilgan [2,3,4]. (13063) Purifoy asteroidi birinchi marta 1991 yilning 5 iyunida Kitt Peak observatoriyasida kuzatilgan, kataloglardagi birlamchi nomlanishi 1991LB. Quyidagi 1-jadvalda ushbu asteroidlarning bir qancha orbital parametrlari keltirilgan.

1-jadval. Asteroidlarning orbital parametrlari

Orbita parametrlari	(5889) Mickiewicz	(13063) Purifoy
Birinchi marta kuzatilgan yili	1979	1991
Quyoshdan oʻrtacha uzoqligi [a.b.]	3.0463306	2.226
Afeliy (Q) – [a. b.]	3.527	2.659
Perigeliy (q) – [a. b.]	2.5657352	1.79
Aylanish davri (P) (*Quyosh atrofida*)	5.32 yil	3.32 yil
Eksentrisitet (e)	0.1577621	0.194
Ogʻish burchagi (i) – [grad]	19.18665	4.83528
Absolyut yulduz kattaligi	12.2	14.4

III. Asteroidlarining Maydanak observatoriyasidagi kuzatuvlari

(5889) Mickiewicz asteroidini kuzatish 2017-yilning 21-mayidan 27-iyunigacha oraliqda jami, 6 kun davom etgan, kuzatuvda olingan umumiy tasvirlar soni 610 ta, kuzatuvning umumiy davomiyligi 24.34 soatni tashkil qiladi. (13063) Purifoy asteroidini kuzatish 2018-yilning 10-iyulidan 21-avgustigacha oraliqda, jami 9 kun davom etgan. Kuzatuvda olingan umumiy tasvirlar soni 877 ta, kuzatuvning umumiy davomiyligi 34.25 soatni tashkil qiladi.

Barcha kuzatuvlar Maydanak observatoriyasining diametri 0.6 metrlik, ZEISS-600 rusumli shimoliy teleskopida [5,6] olib borilgan. Kuzatuvlar boʻyicha batafsil maʻlumot quyidagi 2 va 3-jadvalda keltirilgan.

2-jadval. (5889) Mickiewicz asteroidining kuzatuv maʻlumotlari

№	Sana [kk/mm/yy]	Qoʻllangan filtrlar	Ekspozitsiya vaqti (s)	Tasvirlar soni	Kuzatuv davomiyligi [soat]
1	21.05.2017	R	180	81	4.05
2	15.06.2017	R	120	124	4.13
3	17.06.2017	R	180	94	4.7
4	20.06.2017	R	120	140	4.66
5	26.06.2017	R	180	66	3.3
6	27.06.2017	R	120	105	3.5

3-jadval. (13063) Purifoy asteroidining kuzatuv ma‘lumotlari

№	Sana [kk/mm/yy]	Qo‘llangan filtrlar	Ekspozitsiya vaqti (s)	Tasvirlar soni	Kuzatuv davomiyligi [soat]
1	10.07.2018	R	120	45	1.5
2	19.07.2018	R	180	56	2.8
3	20.07.2018	R	180	92	4.6
4	21.07.2018	R	180	77	3.85
5	22.07.2018	R	180	77	3.85
6	06.08.2018	R	120	145	4.83
7	07.08.2018	R	120	142	4.73
8	18.08.2018	R	120	166	5.53
9	21.08.2018	R	120	77	2.56

Bundan tashqari, asteroidlar kuzatilgan har bir kechada yordamchi bias, dark va flat tasvirlar ikki martadan (ertalab va kechqurun) olingan. Har bir kecha uchun Dark tasvirlar asteroid tasvirlari bilan bir xil ekspozitsiya vaqti, flat tasvirlar esa asteroid tasvirlari bilan bir xil filtrlar yordamida olingan.

IV. Raqamli tasvirlarni dastlabki qayta ishlash va fotometrya

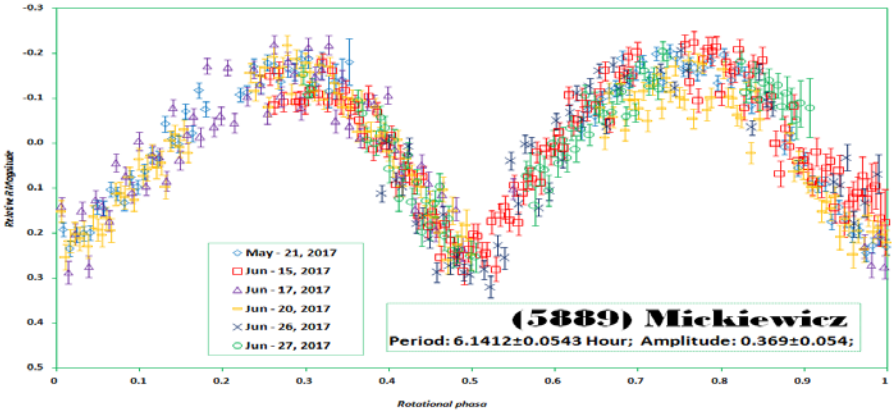
(5589) Mickiewicz va (13063) Purifoy asteroidlari tasvirlari IRAF (*Image Reduction and Analysis Facility*) maxsus dasturlar paketida qayta ishlandi [7,8]. Tasvirlarni qayta ishlash ikki bosqichda amalga oshirildi, 1-bosqichda barcha raqamli tasvirlarni birlamchi qayta ishlash (fotometryaga tayyorlash), 2-bosqich tasvirlarni fotometryalash. Tasvirlarni birlamchi qayta ishlashda ularning ichidan (yordamchi tasvirlardan ham) yaroqsiz raqamli tasvirlar chiqarib tashlandi. Tasvirlarni birlamchi qayta ishlashda uchun quyidagi formuladan foydalaniladi:

$$X_{ij} = I_{ij} * F_{ij} + D_{ij} + B_{ij} + N_{ij}$$

Bu yerda X_{ij} – umumiy oqim, I_{ij} – obektning o‘zidan kelayotgan nurlanish oqimi, F_{ij} – flat tasvirdagi oqim , D_{ij} – dark tasvirdagi oqim, B_{ij} – bias tasvirdagi oqim, N_{ij} – boshqa omillar bilan bog‘liq oqim.

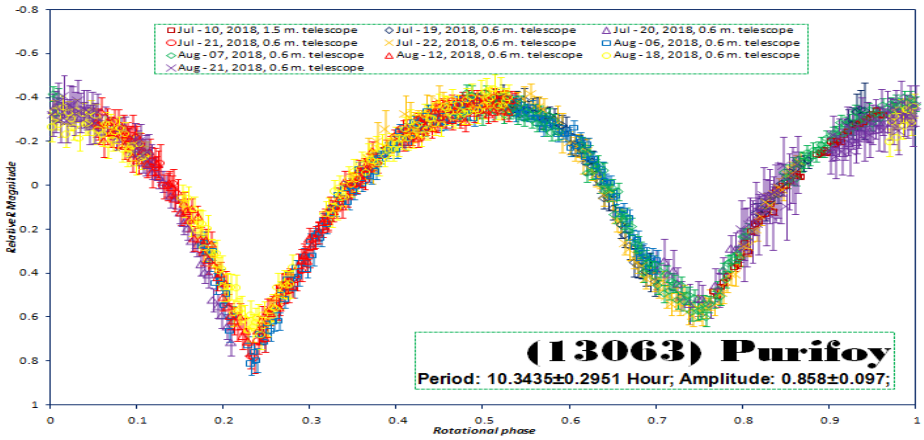
V. Ravshanlik egri chiziqlarining tahlili

(5889) Mickiewicz asteroidi ravshanlik egri chiziqlari tahlili shuni ko‘rsatdiki, uning o‘z o‘qi atrofida aylanish davri 6.1412 ± 0.0543 soatga teng ekan. Kuzatuv davomida asteroid R filtrda nisbiy yulduz kattaligi o‘zgarishlarning amplitudasi 0.369 ± 0.054 ga teng bo‘ldi. (5889) Mickiewicz asteroidi uchun davriy ravshanlik egri chizig‘i quyidagi 1-rasmda berilgan.



1-rasm. (5889) Mickiewicz asteroidi davriy ravshanlik egri chizig‘i

(13063) Purifoy asteroidi ravshanlik egri chiziqlari tahlilidan ma’lum bo‘ldi-ki, uning o‘z o‘qi atrofida aylanish davri 10.3435 ± 0.2451 soatga teng ekan. Kuzatuv davomida asteroid R filtrda nisbiy yulduz kattaligi o‘zgarishlarning amplitudasi 0.858 ± 0.097 ga teng bo‘ldi. (13063) Purifoy asteroidi uchun davriy ravshanlik egri chizig‘i quyidagi 2-rasmda berilgan.



2-rasm. (13063) Purifoy asteroidi davriy ravshanlik egri chizig‘i

VI. XULOSA

(5889) Mickiewicz va 13063 Purifoy asteroidlarining raqamli kuzatuv tasvirlaridan foydalanib, ularning ravshanlik egri chiziqlari olindi. Ravshanlik egri chiziqlarini tahlil qilish [9,10] orqali ularning o‘z o‘qi atrofida aylanish davrlari katta aniqlikda birinchi bo‘lib topildi. (5889) Mickiewicz asteroidi uchun aylanish davri 6.1412 ± 0.0543 soat, (13063) Purifoy asteroidi uchun aylanish davri 10.3435 ± 0.2451 soatga teng bo‘ldi. Asteroidlarning kuzatuv davomidagi nisbiy yulduz kattaligi o‘zgarishlarining amplitudasi R filtrda mos ravishda (5889) Mickiewicz asteroidi uchun 0.369 ± 0.054 yulduz kattaligiga, (13063) Purifoy asteroidi uchun esa 0.858 ± 0.097 yulduz kattaligiga teng bo‘ldi.

Adabiyotlar

1. Маров М.Я. "Малые тела Солнечной системы и некоторые проблемы космогонии" // УФН-2005. Т. 175. №6. С. 668-677.
2. http://minorplanetcenter.net/iau/mpc - сайт Minor Planet Center.
3. http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi/ - сайт JPL Small-Body Database Browser.
4. Schmadel, Lutz D. Dictionary of Minor Planet Names. — Fifth Revised and Enlarged Edition. // B., Heidelberg, N. Y.: Springer, 2003. - P. 43. - 992 p.
5. http://maidanak.uz - Официальный сайт Майданакской обсерватории
6. http://astrin.uz – сайт Астрономического института АН РУз
7. Massey P., Davis L. E. Users Guide to Steller CCD Photometry with IRAF, NOAO publication A:-1992
8. http://iraf.noao.edu – сайт продукта «Image Reduction and Analysis Facility»
9. Бурхонов О.А.. Об обнаружение периодических сигналов из астрономических данных // Ташкент. Улугбековские чтения -3, стр. 141-145. 2014
10. Бурхонов О.А., Ш.А. Эгамбердиев, К.Э. Эргашев. Результаты наблюдений астероида (334) Chicago на Самаркандской и Майданакской обсерваториях // ДАН, №3, стр. 39-41, 2013.

УДК 538.945:539.166

ПАРАМЕТРЫ ТЕНЗОРА ГРАДИЕНТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В УЗЛАХ БАРИЯ ДЛЯ $YBa_2Cu_3O_{7-x}$, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ МЕТОДОМ МЕССБАУЭРОВСКОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Э.Ю.Тураев, Ш.С.Замонова
Термезский государственный университет

Аннотация. Методом эмиссионной Мессбауэровской спектроскопии на изотопе Ba – 133 определены параметры тензора градиента электрического поля (ГЭП). Установлено, что расхождение экспериментальных и расчетных значений $eq_{кр}$, что объясняется несовершенством моделей, используемых для расчета $eq_{кр.}$.

Ключевые слова: градиента электрического поля, тензор, решетка, ядерный квадрупольный резонанс, изотоп, возбужденное ядро, спин, спектр, квадрупольное расщепление, параметри асимметрии, экспериментальное значение, полупроводник, сверхпроводник.

Messbauer spektroskopiya metodi yordamida $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ Bariy tugunlaridagi elektr maydoni tenzorining gradient parametrlarini aniqlash

Annotatsiya. Ba – 133 izotopida emission Messbauer spektroskopiyasi usulida elektr maydon gradienti tenzori parametrlari aniqlandi. $eq_{кр}$ eksperimental va hisobiy qiymatlarning o‘zaro mos kelmasligi shu $eq_{кр}$ qiymatini hisoblash modelining talab darajasida emasligidan dalolat berishi aniqlandi.

Kalit so‘zlar: elektr maydon gradiyenti, tenzor, panjara, yadroviy kvadrupol rezonans, izotop, uyg‘ongan yadro, spin, spektr, kvadrupol ajralish, asimmetriya kattaliklari, tajribaviy qiymat, yarimo‘tkazgich, o‘ta o‘tkazgich.

Electric field gradient tensor parameters in barium nodes for $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ determined by messbauer spectroscop

Abstract. The method of the Mossbauer emission spectroscopy on the Ba-133 isotope, the parameters of the electric field gradient (EFG) tensor are determined. It is established that the discrepancy between the experimental and calculated values of $eq_{кр}$ is explained by the imperfection of the models used to calculate $eq_{кр}$.

Keywords: electric field gradient, tensor, frame, nuclear quadruple resonance, isotope, the waking nucleus, spin, spectrum, quadruple splitting, asymmetry parameters, experimental value, semiconductor, superconductor.

Экспериментальное определение параметров тензора градиента электрического поля (ГЭП) в узлах решетки $УBa_2Cu_3O_{7-x}$ является актуальной задачей. В первую очередь это объясняется возможностью для указанной керамики провести сравнение экспериментальных и расчетных параметров ГЭП и, как результат, возможностью оценить справедливость тех исходных предпосылок, в рамках которых производится расчет решеточных сумм.

Наиболее полная информация о параметрах ГЭП в узлах кристаллической решетки может быть получена методами ядерного квадрупольного резонанса (ЯКР) и мессбауэровской спектроскопии. Однако в применении к $УBa_2Cu_3O_{7-x}$ оба метода относятся либо к центрам меди (ЯКР на изотопах ^{63}Cu, ^{65}Cu [1]), либо к примесным центрам в положении атомов меди (эффект Мессбауэра на изотопах $^{57}Fe(^{57}Co)$ [2]; ^{119}Sn [3] и $^{67}Zn(^{67}Cu)$ [4]), либо к центрам редкоземельных металлов в положении атомов иттрия (эффект Мессбауэра на изотопах ^{151}Eu [5], ^{155}Gd [6], ^{161}Dy [7], ^{166}Er [8], ^{169}Tm [9], и ^{170}Yb [10]). Не касаясь здесь проблемы извлечения из экспериментальных значений e^2qQ информации о $eq_{кр}$. (см., например, обсуждение в [4]) отметим лишь, что практически отсутствуют прямые измерения параметров тензора ГЭП в узлах атомов бария для керамики $УBa_2Cu_3O_{7-x}$ (здесь eQ – квадрупольный момент исследуемого ядра, eq – главная компонента тензора ГЭП на исследуемом ядре, $eq_{кр.}$ – главная компанента тензора ГЭП, создаваемого ионами решетки в данном узле).

Это связно как с трудностями измерений спектров ЯКР на изотопах ^{135}Ba, ^{137}Ba, так и отсутствием стабильных мессбауэровских изотопов бария.

В настоящей работе предлагается использовать для определения параметров тензора ГЭП в узлах бария эмиссионную мессбауэровскую спектроскопию на изотопе $^{133}Ba(^{133}Cs)$. Электронный захват в материнском ядре ^{133}Ba приводит к образованию возбужденного 81- кэВ уровня ^{133}Cs, причем энергия отдачи при испускании нейтрино в данном случае не превышает 1 эВ, так что дочерний атом цезия оказывается в положении атомов бария. Изомерный переход в ^{133}Cs совершается между состояниями со спинами 5/2 и 7/2, так что при нахождении атома цезия в кристаллическом поле, симметрия которого ниже кубической, в мессбауэровском спектре должно появиться восемь линий разной интенсивности. Однако, учитывая значения квадрупольных моментов ядра ^{133}Cs в основном и возбужденном состояниях ($Q_{OCH}=-0.003\cdot10^{-24}см^2$, $Q_{возб.}=-0,22\cdot10^{-24}см^2$[7]) реально снимается вырождение лишь для возбужденного ядра ^{133}Cs, так что в мессбауэровском спектре должно наблюдаться три линии, относительное положение которых с скоростном спектре позволяет в принципе определить значение e^2qQ, ее знак и значение параметра асимметрии. Наконец, дочерний атом цезия в своих химических соединениях проявляет только валентность +1 (электронная конфигурация $4d^{10}$), что позволяет из экспериментальных значений eq определить значение $eq_{кр.}$ и, как результат, проводить сравнение экспериментальных и расчетных значений $eq_{кр.}$

Образцы $У^{133}Ba_2Cu_3O_7$ готовили путем спекания соответствующих оксидов на воздухе, образцы $У^{133}Ba_2Cu_3O_6$ получали нагреванием $У^{133}Ba_2Cu_3O_7$ при вакуумной откачке. Образцы $УBa_2Cu_3O_7$ имели ромбическую структуру и для них T_c – 85 К. Образцы $УBa_2Cu_3O_6$ имели

тетрагональную структуру и они были полупроводниками при T≥4,2 К. Мессбауэровские спектры снимались при 4,2 К с поглотителем Cs≤CI поверхностной плотностью 350 мг/см^2.

В качестве предварительного этапа был измерен эмиссионный мессбауэровский спектр ^{133}BaO (рис.а) - он представляет собой одиночную линию, шириной которой ($\Gamma_{ЭКСП.}$=0,90±0,02мм/с) несколько превышает удвоенную естественную ширину 81 – кэВ уровня ^{133}Cs ($2\Gamma_{ест.}$=0,54 мм/с). Поскольку BaO имеет решетку типа NaCl, мы сочли, что различие между $\Gamma_{ЭКСП.}$ и $2\Gamma_{ест.}$ обусловлено лишь аппаратурными эффектами и в дальнейшем за аппаратурную ширину спектральной линии принимали 0,90 мм/с (т.е. при разложении экспериментальных мессбауэровских спектров У^{133}$BaCu_3O_{7-x}$ на квадрупольные мултиплеты предполагалось, что ширина компанент не может быть меньше 0,90 мм/с).

Мессбауэровский спектр сверхпроводящей керамики $УBa_2Cu_3O_7$ представляет собой одиночную уширенную линию (см. рис. б и табл.), которая отвечает центрам $^{133}Cs^+$ в узлах бария. В структуре $УBa_2Cu_3O_{7-x}$ атомы бария занимают единственное положение и поэтому уширение экспериментального спектра связано с неразрешенным квадрупольным расщеплением. В таблице приведены значения e^2qQ, определенные из спектра на рис. б. Для полупроводниковой керамике $УBa_2Cu_3O_6$ мессбауэровский спектр также представляет собой одиночную линию, но ее ширина заметно возраствет (см. рис. в и табл.). Этот спектр также отвечает центрам $^{133}Cs^+$ в узлах бария, значение e^2qQ для них приведены в таблице.

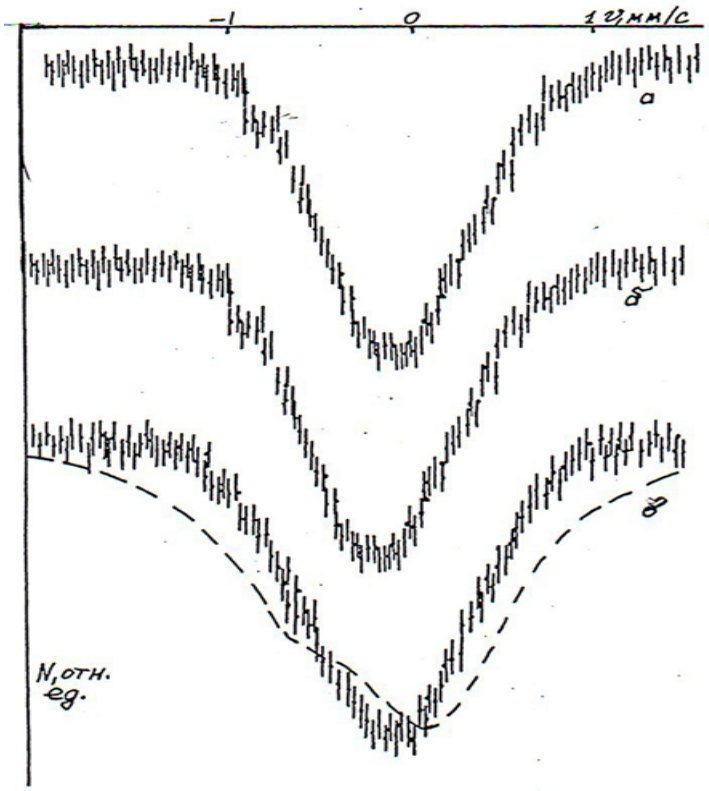


Рис. Эмиссионные мессбауэровские спектры ^{133}BaO [а], $YBa_2{}^{133}Cu_3O_7$ [б] и $YBa_2{}^{133}Cu_3O_6$ [в] при 4.2 К. Для спектра [в] показан теоретический спектр ($eq_{кр}$(Ba) = 0.150 e/Å^3)

Из экспериментальных значений eq по соотношению eq=(1-γ) $eq_{кр}$. (здесь γ- коэффициент Штернхеймера для Cs^+ γ=-121,3 [11]) , были получены значения $eq_{кр.}$ [12]. Как видно из таблицы, переход от ромбической к тетрагональной модификации $УBa_2Cu_3O_{7-x}$ сопровождается возрастанием $eq_{кр.}$, причем имеется качественное согласие между экспериментально определенными и расчетными значениями $eq_{кр.}$, хотя количественное согласия нет. В качестве иллюстрации на рис. в пунктиром показан теоретический мессбауэровский спектр для образца $УBa_2Cu_3O_6$, причем для расчета использовалось значение $eq_{кр.}$, приведенное в работе [12]. Видно, что в отличие от экспериментального спектра, для теоретического спектра наблюдается отчетливая структура и значительное уширение. Мы полагаем, что расхождение экспериментальных и расчетных значений $eq_{кр.}$ объясняется несовершенством моделей, используемых для расчета $eq_{кр.}$.

Таблица XXУ. Параметры эмиссионных мессбауровских спектров $УBa_2Cu_3O_{7-x}$

Соединение	Центр	$\lvert e^2qQ\rvert$, Мгц	$\lvert eq^{э}_{кр}\rvert$, e/Å^3
$У^{133}Ba_2Cu_3O_7$	$^{133}Cs^+$	45±5	0.048±0.002
$У^{133}Ba_2Cu_3O_6$	$^{133}Cs^+$	65±5	0.069±0.002

Литература

1. Brinkmann D. // Physica C, 1988, v.153-155, p.737-738.
2. Bottyam L., Molnar B., Nagy D.L., Szucz I.S., Toth J., Dengler J., Retter G., Schober J // Phys. Rev. B, 1988, v.38, №16, p.11373-11381.
3. Zhang H., Wang G. M., Zhang Q.R. // Phys. Lett. A, 1989, v.138, №9, p.517-522.
4. Мастеров В.Ф., Насрединов Ф.С., Серегин П.П. // Сверхпроводимость: физика, химия, технология, 1990.Т.3.№3.
5. Stadnik Z.M., Stroink G., Dunlap R.A. // Phys. Rev. B, 1989, v.39, №13, p.9108-9112.
6. Alp E.K., Soderholm L., Shenoy G.K., Hinks D.C., Cappone D.W., Zhang H.K., Dunlap B.D. // Phys. Rev. B, 1987, v.36, №16, p.8910-8913.
7. Hodges J.A., Imbert P., Marimon de Cunha J.B., Hammann J., Vincent E., Sanchez J.P. //Physica C, 1988, v.156, №1, p.143-156.
8. Hodges J.A., Imbert P., Marimon de Cunha J.B., Sanchez J.P. //Physica C, 1989, v.160, №1, p.49-54.
9. Gubbens P.C.M. // J. Magn and Magn. Mater. 1988, v.76-77, p.615-616.
10. Hodges J.A. et al. // Solid State Commun. 1987, v.64, №9, p.1209-1211.
11. Dexsi J., Pattyn H., Verbiest E., Van Rossum M. //Phys. Rev. B, 1989, v.39, №10, p.6321-6324.
12. Lyubutin J.S., Terziev V.G., Dmitrieva T.V., Gorkov V.P. // Phys. Lett. A, 1989, v.137, №3, p.144-148.

MUALLIFLAR DIQQATIGA!

Hurmatli mualliflar, maqola muallif tomonidan qog‘ozda chop etilgan va elektron shaklida taqdim qilinishi shart. **Maqolada quyidagi bandlar**: UDK, ishning nomi (o‘zbek, rus va ingliz tillarida), maqola hammualliflarining ro‘yxati (to‘liq familiyasi, ismi, otasining ismi – o‘zbek, rus va ingliz tillarida), muallif haqida ma'lumotlar: ish joyi, lavozimi, pochta va elektron pochta manzili; maqola annotatsiyasi (300 belgigacha, o‘zbek, rus va ingliz tillarida), kalit so‘zlar (5-7, o‘zbek, rus va ingliz tillarida) bo‘lishi lozim.

MAQOLALARGA QO‘YILADIGAN TALABLAR!

Maqolalarning nashr etilishi uchun shartlar nashr etilishi mo‘ljallangan maqolalar dolzarb mavzuga bag‘ishlangan, ilmiy yangilikka ega, muammoning qo‘yilishi, muallif tomonidan olingan asosiy ilmiy natijalar, xulosalar kabi bandlardan iborat bo‘lishi lozim; ilmiy maqolaning mavzusi informativ bo‘lib, mumkin qadar qisqa so‘zlar bilan ifodalangan bo‘lishi kerak va unda umumiy qabul qilingan qisqartirishlardan foydalanish mumkin; “Ilmiy axborotnoma” jurnali mustaqil (ichki) taqrizlashni amalga oshiradi.

MAQOLALARNI YOZISH VA RASMIYLASHTIRISHDA QUYIDAGI QOIDALARGA RIOYA QILISH LOZIM:

Maqolalarning tarkibiy qismlariga: kirish (qisqacha), tadqiqot maqsadi, tadqiqotning usuli va obyekti, tadqiqot natijalari va ularning muhokamasi, xulosalar yoki xotima, bibliografik ro‘yxat. Maqola kompyuterda Microsoft Office Word dasturida yagona fayl ko‘rinishida terilgan bo‘lishi zarur. Maqolaning hajmi jadvallar, sxemalar, rasmlar va adabiyotlar ro‘yxati bilan birgalikda doktorantlar uchun 0,25 b.t. dan kam bo‘lmasligi kerak. Sahifaning yuqori va pastki tomonidan, chap va o‘ng tomonlaridan - 2,5 sm; oriyentatsiyasi - kitob shaklida. Shrift - Times New Roman, o‘lchami - 12 kegl, qatorlar orasi intervali - 1,0; bo‘g‘in ko‘chirish - avtomatik. Grafiklar va diagrammalar qurishda Microsoft Office Excel dasturidan foydalanish lozim. Matndagi bibliografik havolalar (ssilka) kvadrat qavsda ro‘yxatda keltirilgan tartibda qayd qilish lozim. Maqolada foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati keltirilishi lozim. Bibliografik ro‘yxat alfavit tartibida - GOST R 7.0.5 2008 talablariga mos tuziladi.

- Ikki oyda bir marta chiqadi.
- “Samarqand davlat universiteti ilmiy axborotnomasi”dan ko‘chirib bosish faqat tahririyatning yozma roziligi bilan amalga oshiriladi.
- Mualliflar maqolalardagi fakt va raqamlarning haqqoniyligiga shaxsan mas’ul.

MAQOLAGA QUYIDAGILAR ILOVA QILINADI:

- Yo‘llanma xati;
- Ekspert xulosasi.

E- mail: axborotnoma@samdu.uz

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTNOMASI

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК **SCIENTIFIC REPORTS**

Mas'ul kotib	**X.Sh.Tashpulatov**
Musahhih	**O. Ro'ziboyev**
Texnik muharrir	**S. D. Aronbayev**

Muharrirlar:

E. U. Arziqulov	- f.-m.f.n., dotsent
O. R. Raxmatullayev	- geogr.f.n., dotsent
B. S. G'oyibov	- t.f.n., dotsent
I.Sulaymonov	- f.f.n., dotsent
A.I.Inatov	

Mas'ul muharrirlar:

D. M. Aronbayev	- k.f.n., dotsent
A. Sh. Yarmuxamedov	- f.-m.f.n.
R.Toshquvatova	- fals.f.n., dotsent

Muassis: Samarqand davlat universiteti
Manzil: 140104, Samarqand shahri, Universitet hiyoboni, 15.
Telefon: (0 366) 239-14-07, Faks: (0 366) 239-13-87
e-mail: axborotnoma@samdu.uz

SamDU «Ilmiy axborotnoma» jurnali tahririyati kompyuterida terildi.
Bosishga 31.10.2019 yilda ruxsat etildi. Qog'oz o'lchami A-4. Nashriyot hisob tabog'i 10,00.
Buyurtma raqami 01/9. Adadi 500 nusxa.

Manzil: 140104, Samarqand shahri, Universitet xiyoboni, 15.
SamDU bosmaxonasida chop etildi.