



ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC JOURNAL

2020-yil, 3-son (121)

ANIQ FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro'yxatdan o'tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro'yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR

BOSH MUHARRIR O'RINBOSARLARI:

R. I. XALMURADOV, t.f.d. professor

H.A. XUSHVAQTOV, f.-m.f.n., dotsent

A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

M. X. ASHUROV	- O'zFA akademigi
T. M. MO'MINOV	- O'zFA akademigi
Sh. A. ALIMOV	- O'zFA akademigi
S. N. LAKAYEV	- O'zFA akademigi
T. RASHIDOV	- O'zFA akademigi
N. N. NIZAMOV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
A. S. SOLEEV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
I. A. IKROMOV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
B. X. XO'JAYAROV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
N. B. FERAPONTOV	- k.f.d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
Sh. M. TUGIZOV	- professor, (Kaliforniya universiteti, AQSh)
A. G. YaGOLA	- f.-m.f.d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
I. I. JUMANOV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
E. A. ABDURAXMONOV	- k.f.d., professor (SamDU)
N. K. MUXAMADIYEV	- k.f.d., professor (SamDU)
ANDREA PITACCO	- Padova universiteti professori, Italiya
VEENA AGRAWAL	- Dehli universiteti professori, Hindiston
MASLINA DARUS	- Malayziya milliy universiteti professori, Malayziya
ALBERTO DEL BIMBO	- Florensiya universiteti professori, Italiya
K. G. TOKHADZE	- Sankt Peterburg davlat universiteti professori, Rossiya
L. A. BULAVIN	- Kiev milliy universiteti professori, Ukraina
MIHAY BULAI	- Aleksandr Ioan Kuza universiteti professori, Ruminiya
J. X. XO'JAYEV	- b.f.d., professor (SamDU)
Z. I. IZZATULLAYEV	- b.f.d., professor (SamDU)
L. A. ALIBEKOV	- g.f.d., professor (SamDU)
A. A. ABULQOSIMOV	- g.f.d., professor (SamDU)
X. SHODIEV	- Vilfred Laurier universiteti professori (Kanada)
L. SOBIROV	- f.-m.f.d., professor (SamDU)
X. X. XUDOYNazarov	- t.f.d., professor (SamDU)
GUN-SIK PARK	- Seul universiteti professori (Koreya)

MUNDARIJA / СОДЕРЖАНИЕ / CONTENTS

МАТЕМАТИКА / МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

Rakhmonov Z.R., Urunbaev J.E., Allaberdiev B. On the properties of solutions of a cross-diffusion system with nonlinear boundary flux	4
Mamatov M.Sh., Nuritdinov J.T. Minkovskiy yig'indisini va ayirmasini hisoblashga doir ba'zi qonuniyatlar haqida	12
Abdullayev J.I., Toshturdiyev A.M. Panjaradagi bir zarrachali sistema energiyasi taqsimotining ba'zi xossalari	23
Исломов Б.И., Усмонов Б. З. Краевые задачи для одного класса уравнения третьего порядка с эллипτικο-гиперболического оператором	29
Сафаров Р. Идентификация параметров процесса обтекания сверхзвуковым потоком колеблющегося профиля	37
Очилов З.Х. Единственность решения задача интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида	40
Муминов У.Б. Интегрирование нелинейного уравнения типа синус-Гордона в классе периодических функций	46
Мирзаев О.Э., Муродов Ф.М. Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке	50
Xanitqulov B. R. To'la bo'lmagan tanlanmalar uchun Fisher informatsiyasi	55
Хужаёров Х. Б., Бобобекова Р. Б. Математическое моделирование динамики кредитно-депозитных операций коммерческих банков	58
Курбонов Э.К., Файзуллаев Ш.У. Взаимное расположение прямых на поверхности отрицательной гауссовой кривизны	65
Отакулов С., Холиярова Ф.Х. Управляемость ансамбля траекторий дифференциального включения с запаздыванием	70
Шаймов К.М., Эшмуродов М.Х., Хужаев И.К. Дифференциально-разностный метод для двумерных линейных задач теплопередачи	78
Урунбаев Э. Эффективный метод синтеза сокращенной дизъюнктивной нормальной формы Булевой функции	87

МЕХАНИКА / МЕХАНИКА / MECHANICS

Ялгашев Б.Ф., Косимова Ф.У. Приближенные уравнения крутильных колебаний трехслойной цилиндрической вязкоупругой оболочки	91
--	----

INFORMATIKA / ИНФОРМАТИКА / INFORMATICS

<i>Akhatov A.R., Nazarov F.M., Meliyev F.F.</i> Algorithms for data reliability based on a cryptographic distributed database (blockchain)	98
<i>Ximmatov I.Q.</i> Important factors for evaluation of based analysis systems based on biometric recognition	104
<i>Nurmamatov M. Q.</i> Aholining ijtimoiy holati va bandligini monitoring qilish jarayonining matematik modellashtirish va bashorat qilish	107

FIZIKA / ФИЗИКА / PHYSICS

<i>Ahmedova G., Eshbo'riyev R., Yuldashev S.K., Kaxorova A.N., Yunusova U.X.</i> O'zbekistonning ba'zi sug'oriladigan maydonlari tuproqlarining radiatsion aktivligini o'rganish	114
<i>Xamrakulov F., Jurayev B., Alimov T., Ergashev S., Kulmuradov A.</i> V*V669 Cyg to'siluvchan zich qo'shaloq o'zgaruvchan yulduzining fotometrik tadqiqi	116
<i>Саидов А.С., Раззоков А.Ш.</i> Выращивание и структурное исследование эпитаксиальных слоев твердого раствора $Si_{1-x}Ge_x$ ($0 < x < 1$)	119
<i>Мейлиев Л., Дорошенко И., Дорошенко О., Куйлиев Б.</i> Проявление агрегации молекул в спектрах ИК поглощения газообразного пропанола	123
<i>Шаронов И.А., Иванов А.К.</i> О вычислении характеристик одночастичных состояний деформированных ядер в потенциале Саксона-Вудса. Программный пакет	127
<i>Eshbo'riyev R.M., Umirzaqov E.A., Nurmurodov L.T., Sayfinov R., Kaxorova A.N., Yunusova U.X.</i> Samarqand viloyati tuproqlarida tabiiy va texnogen radionuklidlarning migratsiya xususiyatlari	131
<i>Эшкабиров Н.Б., Хайдаров Ш.Р., Курбаниязов А.С.</i> Лазерная фотоионизационная спектроскопия ридберговских и автоионизационных состояний атомов редкоземельных элементов	136
<i>Amonov A.X.</i> High-resolution ir spectrum measurement of the line parameters of hydrogen fluoride in gas phase	144
<i>Базарбаев Н.Н., Нурмуродов Л.Т., Сафаев У.К., Химматов И.Ф.</i> Радионуклид ^{7}Be в сухих летне-осенних атмосферных выпадениях 2019 года в г.Самарканде	149
<i>Egamberdiev Sh., To'rayev J.</i> Determination of the physical parameters of selected binary stars	152
<i>Рахматуллаев И.А., Турсункулов О.М., Семенов Д.И., Тукфатуллин О.Ф., Рахматуллаев М.Р., Курбонов А.К., Сайдимов Я.А.</i> Морфологические, структурные и люминесцентные свойства микропорошков оксида цинка	155
<i>Абдирахмонов У. Ш., Журакулов А. Р., Урунов И. О., Сафаев У. К., Тухтаев У. У., Умирзаков Э.А.</i> Сезонное распределение радона (^{222}Rn) в многоэтажных домах в Навои и Самарканде	159

Mualliflarga

UDC: 517.957

ON THE PROPERTIES OF SOLUTIONS OF A CROSS-DIFFUSION SYSTEM WITH NONLINEAR BOUNDARY FLUX

Z.R.Rakhmonov¹, J.E.Urunbaev², B.Allaberdiyev¹¹National university of Uzbekistan²Samarkand state university

Abstract: In this paper, based on a self-similar analysis and the method of standard equations, the properties of a nonlinear cross-diffusion system coupled via nonlocal boundary conditions are studied. We are investigated the qualitative properties of solutions of a nonlinear system of parabolic equations of cross-diffusion in a medium coupled with nonlinear boundary conditions. It is proved that for certain values of the numerical parameters of the nonlinear cross-diffusion system of parabolic equations coupled via nonlinear boundary conditions, they may not have global solutions in time. Based on a self-similar analysis and the principle of comparing solutions, a critical exponent of the Fujita type and a critical value of global solvability are established. Using the comparison theorem, upper bounds for global solutions and lower bounds for blow-up solutions are obtained.

Keywords: asymptotic, cross-diffusion, nonlinear system, self-similar solution

Nolokal chegaraviy oqim bilan berilgan kross-diffuziya sistemalarining yechimi xususiyati haqida

Annotatsiya. Ushbu ishda avtomodel tahlil va etalon tenglamalar usuli asosida nochiziqli chegaraviy shartlar bilan bog'langan nochiziqli kross-diffuziya sistemalarining xususiyatlari o'rganilgan. Chiziqsiz chegaraviy shartlari bilan bog'langan muhitda kross-diffuziya sistemasini yechimlarining sifat xossalari o'rganilgan. Nochiziqli chegaraviy shartlar bilan bog'langan kross-diffuziya sistemasining sonli parametrlarining ba'zi bir qiymatlari uchun vaqt bo'yicha global yechimlari mavjud bo'lmasligi isbotlangan. Avtomodel tahlil va yechimlarni taqqoslash prinsipi asosida Fujita tipidagi kritik eksponenta va yechimlarning global mavjudlik kritik qiymati topilgan. Taqqoslash teoremasidan foydalanib, global yechimlar uchun yuqori va blow-up yechimlar uchun quyi baholar olingan.

Kalit so'zlar: asimptotika, kross-diffuziya, nochiziqli sistema, avtomodel yechim.

О свойствах решений системы кросс-диффузии с нелинейным граничным потоком

Аннотация. В данной работе на основе автомодельного анализа и метода стандартных уравнений изучаются свойства нелинейной кросс-диффузионной системы, связанной через нелокальные граничные условия. Исследованы качественные свойства решений нелинейной системы параболических уравнений кросс-диффузии в среде, связанной с нелинейными граничными условиями. Доказано, что при некоторых значениях числовых параметров нелинейной кросс-диффузионной системы параболических уравнений, связанных нелинейными граничными условиями, они могут не иметь глобальных решений во времени. На основе автомодельного анализа и принципа сравнения решений установлены критический показатель типа Fujita и критическое значение глобальной разрешимости. Используя теорему сравнения, получены верхние оценки для глобальных решений и нижние оценки для blow-up решений.

Ключевые слова: асимптотика, кросс-диффузия, нелинейная система, автомодельное решение.

Qualitative properties of solutions of a nonlinear cross-diffusion system coupled with nonlocal boundary conditions are studied in the paper

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{cases} \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} -v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u^{q_1}(0,t), \\ -u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v^k}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = v^{q_2}(0,t), \quad t > 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in R_+, \tag{3}$$

where $p > \max\{m_1, m_2\} + 1$, $k > 0$, $m_i > 1$, $q_i > 0 (i=1,2)$, u_0 and $v_0(x)$ are the non-negative continuous functions with compact carrier in R_+ .

Recently, they began to intensively engage in the analysis of mathematical models of the reaction-diffusion type in the presence of the so-called cross (cross) diffusion. Cross-diffusion is a process in which a concentration or density gradient of one chemical or biological species induces a flow (linear or non-linear) of another species. Accordingly, applications of the reaction-cross-diffusion of a system are widespread in the literature and include the formation of pattern development in biology [16], electrochemistry [22], cancer motility [5, 8, 11] and biofilms [10]. The introduction of cross-diffusion in standard reaction-diffusion models has been shown to prevent cross-diffusion in order to prevent exacerbation phenomena associated with such systems [4]. Explicit analytical solutions of these complex and often nonlinearly connected systems of partial differential equations are rarely existed, and thus, numerical methods are used to obtain approximate solutions.

Cross-diffusion models are also found in various fields of science. For example, in physical systems (plasma physics) [1, 12, 23], in chemical systems (dynamics of electrolytic solutions), in biological systems (cross-diffusion transport, dynamics of population systems), in ecology (dynamics of the age structure of the forest), in seismology - Burridge-Knopoff model describing the interaction of tectonic plates [13-15, 21]. In recent years, in the study of the biological population and the movement of tectonic plates, mathematical models with cross-diffusion have been actively used [14, 15].

It is known that a system of degenerate equations may not have a classical solution in the region, where $u, v \equiv 0$. In this case, the generalized solution of system (1) is studied in a class having a physical meaning

$$u(x,t), v(x,t) \geq 0, \quad v^{m_1-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x}, u^{m_2-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x} \in C(R \times (0, +\infty)).$$

and satisfying system (1) from the point of distribution [1, 3].

In recent years, the condition for global existence of solutions and the condition for the emergence of a blow-up regime have been intensively studied (see [2-5,8-10, 13, 6,7,11,15,17-22, 16, 24-26]). In [24,25] the conditions for global solvability and unsolvability in terms of time have been studied and the estimation of the solution near exacerbations time of a nonlocal problem of diffusion has been stated

$$u_t = u_{xx}, \quad v_t = v_{xx}, \quad x > 0, \quad 0 < T < \infty, \tag{4}$$

$$-u_x(0,t) = u^\alpha v^p, \quad -v_x(0,t) = u^q v^\beta, \quad 0 < t < T, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x > 0. \tag{6}$$

It is proved that if $pq \leq (1-\alpha)(1-\beta)$, then each solution of problem (4) - (6) is global.

In [6], systems of cross-diffusion equations on a stationary surface of the following form are investigated

$$\begin{cases} \frac{\partial u_m}{\partial t} - \sum_{k=1}^r d_{mk} \Delta_\Gamma u_k = f_m(u_1, \dots, u_r), \quad \text{in } \Gamma \times (0, T), \\ u_m(x,0) = u_{0,m}(x), \quad \forall_x \in \Gamma, \quad m = 1, \dots, r \end{cases}$$

where $r \geq 1$. They provide a fully-discrete scheme by applying the Implicit-Explicit Euler method. In addition, they provide sufficient conditions for the existence of polytopal invariant regions for the numerical solution after spatial and full discretization's. Furthermore, they prove optimal error bounds for the semi- and fully-discrete methods, that is the convergence rates are quadratic in the mesh size and linear in the time step.

In [17] the authors have investigated the following problem

$$u_t = (u^n)_{xx}, \quad v_t = (v^k)_{xx}, \quad x \in R_+, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$-(u^n)_x(0, t) = v^p(0, t), \quad -(v^k)_x(0, t) = u^q(0, t), \quad t > 0, \quad (8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+, \quad (9)$$

They have shown that the solution of problem (7) - (8) is global if $pq \leq (n+1)(k+1)/4$. Conditions were obtained for the numerical parameters of systems (7) - (9) under which the solution of the problem grows infinitely in a finite time.

The paper [21] should be also mentioned; here system (7) has been investigated with the following boundary conditions

$$-(u^n)_x(0, t) = u^\alpha v^p(0, t), \quad -(v^k)_x(0, t) = u^q v^\beta(0, t), \quad t > 0.$$

It is shown, that $\min\{y_1 - r_1, y_2 - r_2\} = 0$, where

$$r_1 = \frac{2p+k+1-2\beta}{4pq-(k+1-2\alpha)(n+1-2\beta)}, \quad r_2 = \frac{2p+n+1-2\beta}{4pq-(k+1-2\alpha)(n+1-2\beta)},$$

$$y_1 = \frac{1-r_1(n-1)}{2}, \quad y_2 = \frac{1-r_2(k-1)}{2}.$$

are the critical exponents of Fujita type.

Introduce the notation

$$\beta = \frac{(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_2-1) - (m_1-1)(q_1-1)}{(k(p-2)+2)(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_2-1) - (m_1-1)(q_1-1)} =$$

$$\frac{(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_1-1) - (m_2-1)(q_2-1)}{(k(p-2)+2)(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_1-1) - (m_2-1)(q_2-1)},$$

$$\alpha_1 = \frac{(k(p-2)+1)(q_2-1)}{l_1}, \quad \alpha_2 = \frac{(k(p-2)+1)(q_1-1)}{l_2},$$

$$l_1 = (k(p-2)+2)(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_2-1) - (m_1-1)(q_1-1),$$

$$l_2 = (k(p-2)+2)(q_1-1)(q_2-1) - k(p-2)(q_1-1) - (m_2-1)(q_2-1).$$

Theorem 1. Let $\min\{l_1, l_2\} > 0$, then any solution to problem (1)-(3) is unbounded for sufficiently large initial data

Proof. Introduce new functions \widehat{u} and \widehat{v} of the types:

$$\begin{cases} \widehat{u}(x, t) = (T-t)^{-\alpha_1} \varphi(\xi), \\ \widehat{v}(x, t) = (T-t)^{-\alpha_2} \phi(\xi), \end{cases} \quad \xi = x(T-t)^{-\beta}, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

which are self-similar ones. Then theorem 1 can be proved at $T > 0$. Substituting these functions in (1) - (3), we obtain a self-similar problem consisting of the following systems of equations relative to $\varphi(\xi)$ and $\phi(\xi)$:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left(\phi^{m_1-1} \left| \frac{d\phi^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\phi}{d\xi} \right) - \beta\xi \frac{d\phi}{d\xi} - \alpha_1\phi = 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(\phi^{m_2-1} \left| \frac{d\phi^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\phi}{d\xi} \right) - \beta\xi \frac{d\phi}{d\xi} - \alpha_2\phi = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} -\phi^{m_1-1} \left| \frac{d\phi^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\phi}{d\xi} (0) = \phi^{q_1} (0), \\ -\phi^{m_2-1} \left| \frac{d\phi^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\phi}{d\xi} (0) = \phi^{q_2} (0). \end{cases} \tag{12}$$

obtained by substituting (10) into (1) - (3) and some simplifications. Define the conditions under which (10) is an unbounded lower solution to problem (1) - (3). As the compared functions, we choose the following ones:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\xi) = A_1 (a - \xi)^k, \\ \tilde{\phi}(\xi) = A_2 (a - \xi)^z, \end{cases} \tag{13}$$

where $A_i > 0$ ($i = 1, 2$), $y = \frac{(p-1)(k(p-2)-m_1-1)}{k^2(p-1)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}$, $z = \frac{(p-1)(k(p-2)-m_2-1)}{k^2(p-2)^2 - (m_1-1)(m_2-1)}$.

To apply the comparison theorem, the following inequalities are required:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left(\tilde{\phi}^{m_1-1} \left| \frac{d\tilde{\phi}^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\tilde{\phi}}{d\xi} \right) - \beta\xi \frac{d\tilde{\phi}}{d\xi} - \alpha_1\tilde{\phi} \geq 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(\tilde{\phi}^{m_2-1} \left| \frac{d\tilde{\phi}^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\tilde{\phi}}{d\xi} \right) - \beta\xi \frac{d\tilde{\phi}}{d\xi} - \alpha_2\tilde{\phi} \geq 0, \\ \begin{cases} -\tilde{\phi}^{m_1-1} \left| \frac{d\tilde{\phi}^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\tilde{\phi}}{d\xi} (0) \leq \tilde{\phi}^{q_1} (0), \\ -\tilde{\phi}^{m_2-1} \left| \frac{d\tilde{\phi}^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\tilde{\phi}}{d\xi} (0) \leq \tilde{\phi}^{q_2} (0). \end{cases} \end{cases}$$

Two systems of inequalities with respect to A_1 and A_2 are obtained

$$\begin{cases} A_1^{k(p-2)} A_2^{m_1-1} y^p k^{p-2} - \alpha_1 a + (\alpha_1 + y\beta)\xi \geq 0, \\ A_1^{m_2-1} A_2^{k(p-2)} z^p k^{p-2} - \alpha_2 a + (\alpha_2 + z\beta)\xi \geq 0, \end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases} A_1^{k(p-2)+1} A_2^{m_1-1} k^{p-2} y^{p-1} a^y \leq A_1^{q_1} a^{yq_1}, \\ A_2^{k(p-2)+1} A_1^{m_2-1} k^{p-2} z^{p-1} a^z \leq A_2^{q_2} a^{zq_2}. \end{cases} \tag{II}$$

$a \leq \min \left\{ \frac{A_1^{p-2} A_2^{m_1-1} y^p k^{p-2}}{\alpha_1}, \frac{A_1^{m_2-1} A_2^{p-2} z^p k^{p-2}}{\alpha_2} \right\}$, $\min \{l_1, l_2\} > 0$. Similarly, we can find the condition

for systems (II); the upper bound for parameter a is:

$$a \geq \max \left\{ \left(\frac{A_2^{m_1-1} k^{p-2} y^{p-1}}{A_1^{q_1-k(p-2)-1}} \right)^{\frac{1}{y(q_1-1)}}, \left(\frac{A_1^{m_2-1} k^{p-2} z^{p-1}}{A_2^{q_2-k(p-2)-1}} \right)^{\frac{1}{z(q_2-1)}} \right\}.$$

Thus, choosing the parameters A_1, A_2, a , we can obtain the system of inequalities (I, II) under condition $\min \{l_1, l_2\} > 0$. By the principle of comparing solutions, we have estimates for the initial data, with respect to the lower self-similar solutions (10), (13):

$$\begin{cases} u_0(x) \geq T^{-\alpha_1} A_1 (a - xT^{-\beta})_+^y, \\ v_0(x) \geq T^{-\alpha_2} A_2 (a - xT^{-\beta})_+^z. \end{cases}$$

It follows that the solution to problem (1) - (3) is unbounded

$$\begin{cases} u(x, t) \geq (T - t)^{-\alpha_1} \tilde{\varphi}(0) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T, \\ v(x, t) \geq (T - t)^{-\alpha_2} \tilde{\psi}(0) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T. \end{cases}$$

at $\min \{l_1, l_2\} > 0$. The theorem is proved.

Theorem 2. Let $\max \{\alpha_1 - \beta, \alpha_2 - \beta\} < 0$ and the initial data are sufficiently small, then any solution to problem (1)-(3) is global.

Proof. Constructing bounded upper solutions, we can determine the conditions of solvability in time in the following way:

$$\begin{cases} u_+(x, t) = (T + t)^{-\alpha_1} f(\xi), \\ v_+(x, t) = (T + t)^{-\alpha_2} g(\xi), \quad \xi = x(T + t)^{-\beta}, \end{cases} \tag{14}$$

where $T > 0, f(\xi)$ and $g(\xi)$ are the sought for functions, which, by the solution comparison theorem, must satisfy the system of inequalities:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left(g^{m_1-1} \left| \frac{df^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{df}{d\xi} + \alpha_1 f \leq 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(f^{m_2-1} \left| \frac{dg^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{dg}{d\xi} \right) + \beta \xi \frac{dg}{d\xi} + \alpha_2 g \leq 0, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} -g^{m_1-1} \left| \frac{df^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi}(0) \geq f^{q_1}(0), \\ -f^{m_2-1} \left| \frac{dg^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{dg}{d\xi}(0) \geq g^{q_2}(0). \end{cases} \tag{16}$$

Along with this, consider the following

$$\begin{cases} \bar{f}(\xi) = A_1 \left(a - (\xi + h)^{\frac{p}{p-1}} \right)^y, \\ \bar{g}(\xi) = A_2 \left(a - (\xi + h)^{\frac{p}{p-1}} \right)^z, \end{cases} \tag{17}$$

Where $h \in \left(0, a^{\frac{p-1}{p}} \right), a > 0, A_2^{m_1-1} A_1^{k(p-2)} k^{p-2} \left(\frac{yp}{p-1} \right)^{p-1} = \beta, A_1^{m_2-1} A_2^{k(p-2)} k^{p-2} \left(\frac{zp}{p-1} \right)^{p-1} = \beta$. The

solvability of systems of inequalities (15)-(16) with respect to unknown parameters a, h , and under

conditions $q_1 > m_2 + 1$, $q_2 > m_1 + 1$ is shown as follows. Substituting functions (17) into (15) and (16), we obtain

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \beta) \left(a - (\xi + h_1)^{\frac{p}{p-1}} \right) \leq 0, \\ (\alpha_2 - \beta) \left(a - (\xi + h_2)^{\frac{p}{p-1}} \right) \leq 0. \end{cases}$$

hence the condition for the restrictions on $\max\{\alpha_1 - \beta, \alpha_2 - \beta\} < 0$ and conditions for further calculations of a , h are given in the form:

$$a \leq h^{\frac{p}{p-1}} + \min \left\{ \left(A_1^{1-q_1} h \beta \right)^{\frac{1}{y(q_1-1)}}, \left(A_2^{1-q_2} h \beta \right)^{\frac{1}{z(q_2-1)}} \right\} \quad (18)$$

Given this, we can conclude that if $\max\{\alpha_1 - \beta, \alpha_2 - \beta\} < 0$ and the initial functions $u_0(x)$ and $v_0(x)$ satisfy the following inequalities:

$$\begin{cases} u_0(x) \leq T^{-\alpha_1} A_1 \left(a - (xT^{-\beta} + h)^{\frac{p}{p-1}} \right)^y, \\ v_0(x) \leq T^{-\alpha_2} A_2 \left(a - (xT^{-\beta} + h)^{\frac{p}{p-1}} \right)^z, \end{cases}$$

then the solution to problem (1) - (3) is global. The values of parameters a , h are selected from condition (18).

Theorem 3. If $q_1 \leq 1$, $q_2 \leq 1$ then every solution to problem (1)-(3) is global.

Theorem 3 is proved by the method described in [20].

Note 1. Theorem 3 shows that the critical exponents of the global existence of a solution are $q_{10} = 1$, $q_{20} = 1$.

Note 2. Theorem 1 shows that the critical Fujita exponents are $\min\{\alpha_1 - \beta, \alpha_2 - \beta\} = 0$.

Theorem 4. Assume that $p > \max\{m_1, m_2\} + 1$ and $m_i > 1$, then the solution with compact carrier of the system of equations (15) at $\xi \rightarrow a^{(p-1)/p}$ has an asymptotic

$$\begin{cases} \varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)), \\ \phi(\xi) = \tilde{\phi}(\xi)(1 + o(1)). \end{cases} \quad (18)$$

A numerical scheme is constructed based on the finite difference method. For this, system (1) is approximated with the second order of accuracy in spatial coordinates and with the first order in t , by the integro-interpolation method (balance method). Let's build an iterative process. In the internal nodes, the values are calculated by the sweep method.

It is known that the choice of an appropriate initial approximation for the iterative process of solving the nonlinear problem (1)-(3) in a general case is the main difficulty in numerical solution of the problem.

When solving specific tasks, the functions are used that reflect some properties of the sought for solutions; these functions are obtained on the basis of a qualitative analysis of the problem. This difficulty, depending on the value of the numerical parameters of equations, is overcome by successful selecting the initial approximations, for which the established asymptotic formula is taken in the calculations. Based on the above results, numerical calculations were made. Below are the numerical schemes and some results of computational experiments.

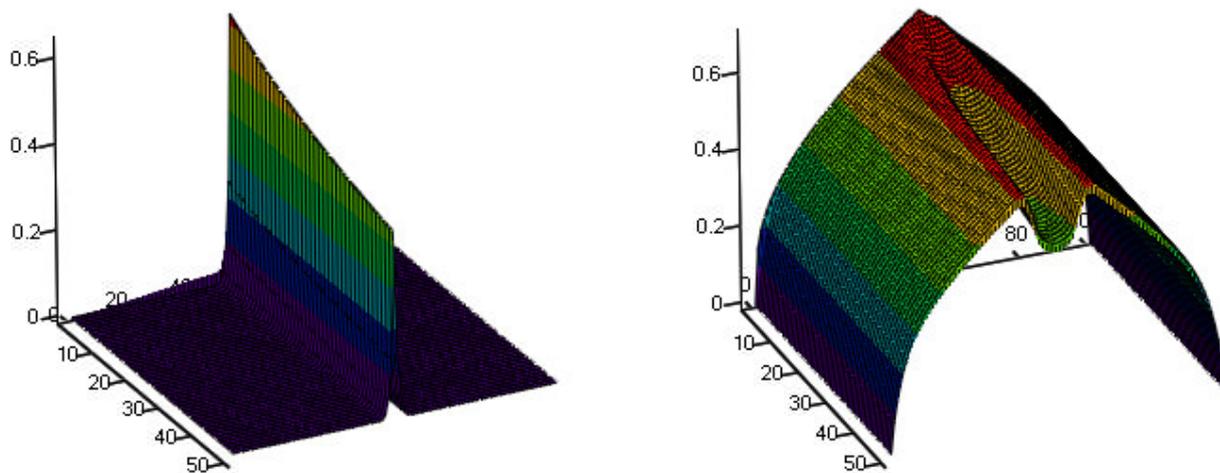


Fig. 1. Numerical solution of the problem (1)-(3) $q_1 = 3, q_2 = 2.7, p = 1.3, p = 3.3, m_1 = 1.5, m_2 = 1.8$

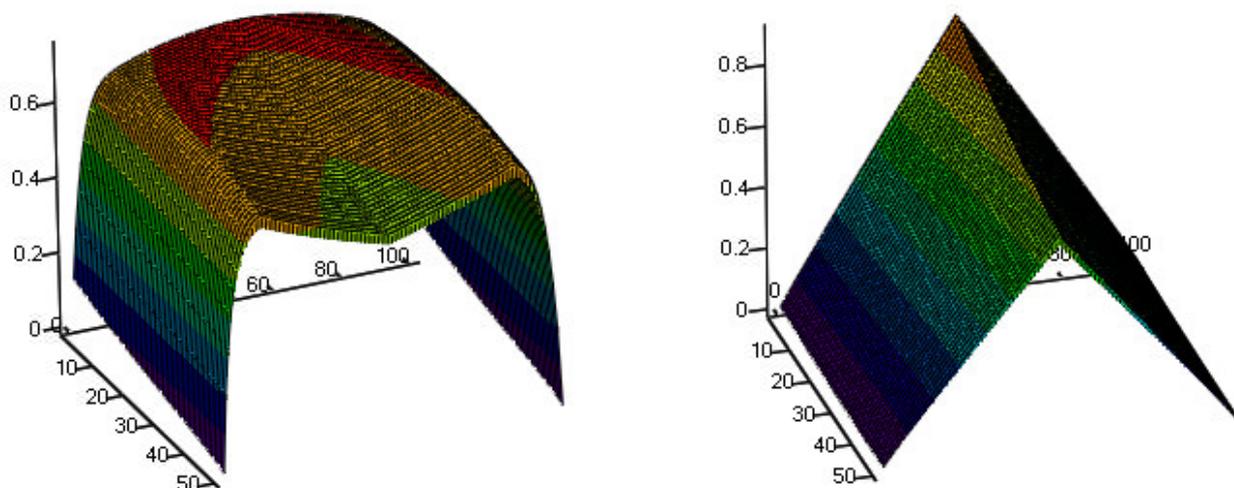


Fig. 2. Numerical solution of the problem (1)-(3) at $q_1 = 3.1, q_2 = 3.7, k = 1.25, p = 3.8, m_1 = 2.1, m_2 = 1.2$

Figs. 1-2, show the results of numerical solution of problem (1) - (3) at $m_i > 1 (i = 1, 2)$ corresponding to the case of slow diffusion. At $m_i > 1 (i = 1, 2)$ as follows from the asymptotic formulas (14), (18) and graphs, the object moves with a finite velocity. The depth of penetration of a diffusion wave depends on time and the wave front (the point at which $\underline{u}(x, t), \underline{v}(x, t)$ for each medium located at the end point: $x_\phi = a^{(p-1)/p} (T + t)^\beta < \infty$

References

1. Aripov M.M. Methods of reference equations for solving nonlinear boundary value problems. - Tashkent, Fan, 1988M.
2. Aripov M.M., Matyakubov A.S. Self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system with variable density: explicit estimates and asymptotic behavior. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2017, 8(1), 5-12. <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2017-8-1-5-12>
3. Aripov M.M., Matyakubov A.S. To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form of polytrophic filtration in variable density. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2017, 8(3), 317-322. doi: <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2017-8-3-317-322>
4. Dziuk G., Elliott C.M., Finite element methods for surface PDEs, *Acta Numer.* 22 (2013) 289–396. <http://dx.doi.org/10.1017/s0962492913000056>.
5. Elliott C.M., Stuart A.M., The global dynamics of discrete semilinear parabolic equations, *SIAM J Num. Anal.* 30 (1993) 1622–1663. <http://dx.doi.org/10.1137/0730084>.

6. Frittelli Massimo, Madzvamuse Anotida, Sgura Ivonne, Venkataraman Chandrasekhar. Lumped finite elements for reaction–cross-diffusion systems on stationary surfaces. *Computers and Mathematics with Applications* 74 (2017) 3008–3023 doi: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.07.044>
7. Francesco M. Di, Esposito A., Fagioli S.. Nonlinear degenerate cross-diffusion systems with nonlocal interaction. *Nonlinear Analysis*, 169, 2018, 94–117. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2017.12.003>.
8. Gerisch A., Chaplain M.A.J., Robust numerical methods for taxis–diffusion–reaction systems: applications to biomedical problems, *Math. Comp. Mod.* 43(2006)49–75. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2004.05.016>.
9. Gerstenmayer Anita, Jünger Ansgar. Analysis of a degenerate parabolic crossdiffusion system for ion transport. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, Nonlinear Analysis*, 461(1), 2018, 523–543. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.01.024>
10. Hoff D. Stability and convergence of finite difference methods for systems of nonlinear reaction-diffusion equations, *SIAM J Num. Anal.* 15 (1978) 1161–1177. <http://dx.doi.org/10.1137/0715077>.
11. Hittmeir S., Jünger A., Cross diffusion preventing blow-up in the two-dimensional Keller–Segel Model, *SIAM J Math. Anal.* 43 (2011) 997–1022. <http://dx.doi.org/10.1137/100813191>.
12. Kalashnikov A.S. Some questions of the qualitative theory of nonlinear second order degenerate parabolic equations // *UMN*, V.42, Iss. 2 (254), 1987, 135–176.
13. Levine, H., The role of critical exponents in blowup theorems, *SIAM Rev.*, 32(2), 1990, 262–288.
14. Murray J.D. *Mathematical Biology*, 3rd ed., Berlin: Springer, 2002–2003.
15. Malchow H, Petrovskii SV, Venturino E. *Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: theory, models, and simulations*. London: Chapman & Hall/CRC Press; 2008.
16. Nie Y-Y, Thomée V., A lumped mass finite-element method with quadrature for a non-linear parabolic problem, *IMA J. Numer. Anal.* 5 (1985) 371–396. <http://dx.doi.org/10.1093/imanum/5.4.371>.
17. Quiros F, Rossi J D. Blow-up set and Fujita-type curves for a degenerate parabolic system with nonlinear conditions. *Indiana Univ Math J*, 2001, 50: 629–654.
18. Rakhmonov Z. Estimates for solutions of a nonlinear system of heat conduction equations with variable density and with a non-local boundary condition // *Vestnik NUUZ*, №1 (2), 2016, 145–154.
19. Rakhmonov Z. On the properties of solutions of multidimensional nonlinear filtration problem with variable density and nonlocal boundary condition in the case of fast diffusion // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics* 2016, 9(2), 236–245. doi: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-2-225-234>
20. Rakhmonov Z. R., Urunbayev J. E., On a Problem of Cross-Diffusion with Nonlocal Boundary Conditions. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, №5, 2019, 614–620. doi: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-5-614-620>.
21. Tsyganov M.A., Biktashev V.N., Brindley J., Holden A.V., Ivanitsky G.R., Waves in cross-diffusion systems – a special class of nonlinear waves, *UFN*, 2007, vol. 177, issue 3, 275–300. doi: <http://dx.doi.org/10.1070/PU2007v050n03ABEH006114>
22. Vanag V.K., Epstein I.R., Cross-diffusion and pattern formation in reaction-diffusion systems, *Phys. Chem. Chem. Phys.* 11 (2009) 897–912. <http://dx.doi.org/10.1039/B813825G>.
23. Wu, Z.Q., Zhao, J.N., Yin, J.X. and Li, H.L., *Nonlinear Diffusion Equations*, Singapore: World Scientific, 2001.
24. Wang S, Xie C H, Wang M X. Note on critical exponents for a system of heat equations coupled in the boundary conditions. *J Math Analysis Applic*, 1998, 218: 313–324.
25. Wang S, Xie C H, Wang M X, The blow-up rate for a system of heat equations completely coupled in the boundary conditions. *Nonlinear Anal*, 1999, 35: 389–398.
26. Zheng S N, Song X F, Jiang Z X. Critical Fujita exponents for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux. *J Math Anal Appl*, 2004, 298: 308–324. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.05.017>
27. Sadulayeva Sh. A., Khaydarov A.N., Kabiljanova F.A. Modeling of the multidimensional problem of nonlinear heat conductivity in non-divergent case. “3 rd International Symposium on Multidisciplinary Studies and Innovative Technologies”. Ankara, Turkey. Oct 11–13, 2019, 299–303. <https://ieeexplore.ieee.org/xpl/conhome/8928468/proceeding>.

UDK 517.977.1.

MINKOVSKIY YIG'INDISINI VA AYIRMASINI HISOBLASHGA DOIR BA'ZI QONUNIYATLAR HAQIDA**M.Sh.Mamatov, J.T.Nuritdinov***O'zbekiston milliy universiteti*E-mail: mamatovmsh@mail.ru, nuritdinovjt@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada to'plamlar ustida Minkovskiy geometrik ayirmasi va yig'indisining differensial o'yinlarni o'rganishda qo'llaniladigan xossalari o'rganilgan. Ayrim teoremlar va ularning isbotlari keltirilgan. Maqola yakunida chiziqli tenglamalar bilan yoziladigan differensial o'yin qaralgan.

Kalit so'zlar: Minkovskiy ayirmasi, Minkovskiy yig'indisi, to'plamni songa ko'paytirish, kuchli qavariq to'plam, quvish, qochish, terminal to'plam.

О некоторых законах вычислений разность и сумма Минковского

Аннотация. В данной статье изучены свойства геометрической разности и суммы Минковского над множествами, которые применяются в изучении дифференциальных игр. Приведены некоторые теоремы и их доказательство. В конце статьи рассматривается дифференциальная игра, описываемая линейными уравнениями.

Ключевые слова: разности Минковского, сумма Минковского, умножение множество на число, сильно выпуклое множества, преследование, убегания, терминальное множество.

About some laws of calculation of Minkovsky difference and summ

Abstract. This article studies the properties of the geometric difference and the Minkowski sum over the sets that are used in the study of differential games. Some theorems and their proof are presented. At the end of the article, we consider a differential game described by linear equations.

Keywords: Minkowski difference, Minkowski sum, multiplication of a set by number, strongly convex sets, pursuit, escape, terminal set.

Kirish

Minkovskiy yig'indisi va geometrik ayirmasi, H. Minkovskiy [1] tomonidan birinchi marta 1903 yilda kiritilgan bo'lib, bu klassik tushuncha keyinchalik integral geometriya soxasining muhim elementi sifatida keng o'rganildi [2,3]. Ular Minkovskiy operatorlari deb ham yuritiladi. Ohirgi paytlarda kompyuter grafikasi, kompyuterli proeksiyalash, kompyuterli ko'rish, tasvirlarga ishlov berish, joylashtirish masalalari va robototexnika kabi sohalarida foydalanish maqsadida, Minkovskiy yig'indisi va geometrik ayirmasini baholash uchun algoritmlar ishlab chiqishga qiziqish ortganligi kuzatilmoqda[4-7].

Bizni odatdagi \square^n fazodagi vektorlar algebra bilan tanishishdagi faoliyatimiz ikki vektorni qo'shishdan boshlansa, keyinchalik bu faoliyat vektorni yoki biror to'plamga tegishli vektorlarni boshqa to'plamga tegishli vektorlarga qo'shishga yetib boradi. Bunda vektorga to'plamni qo'shish degani vektorga to'plamning harbir elementi ya'ni vektorini qo'shib hosil bo'lgan vektorlar birlashmasi ekanligini intuitiv tushunib yetish muhim. Masalan \square^2 fazo - tekislikda A to'plamni B to'plamga qo'shish degani A to'plamni B to'plamning har bir elementi ustiga ko'chirib chiqish va birlashmasini olish, yoki aksincha ekanligini, tushunib yetish kerak. Bu jarayonni hatto ixtiyoriy n o'lchovli fazoda ham tasavvur qilish qiyinchilik tug'dirmaydi va ko'rish mumkinki A va B to'plamlarning geometrik tabiati ularning koordinata boshiga nisbatan joylashishiga bog'liq emas.

Endi Minkovskiyning geometrik ayirmasi tushunchasiga kelsak u murakkabroq. A va B to'plamlarning geometrik ayirmasining ma'nosi ularni ikkinchisini birinchisini ichida tashqariga chiqarib yubormasdan qanday to'plam ustida surib yurish mumkinligini bildiradi, boshqacha qilib aytganda birinchisi ikkinchisiga nisbatan qanchalik kengligini anglatadi. Bu tushunchani differensial o'yinlarda qo'llanishi sababi ham shunda, ya'ni bu yerda geometrik ayirma quvuvchi tomonning imkoniyatlari qochuvchi tomon imkoniyatlaridan qanchalik kattaligini bildiradi. Biz quyida ularga batafsil to'xtalamiz.

1.Masalaning qo'yilishi va yordamchi lemmalar

Aytib o'tilganidek, Minkovskiy yig'indisi va ayirmasi va ularni hisoblashning algoritmlari amaliy matematikaning hisoblash matematikasi, sonli dasturiy boshqaruv tizimlari, robotlar harakatlarini rejalashtirish, optimal boshqaruv nazariyasi kabi turli bolimlarida keng qo'llaniladi[8-11]. Minkovskiy

operatori bizga ma'lum bo'lishicha, birinchi marta L.S.Pontryagin [12-15] ishlarida differensial o'yinlarni o'rganishga qo'llanilgan. Ushbu ishda Minkovskiy operatorining turli xossalari hamda ularning differensial o'yinlarda alternativ natijalar olishga tatbig'i ko'riladi [16,17].

1-ta'rif. E chiziqli fazoda bo'sh bo'lmagan $X, Y \subset E$ to'plamlar berilgan bo'lsin. X va Y to'plamlarning Minkovskiy yig'indisi va geometrik ayirmasi deb mos ravishda quyidagi to'plamlarga aytiladi

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}, \quad X * Y = \{z \in E : z + Y \subset X\}.$$

2-ta'rif. X to'plamni λ songa ko'paytirish deb quyidagi to'plamga aytiladi

$$\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}.$$

3-ta'rif. Ixtiyoriy $a \in E$ vektor va bo'sh bo'lmagan $X \subset E$ to'plamning Minkovskiy yig'indisi deganda

$$a + X = \{a + x : x \in X\}$$

to'plamni tushinamiz.

$X * Y$ - Minkovskiyning geometrik ayirmasi bu X to'plamning $d \in -Y$ vektorga ko'chishlari kesishmasi ekanligi bevosita ta'rifdan kelib chiqadi, ya'ni

$$X * Y = \bigcap_{d \in -Y} (X + d).$$

4-ta'rif. X to'plamning barcha chegaraviy nuqtalar to'plami uning chegarasi deyildi va ∂X ko'rinishida belgilanadi.

5-ta'rif. E fazoda berilgan X to'plamning to'ldiruvchisi X^c deb quyidagi to'plamga aytiladi

$$X^c = \{x \in E, x \notin X\}.$$

To'g'ri chiziqda va tekislikda berilgan ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan to'plamlarning Minkovskiy yig'indisi va geometrik ayirmasini topishning qonuniyatlarini keltiramiz.

1-lemma. R to'g'ri chiziqda berilgan $X = (a, b)$ va $Y = (a_1, b_1)$ intervallarning Minkovskiy yig'indisi $X + Y = (a + a_1, b + b_1)$ intervalga teng bo'ladi.

Isbot. Minkovskiy yig'indisining aniqlanishiga ko'ra (a, b) va (a_1, b_1) intervallarning Minkovskiy yig'indisi (a, b) intervalning har bir nuqtasiga (a_1, b_1) intervalning har bir nuqtasini qo'shish natijasida hosil bo'ladigan to'plamdir. Ixtiyoriy $x \in X$ ya'ni $a < x < b$ nuqtani barcha $y \in Y$ ya'ni $a_1 < y < a_2$ nuqtalarga qo'shib chiqamiz. U holda tengsizlik xossasiga ko'ra $a + a_1 < x + y < b + b_1$ munosabat o'rinli bo'ladi. x va y lar mos ravishda X va Y to'plamlarning ixtiyoriy elementlari bo'lganligidan $X + Y = (a + a_1, b + b_1)$ kelib chiqadi.

Huddi shunday tarzda R to'g'ri chiziqda berilgan quyidagi ko'rinishdagi to'plamlarning Minkovskiy yig'indisini topish mumkin:

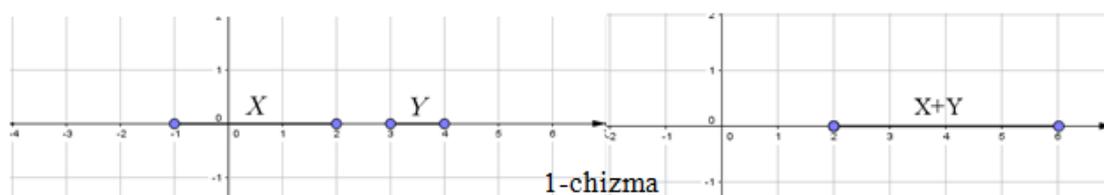
$$[a, b] + [a_1, b_1] = [a + a_1, b + b_1];$$

$$[a, b] + (a_1, b_1) = (a + a_1, b + b_1);$$

$$[a, b) + (a_1, b_1) = (a + a_1, b + b_1);$$

$$\{a\} + (a_1, b_1) = (a + a_1, a + b_1)$$

Misol: $X = (-1, 2)$, $Y = (3, 4)$ bo'lsa $X + Y = (2, 6)$ bo'ladi (1-chizma).



2-lemma. R to'g'ri chiziqda berilgan $X = (a, b)$ va $Y = (a_1, b_1)$ intervallarning Minkovskiy ayirmasi uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi

$$X * Y = \begin{cases} [a - a_1, b - b_1] & \text{agar } a - a_1 < b - b_1 \text{ bo'lsa} \\ \{a - a_1\} & \text{agar } a - a_1 = b - b_1 \text{ bo'lsa} \\ \emptyset & \text{agar } a - a_1 > b - b_1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Isbot. Minkovskiy ayirmasining aniqlanishiga ko'ra har qanday $z \in X * Y$ uchun $z + Y \subset X$ bo'ladi. $z + Y \subset X$ munosabatdagi to'plamlarni mos intervallar bilan almashtiraylik, ya'ni $z + (a_1, b_1) \subset (a, b)$. 1-lemmaga ko'ra $(z + a_1, z + b_1) \subset (a, b)$ bundan esa $z + a_1 \geq a$, $z + b_1 \leq b$ va $a - a_1 \leq z \leq b - b_1$ kelib chiqadi.

Agar $a - a_1 < b - b_1$ bo'lsa $a - a_1 \leq z \leq b - b_1$ munosabat o'rinli, agar $a - a_1 = b - b_1$ bo'lsa $z = a - a_1$ bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Agar $a - a_1 > b - b_1$ bo'lsa $a - a_1 \leq z \leq b - b_1$ tengsizlikka ziddiyat hosil bo'ladi va bu ziddiyatni qanoatlantiruvchi birorta ham $z \in X * Y$ element topilmaydi, ya'ni $X * Y = \emptyset$ bo'ladi.

Huddi shunday tarzda R to'g'ri chiziqda berilgan quyidagi ko'rinishdagi to'plamlarning Minkovskiy ayirmasini topish mumkin:

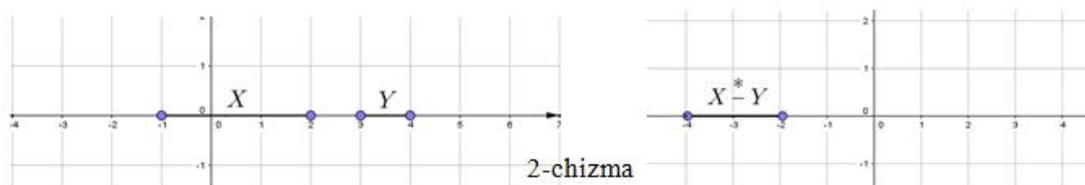
$$[a, b] * [a_1, b_1] = [a - a_1, b - b_1];$$

$$[a, b] * (a_1, b_1) = [a - a_1, b - b_1];$$

$$(a, b) * [a_1, b_1] = (a - a_1, b - b_1);$$

bu formulalardagi Minkovskiy ayirmalari $a - a_1 < b - b_1$ hol uchun hisoblangan.

Misol: $X = (-1, 2)$, $Y = (3, 4)$ bo'lsa $X * Y = [-4, -2]$ bo'ladi (2-chizma).



3-lemma. R^2 tekislikda berilgan markazlari $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ nuqtalarda hamda r_1, r_2 radiusli

X, Y yopiq (ochiq) doiralarning Minkovskiy yig'indisi markazi $\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$ nuqtada bo'lgan $r_1 + r_2$

radiusli yopiq (ochiq) doiraga teng bo'ladi.

Isbot. Lemma shartiga ko'ra

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} : (x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 \leq r_1^2 \right\} \quad (X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} : (x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 < r_1^2 \right\})$$

va

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} : (x_2 - a_2)^2 + (y_2 - b_2)^2 \leq r_2^2 \right\} \quad (Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} : (x_2 - a_2)^2 + (y_2 - b_2)^2 < r_2^2 \right\})$$

doiralalar berilgan. Minkovskiy yig'indisining aniqlanishiga ko'ra har bir $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X$ ni barcha

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in Y$ nuqtalarga qo'shishimiz kerak. $a_1 - r_1 \leq x_1 \leq a_1 + r_1$ ($a_1 - r_1 < x_1 < a_1 + r_1$) va

$a_2 - r_2 \leq x_2 \leq a_2 + r_2$ ($a_2 - r_2 < x_2 < a_2 + r_2$) ekanligidan 1-lemmaga ko'ra

$$a_1 + a_2 - r_1 - r_2 \leq x_1 + x_2 \leq a_1 + a_2 + r_1 + r_2$$

$$(a_1 + a_2 - r_1 - r_2 < x_1 + x_2 < a_1 + a_2 + r_1 + r_2)$$

munosabat bajariladi (3-chizma). Huddi shu kabi

$$b_1 + b_2 - r_1 - r_2 \leq y_1 + y_2 \leq b_1 + b_2 + r_1 + r_2$$

$$(b_1 + b_2 - r_1 - r_2 < y_1 + y_2 < b_1 + b_2 + r_1 + r_2)$$

bo'ladi. Bu esa har qanday $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ nuqtani

$$(x_1 + x_2 - a_1 - a_2)^2 + (y_1 + y_2 - b_1 - b_2)^2 \leq (r_1 + r_2)^2$$

$$((x_1 + x_2 - a_1 - a_2)^2 + (y_1 + y_2 - b_1 - b_2)^2 < (r_1 + r_2)^2)$$

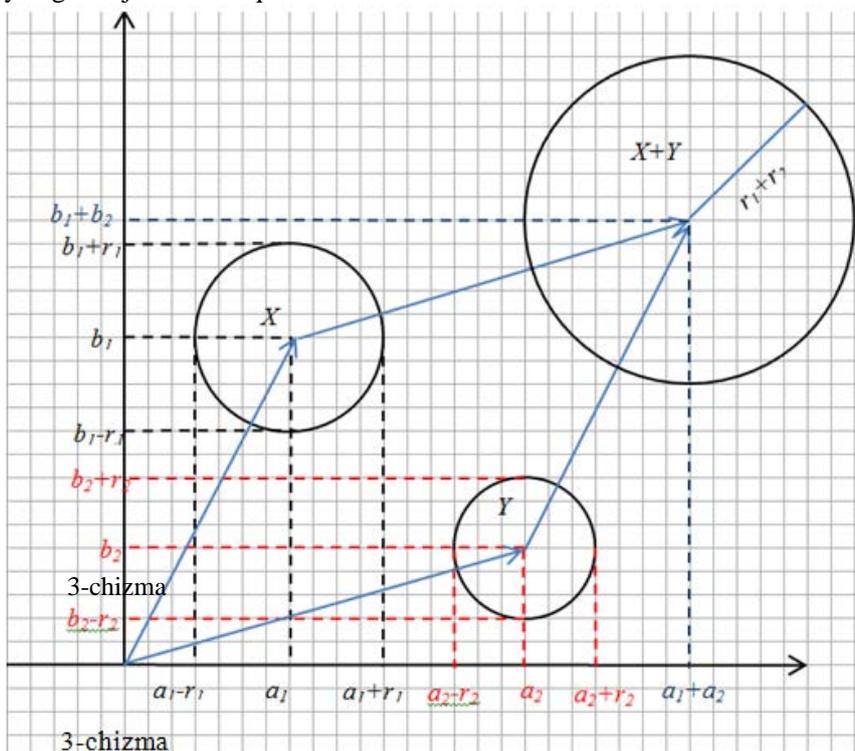
shartni qanoatlantirishini anglatadi. Demak,

$$X + Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} : (x_1 + x_2 - a_1 - a_2)^2 + (y_1 + y_2 - b_1 - b_2)^2 \leq (r_1 + r_2)^2 \right\}$$

$$(X + Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} : (x_1 + x_2 - a_1 - a_2)^2 + (y_1 + y_2 - b_1 - b_2)^2 < (r_1 + r_2)^2 \right\})$$

ekan. Lemma isbotlandi.

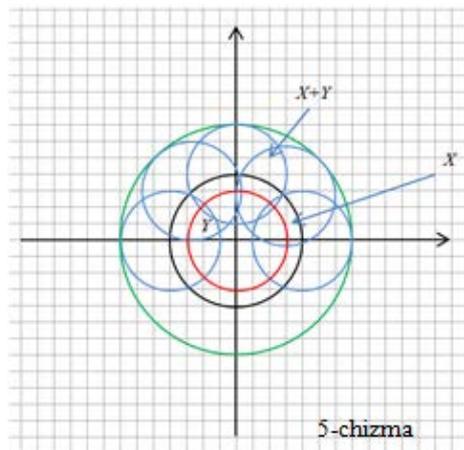
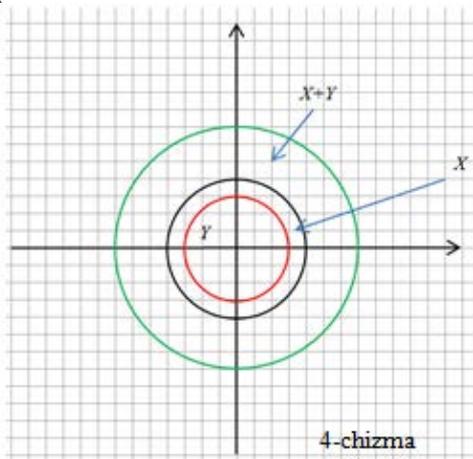
3-lemmadan quyidagi natija kelib chiqadi:



1-natija. R^2 tekislikda berilgan markazlari koordinata boshida hamda r_1, r_2 radiusli X, Y yopiq(ochiq) doiralarning Minkovskiy yig'indisi markazi koordinata boshida bo'lgan $r_1 + r_2$ radiusli yopiq(ochiq) doiraga teng bo'ladi. (4-chizma)

4-chizmaga e'tibor beradigan bo'lsak X va Y doiralarning yig'indisi deb, chegarasi X doiraning chegarasi bo'ylab Y doiraning markazini ko'chirish natijasida xosil bo'luvchi doira ekanligiga ishonch xosil qilamiz.(5-chizma)

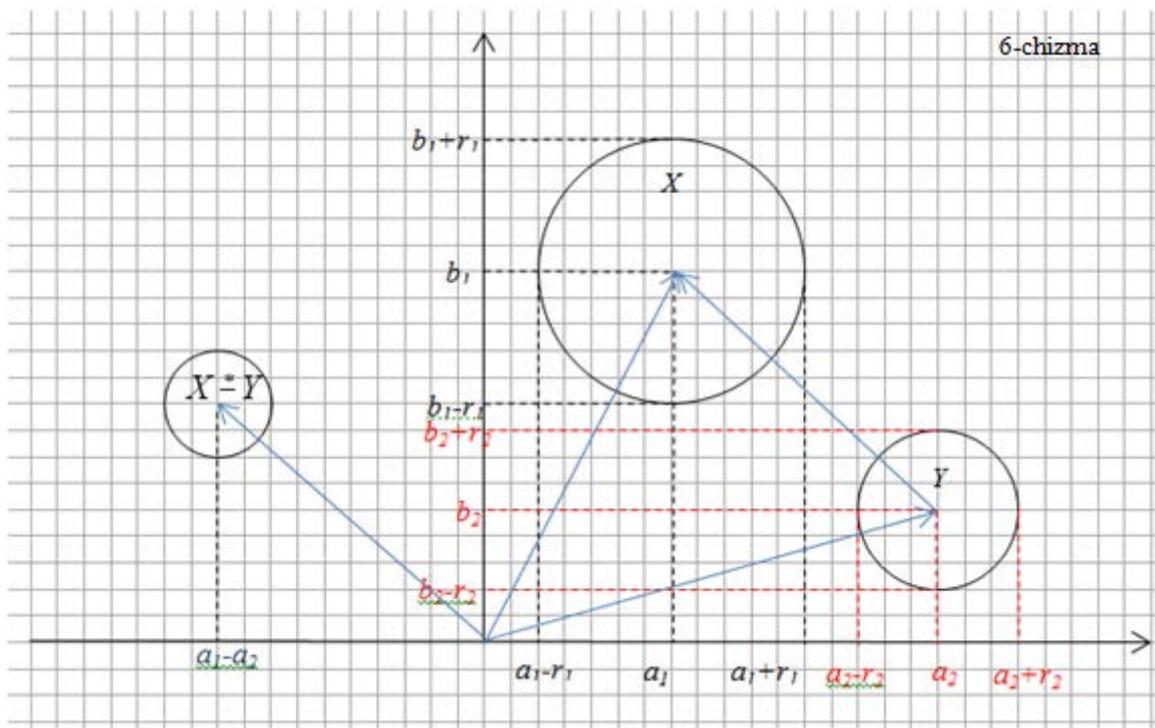
Huddi shu usulda har qanday shakldagi to'plamlarni yig'indisini topish mumkin. Bu haqda yana keyinroq to'xtalib o'tamiz.



4-lemma. R^2 tekislikda berilgan markazlari $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ nuqtalarda hamda $r_1 > r_2$ shartni

qanoatlantiruvchi r_1, r_2 radiusli X, Y yopiq doiralarning $X \oplus Y$ Minkovskiy ayirmasi markazi

$\begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix}$ nuqtada bo'lgan $r_1 - r_2$ radiusli yopiq doiraga teng bo'ladi.



Isbot. Lemma shartiga ko'ra $X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} : (x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 \leq r_1^2 \right\}$ va $Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} : (x_2 - a_2)^2 + (y_2 - b_2)^2 \leq r_2^2 \right\}$ doiralari berilgan bo'lsin. Aytaylik $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \in X * Y$ desak $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + Y \subset X$ bo'ladi. Barcha $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X$ lar uchun $a_1 - r_1 \leq x_1 \leq a_1 + r_1$, $b_1 - r_1 \leq y_1 \leq b_1 + r_1$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bulardan $x_1 \in [a_1 - r_1, a_1 + r_1]$, $y_1 \in [b_1 - r_1, b_1 + r_1]$ ekanligi kelib chiqadi (6-chizma). Huddi shu kabi har bir $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in Y$ lar uchun $x_2 \in [a_2 - r_2, a_2 + r_2]$, $y_2 \in [b_2 - r_2, b_2 + r_2]$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. 2-lemmag ko'ra

$$x_3 \in [a_1 - r_1, a_1 + r_1] * [a_2 - r_2, a_2 + r_2] = [a_1 - a_2 - (r_1 - r_2), a_1 - a_2 + (r_1 - r_2)]; \quad (1)$$

$$y_3 \in [b_1 - r_1, b_1 + r_1] * [b_2 - r_2, b_2 + r_2] = [b_1 - b_2 - (r_1 - r_2), b_1 - b_2 + (r_1 - r_2)]. \quad (2)$$

Bundan

$$X * Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} : (x_3 - (a_1 - a_2))^2 + (y_3 - (b_1 - b_2))^2 \leq (r_1 - r_2)^2 \right\} \quad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Lemma isbotlandi.

Agar 4-lemma shartidagi doiralari ochiq bo'lsa ham Minkovskiy ayirmasi natijasida baribir yopiq doira hosil bo'ladi. Chunki 2-lemmag ko'ra (1) va (2) tengliklar quyidagi

$$x_3 \in (a_1 - r_1, a_1 + r_1) * (a_2 - r_2, a_2 + r_2) = [a_1 - a_2 - (r_1 - r_2), a_1 - a_2 + (r_1 - r_2)];$$

$$y_3 \in (b_1 - r_1, b_1 + r_1) * (b_2 - r_2, b_2 + r_2) = [b_1 - b_2 - (r_1 - r_2), b_1 - b_2 + (r_1 - r_2)];$$

Ko'rinishda bo'ladi. Bu esa (3) ifodaning o'zgarishini ko'rsatadi.

Agar 4-lemmadagi doiralari radiuslari teng ya'ni $r_1 = r_2$ bo'lsa $X * Y$ Minkovskiy ayirma bitta $\begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix}$ nuqtadan iborat bo'ladi. Haqiqatan ham 2-lemmag ko'ra (1) va (2) ifodalar quyidagicha bo'ladi:

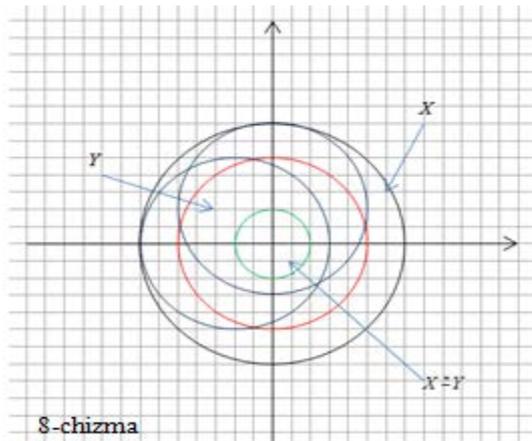
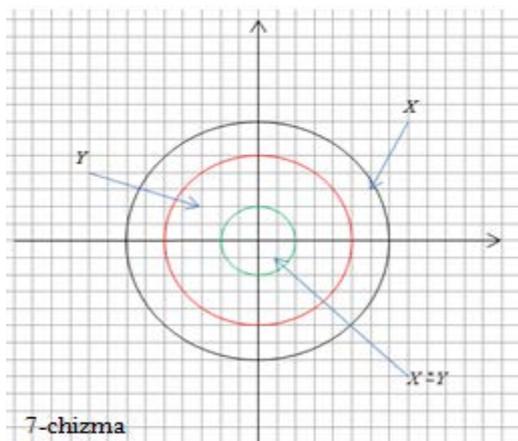
$$x_3 \in (a_1 - r_1, a_1 + r_1) * (a_2 - r_2, a_2 + r_2) = \{a_1 - a_2\};$$

$$y_3 \in (b_1 - r_1, b_1 + r_1) * (b_2 - r_2, b_2 + r_2) = \{b_1 - b_2\};$$

Bu esa $X * Y = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix} \right\}$ ekanligini anglatadi.

4-lemmadan quyidagi natija kelib chiqadi:

2-natija. R^2 tekislikda berilgan markazlari koordinata boshida hamda $r_1 > r_2$ shartni qanoatlantiruvchi r_1, r_2 radiusli X, Y yopiq yoki ochiq doiralarning $X * Y$ Minkovskiy ayirmasi markazi koordinata boshida bo'lgan $r_1 - r_2$ radiusli yopiq doiraga teng bo'ladi (7-chizma).



7-chizmaga e'tibor beradigan bo'lsak $X * Y$ doiraning chegarasi Y doira ichkarisidan chegarasiga X doira chegarasini urintirib siljitishlardagi X doira markazlari to'plami ekanligiga ishonch hosil qilamiz (8-chizma).

Berilgan to'plamlarning Minkovskiy yig'indisi va ayirmasining ochiq yoki yopiq to'plam ekanligini bilish muhim ahamiyat kasb etadi. Shuning uchun quyidagi lemma va teoremlarni keltiramiz.

5-lemma. E vektor fazoda berilgan bo'sh bo'lmagan X va Y to'plamlar uchun $\lambda(X \cap Y) = \lambda X \cap \lambda Y$ tenglik o'rinli.

Isbot. Aytaylik $a \in \lambda(X \cap Y)$ bo'lsin. U holda to'plamni songa ko'paytirish amalining aniqlanishiga ko'ra shunday $t \in X \cap Y$ topiladiki $a = \lambda t$ o'rinli bo'ladi. $t \in X \cap Y$ bo'lganidan $t \in X$ va $t \in Y$ ega bo'lamiz. Bulardan $\lambda t \in \lambda X$ va $\lambda t \in \lambda Y$ ifodalar kelib chiqadi. Bu esa $\lambda t \in \lambda X \cap \lambda Y$ ekanligini anglatadi. Har qanday $a \in \lambda X \cap \lambda Y$ ni $\lambda(X \cap Y)$ to'plamga tegishli ekanligini ham huddi shu yo'l bilan ko'rsatish mumkin. Lemma isbotlandi.

6-lemma. E vektor fazoda berilgan bo'sh bo'lmagan X to'plam va λ son uchun $\lambda \partial X = \partial(\lambda X)$ tenglik o'rinli. Bu yerda ∂X - X to'plamning chegarasi.

Isbot. Aytaylik $a \in \lambda \partial X$ bo'lsin, u holda shunday $x' \in \partial X$ topiladiki $a = \lambda x'$ bo'ladi. $x' \in \partial X$ degani x' ning har qanday $B_r(x') = \{x : \|x' - x\| < r, r \in R\}$ atrofi uchun

$$B_r(x') \cap X \neq \emptyset,$$

$$B_r(x') \cap X^c \neq \emptyset,$$

bo'ladi. Bu ifodalarni ikkala tomonini λ ga ko'paytiramiz va 5-lemmaga ko'ra quyidagi natijani olamiz:

$$B_{\lambda r}(\lambda x') \cap \lambda X \neq \emptyset,$$

$$B_{\lambda r}(\lambda x') \cap (\lambda X)^c \neq \emptyset.$$

Bu esa $a = \lambda x' \in \partial(\lambda X)$ ekanligini anglatadi. Har qanday $a \in \partial(\lambda X)$ ni $\lambda \partial X$ to'plamga tegishli ekanligini huddi shunday usul bilan ko'rsatiladi. Lemma isbotlandi.

7-lemma. E vektor fazoda berilgan bo'sh bo'lmagan A, B, C va D to'plamlar uchun $(A \cap B) + (C \cap D) \subset (A + C) \cap (B + D)$ munosabat o'rinli.

Isbot. Aytaylik $x \in (A \cap B) + (C \cap D)$ bo'lsin, u holda Minkovskiy yig'indisining aniqlanishiga ko'ra $x = t + k$ tenglikni qanoatlantiruvchi $t \in A \cap B$ va $k \in C \cap D$ lar topiladi. Bu esa $t \in A, t \in B, k \in C, k \in D$ ekanligini anglatadi. Bundan $t + k \in A + C$ va $t + k \in B + D$ kelib chiqadi. Demak $x = t + k \in (A + C) \cap (B + D)$ ekan.

Endi har qanday $x \in (A + C) \cap (B + D)$ ni $(A \cap B) + (C \cap D)$ to'plamga tegishli bo'lavermasligini quyidagi misol yordamida izohlaymiz:

$A = [1, 2]$, $B = [3, 4]$, $C = [7, 8]$, $D = [5, 6]$ bo'lsa, u holda $(A \cap B) + (C \cap D) = \emptyset$, $(A + C) \cap (B + D) = [8, 10] \cap [8, 10] = [8, 10]$ bo'ladi. Demak, $(A \cap B) + (C \cap D) \subset (A + C) \cap (B + D)$.

2. Asosiy teoremlar

Yuqorida keltirilgan lemmalar va natijalar yordamida quyidagi teoremlarni isbotlash mumkin.

1-teorema. Agar X to'plam ochiq(yopiq) to'plam bo'lsa, u holda λX to'plam ham ochiq(yopiq) to'plam bo'ladi.

Isbot. Aytaylik X ochiq to'plam bo'lsin. U holda barcha $x_0 \in X$ lar uchun uning doimo shunday $B_r(x_0) = \{x : \|x_0 - x\| < r\}$ atrofi topiladiki, $B_r(x_0) \subset X$ bo'ladi. Bu munosabatning ikkala qismini λ songa ko'paytiramiz, natijada $B_{\lambda r}(\lambda x_0) \subset \lambda X$ munosabat xosil bo'ladi. Bu yerda $B_{\lambda r}(\lambda x_0) = \{x' : \|\lambda x_0 - x'\| < \lambda r\}$. Bu esa λX to'plamning har bir nuqtasi uning ichki nuqtasi ekanligini anglatadi, demak λX ochiq to'plam ekan.

Endi, X yopiq to'plam bo'lsin. Yopiq to'plam ta'rifidan barcha $x_0 \in X$ larning ixtiyoriy $B_r(x_0) = \{x : \|x_0 - x\| < r\}$ atrofi uchun doimo $B_r(x_0) \cap X \neq \emptyset$ munosabat o'rinli bo'ladi. Bu munosabatning ikkala qismini λ songa ko'paytiramiz va 5-lemmaga ko'ra $B_{\lambda r}(\lambda x_0) \cap \lambda X \neq \emptyset$ munosabat kelib chiqadi. Bu esa λX to'plamning har bir nuqtasi uning urinish nuqtasi ekanligini anglatadi, demak λX yopiq to'plam ekan.

2-teorema. E chiziqli fazoda berilgan bo'sh bo'lmagan ochiq X va Y to'plamlarning kamida biri ochiq to'plam bo'lsa u holda $X + Y$ to'plam ham ochiq to'plam aks holda yopiq to'plam bo'ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra berilgan to'plamlar bittasi ochiq to'plam bo'lishi kerak, aytaylik X to'plam ochiq to'plam bo'lsin. U holda ochiq to'plamlar ta'rifidan har qanday $x_0 \in X$ lar uchun uning doimo shunday $B_r(x_0) = \{x : \|x_0 - x\| < r\}$ atrofi topiladiki, $B_r(x_0) \subset X$ bo'ladi. Minkovskiy yig'indisi amalining xossasiga ko'ra [17] quyidagi munosabatni yoza olamiz.

$$B_r(x_0) + y_0 \subset X + Y \quad (4)$$

bu yerda y_0 vektor Y to'plamning ixtiyoriy elementi.

(4) munosabatdagi $B_r(x_0) = \{x : \|x_0 - x\| < r\}$ atrof markazi x_0 nuqtada bo'lgan r radiusli shar ekanligini bilgan holda va Minkovskiy yig'indisining aniqlanishiga ko'ra

$$B_r(x_0) + y_0 = B_r(x_0 + y_0) \quad (5)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu yerda $B_r(x_0 + y_0) = \{z : \|(x_0 + y_0) - z\| < r\}$ to'plam markazi $(x_0 + y_0)$ nuqtada bo'lgan r radiusli shar.

(5) tenglikni (4) munosabatga qo'ysak $B_r(x_0 + y_0) \subset X + Y$ munosabat kelib chiqadi. Demak, $X + Y$ ochiq to'plam ekan. Teoremaning birinchi qismi isbotlandi.

Teoremaning ikkinchi qismini isbotlaylik, ya'ni berilgan X, Y to'plamlarning ikkalasi ham yopiq to'plam bo'lsin. Yopiq to'plam ta'rifiga ko'ra barcha $x_0 \in X$ va $y_0 \in Y$ larning har qanday $B_{r_1}(x_0) = \{x : \|x_0 - x\| < r_1\}$ va $B_{r_2}(y_0) = \{y : \|y_0 - y\| < r_2\}$ atroflari uchun $B_{r_1}(x_0) \cap X \neq \emptyset$, $B_{r_2}(y_0) \cap Y \neq \emptyset$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bulardan $(B_{r_1}(x_0) \cap X) + (B_{r_2}(y_0) \cap Y) \neq \emptyset$ kelib chiqadi. 7-lemmaga ko'ra

$$(B_{r_1}(x_0) \cap X) + (B_{r_2}(y_0) \cap Y) \subset (B_{r_1}(x_0) + B_{r_2}(y_0)) \cap (X + Y) \neq \emptyset \quad (6)$$

munosabatni yoza olamiz. Minkovskiy yig'indisiga ko'ra $B_{r_1}(x_0) + B_{r_2}(y_0) = B_{r_1+r_2}(x_0 + y_0)$ tenglik o'rinni u holda (6) munosabat $B_{r_1+r_2}(x_0 + y_0) \cap (X + Y) \neq \emptyset$ ko'rinishda bo'ladi. r_1, r_2 lar ixtiyoriy bo'lganligi uchun $r_1 + r_2 = r$ deb belgilasak umumiylikka zarar yetmaydi va $B_r(x_0 + y_0) \cap (X + Y) \neq \emptyset$ ga ega bo'lamiz. Bu esa $X + Y$ to'plamni yopiq ekanligini anglatadi. Teorema to'liq isbotlandi.

3-teorema. E chiziqli fazoda berilgan bo'sh bo'lmagan X ochiq va Y yopiq to'plamlarning Minkovskiy ayirmasi $X \dot{-} Y$ ochiq to'plam bo'ladi. X va Y ning qolgan hollarida bu ayirma yopiq to'plam bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik $X \dot{-} Y$ to'plam yopiq to'plam bo'lsin. U holda $(X \dot{-} Y)^c$ to'plam ochiq to'plam bo'ladi. $(X \dot{-} Y)^c = -Y + X^c$ [1] xossaga ko'ra $-Y + X^c$ to'plam ham ochiq bo'lishi kerak. Lekin teorema shartiga ko'ra X ochiq va Y yopiq to'plamlar bo'lgani uchun X^c to'plam yopiq, 1-teoremaga ko'ra $-Y$ to'plam ham yopiqdir. U holda 2-teoremaga ko'ra $-Y + X^c$ to'plam yopiq bo'ladi. Bu esa $(X \dot{-} Y)^c$ to'plamning esa yopiq ekanligini anglatadi, ziddiyatga kelib qoldik. Demak, farzimiz noto'g'ri ekan, $X \dot{-} Y$ ochiq to'plamdir.

Endi qolgan hollarni qarab chiqaylik. Aytaylik X ham Y ham ochiq to'plamlar bo'lsin, u holda X^c yopiq, $-Y$ esa ochiq bundan $-Y + X^c$ to'plam ochiq bo'ladi. Demak, $X \dot{-} Y$ yopiqdir.

Aytaylik X ham Y ham yopiq to'plamlar bo'lsin, u holda X^c ochiq, $-Y$ esa yopiq, bundan $-Y + X^c$ to'plam ochiq bo'ladi. Demak, $X \dot{-} Y$ yopiqdir.

Vanihyot aytaylik X yopiq, Y ochiq to'plamlar bo'lsin, u holda X^c ochiq, $-Y$ ham ochiq bundan $-Y + X^c$ to'plam ochiq bo'ladi. Demak, $X \dot{-} Y$ yopiqdir. Teorema isbotlandi.

3. Olingan natijalar muhokamasi

Bizga bu bandeda keyingi muloxazalarimizni yuritish uchun zarur tushunchalarni kiritib olamiz.

6-ta'rif. E chiziqli fazoda berilgan A to'plamni radiusi $R > 0$ ga teng markazlari turlicha bo'lgan bir qancha yopiq sharlar kesishmasi ko'rinishida tasvirlab bo'lsa, u holda A to'plam $R > 0$ o'zgarmasli kuchli qavariq deyiladi.

Ta'rifga ko'ra A to'plam $R > 0$ o'zgarmasli kuchli qavariq bo'ladi, agar uni quyidagi ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lsa

$$A = \bigcap_{x \in X} B_R(x),$$

bu yerda X - radiusi $R > 0$ bo'lgan sharlar markazlari to'plami, $B_R(x)$ - markazi x nuqtada bo'lgan yopiq shar.

R o'zgarmasli kuchli qavariq to'plam ta'rifini Minkovskiy ayirmasi yordamida ham bersa bo'ladi.

7-ta'rif. Agar $A \subset E$ to'plam uchun $B_R \dot{-} A \neq \emptyset$ va $B_R \dot{-} (B_R \dot{-} A) = A$ shartlar bajarilsa, u holda A to'plam $R > 0$ o'zgarmasli kuchli qavariq deyiladi.

Endi yuqoridagi faktlarni differensial o'yinlarga tatbig'ini ko'raylik. \square^n fazoda quyidagi differensial o'yinni qaraymiz

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu(t) + Cv(t), \quad (7)$$

bu yerda $t \in [0; T]$, $x(t) \in \square^n$, $x(t)$ - fazoviy vektor, $u(t)$ - quvuvchi o'yinchi boshqaruvi $u(t) \in P$, $v(t)$ - qochuvchi o'yinchi boshqaruvi $v(t) \in Q$. $P \subset \square^p$, $Q \subset \square^q$ lar berilgan qavariq kompakt

to'plamlar, A, B, C lar moc ravishda $n \times n, n \times p, n \times q$ o'lchovli matrisalar. Differensial o'yinning $x(0) = x_0$ boshlang'ich holati, $M \subset \square^m, m \leq n$ terminal to'plam va $\Pi: \square^n \rightarrow \square^m$ matritsa berilgan.

(7) tenglama trayektoriyasiga ikkala quvuvchi o'yinchi ham, qochuvchi o'yinchi ham ta'sir ko'rsatadi. Quvuvchi o'zining u – boshqaruv parametri, qochuvchi esa o'zining v – boshqaruv parametrlarini tanlash orqali trayektoriyaga ta'sir qiladi. Quvuvchi o'yinchining maqsadi x ya'ni (7) tenglama trayektoriyasi proeksiyasini oxirgi T vaqtda M to'plamga tushurish, boshqacha qilib aytganda

$$\Pi x(T) \in M \quad (8)$$

tegishlilik bajarilishini taminlash. Qochuvchi o'yinchi umuman olganda unga xalaqit berishga intiladi. Ya'ni qochuvchi

$$\Pi x(T) \notin M \quad (9)$$

munosabat bajarilishini ta'minlashga harakat qiladi.

(7)-(9) larda o'zgaruvchilarni almashtirib

$$z(t) = \Pi e^{(T-t)A} x(t) \quad (10)$$

berilgan (7) tenglamani quyidagi sodda dinamikali sistemaga keltiramiz

$$\frac{dz}{dt} = \tilde{B}(t)u + \tilde{C}(t)v, \quad (11)$$

bu yerda $\tilde{B}(t) = \Pi e^{(T-t)A} B, \tilde{C}(t) = \Pi e^{(T-t)A} C$.

O'zgaruvchilarni (10) almashtirish bajarish natijasida (8) tegishlilik quyidagi ko'rinishni oladi

$$z(T) \in M. \quad (12)$$

Huddi shuningdek (9) munosabat quyidagi ko'rinishni oladi

$$z(T) \notin M. \quad (13)$$

Agar o'yin davomida $z(T) \in M$ shart bajarilsa, u holda quvuvchi qochuvchini tutib oladi deyiladi. Aksincha bo'lsa qochuvchi quvuvchuidan qochib ketadi deyiladi.

8-ta'rif. Deyarli barcha $t \in [0; T]$ larda $\tilde{u}(t) \in P(t) = \tilde{B}(t)u(t)$ shartni qanoatlantiruvchi, Lebeg ma'nosida integrallanuvchi barcha $\tilde{u}: [0; T] \rightarrow \square^m$ funksiyalardan tashkil topgan, quvuvchi o'yinchining qo'llashi mumkin bo'lgan strategiyalar to'plamini U orqali belgilaymiz. Deyarli barcha $t \in [0; T]$ larda $\tilde{v}(t) \in Q(t) = \tilde{C}(t)v(t)$, shartni qanoatlantiruvchi, Lebeg ma'nosida integrallanuvchi barcha $\tilde{v}: [0; T] \rightarrow \square^m$ funksiyalardan tashkil topgan, qochuvchi o'yinchining qo'llashi mumkin bo'lgan strategiyalar to'plamini V orqali belgilaymiz.

9-ta'rif. Aytaylik $\tilde{u} \in U, \tilde{v} \in V, z_0 \in \square^m$ berilgan bo'lsin. Fazoviy vektorning T vaqt momentidagi, o'yinchilarning berilgan \tilde{u}, \tilde{v} boshqaruvlari va fazoviy vektorning z_0 boshlang'ich holati orqali ifodasini $z_T(\tilde{u}, \tilde{v})$ orqali belgilaymiz

$$z_T(\tilde{u}, \tilde{v}) = z_0 + \int_0^T \tilde{u}(t) dt + \int_0^T \tilde{v}(t) dt. \quad (14)$$

10-ta'rif. $[a; b]$ kesmada qiymatlari $X(t) \in \square^m$ to'plamlardan iborat X ko'pqiyimli akslantirish berilgan bo'lsin. *Auman integrali* deb, $\int_a^b x(t) dt$ ko'rinishdagi vektorlar to'plamiga aytiladi va

$\int_a^b X(t) dt$ kabi belgilanadi. Bu yerda x - Lebeg ma'nosida integrallanuvchi, $[a; b]$ kesmaning deyarli

barcha nuqtasida $x(t) \in X(t)$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya.

4-teorema. Aytaylik (11) differensial o'yinda M terminal to'plam yopiq va $1/R$ o'zgarasli moddiy-silliq(телесно-гладкий)bo'lsin ($R > 0$). $P_0 = \int_0^T P(t)dt$ va $Q_0 = \int_0^T Q(t)dt$ ko'rinishdagi Auman integrallari $r \in (0; R)$ o'zgarasli kuchli qavariq to'plamlar bo'lsa, u holda har qanday $z_0 \in \square^m$ vektor uchun quyidagilardan faqat birigina bajariladi:

1)qochuvchi o'yinchining har qanday $\tilde{v} \in V$ strategiyasida ham, quvuvchi o'yinchi shunday $\tilde{u} \in U$ strategiya qura oladiki, natijada quvuvchi qochuvchini tutib oladi: $z_T(\tilde{u}, \tilde{v}) \in M$

2)quvuvchi o'yinchining har qanday strategiyasida ham, qochuvchi o'yinchi shunday $\tilde{v} \in V$ strategiya qura oladiki, natijada qochuvchi quvuvchidan qochib ketadi: $z_T(\tilde{u}, \tilde{v}) \notin M$.

Chunonchi, agar $z_0 \in M^*Q_0 + P_0$ bo'lsa 1) shart bajariladi, aks holda 2) shart bajariladi.

Isbot. $z_0 \in M^*Q_0 + P_0$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda $z_0 \in M^*Q_0 + \tilde{u}_0$ munosabat bajariluvchi $\tilde{u}_0 \in P_0$ vektor topiladi. Bundan $z_0 - \tilde{u}_0 + Q_0 \subset M$ ni yoza olamiz. Bu esa har qanday $\tilde{v}_0 \in Q_0$ vektorlar uchun $z_0 - \tilde{u}_0 + \tilde{v}_0 \subset M$ munosabat o'rinli ekanligini anglatadi. Bundan (14) va Auman integralining ta'rifidan har qanday $\tilde{v} \in V$ strategiya uchun, tutish sodir bo'luvchi shunday $\tilde{u} \in U$ strategiya mavjud ekanligi kelib chiqadi

$$z_T(\tilde{u}, \tilde{v}) = z_0 + \int_0^T \tilde{u}(t)dt + \int_0^T \tilde{v}(t)dt \in M.$$

Teskari holini ko'raylik: $z_0 \notin M^*Q_0 + P_0$. Tushunarliki M to'plam R o'zgarasli kuchsiz qavariq, $\text{int } M$ to'plam esa R o'zgarasli kuchsiz qavariq va $c\text{int } M = cM$ bo'ladi. Bu esa $M^*Q_0 + P_0 = M + P_0^*Q_0$ tenglik bajarilishini ko'rsatadi. Bu tenglikdan $z_0 \notin M + P_0^*Q_0$ munosabat kelib chiqadi. Bundan $z_0 + Q_0 \notin M + P_0$ bo'ladi. Bu esa har qanday $\tilde{u}_0 \in P_0$ vektor uchun $z_0 + \tilde{v}_0 - \tilde{u}_0 \notin M$ munosabat o'rinli bo'luvchi shunday $\tilde{v}_0 \in Q_0$ vektor mavjud ekanligini anglatadi. Boshqacha aytganda har qanday $\tilde{u} \in U$ strategiya uchun, qochish amalga oshuvchi $\tilde{v} \in V$ strategiya topiladi: $z_T(\tilde{u}, \tilde{v}) \notin M$.

Xulosa

Maqolada Minkovskiy yig'indisi va geometrik ayirmasini hisoblashdagi o'ziga hos murakkabchiliklarni yengib o'tish yo'llari bayon qilingan. Bu yerda ko'rilgan misollar aslida tekislikdagi to'plamlar uchun bayon qilingan. Ularni uch o'lchovli fazoda hisoblash yetarli darajada murakkab va ko'p hollarda xatoliklarga yo'l qoyiladi, hatto to'rt o'lchovli ko'pyoqliklarda bu holatlar o'rganilmagan. Lekin Minkovskiy yig'indisi va geometrik ayirmasini uch o'lchovli fazoda taqribiy hisblash nisbatan tez va oson kechishi mumkin. Shunga qaramasdan ushbu masalalarni umumiy hollarda hal qilish dolzarbligicha qolmoqda.

Minkovskiy yig'indisi va geometrik ayirmasi differensial o'yinlarda o'yinni tugatish uchun yetarli shartlar olishda qo'llanilgan [12-15]. Geometrik ayirmani hisoblash esa asosan misllarda yetarli shartlarni o'rinli ekanligini aniqlashda kerak bo'lgan[16,17]. Bugungi kunda differensial o'yinlar yordamida amaliy masalalarni hal qilishda Minkovskiy yig'indisi va geometrik ayirmasini taqribiy hisoblash muhim o'rin tutmoqda. Shu bilan birga nazariy tadqiqatlarda geometrik ayirmani quyidan va yuqoridan baholash ham o'ta muhim masalalardan biridir.

Adabiyotlar

1. Minkowski H. Verhandlungen des III internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg. — Berlin, 1904. — P. 164–173.
2. Matheron, G. Random Sets and Integral Geometry, Wiley, New York, 1976.
3. Hadwiger, H. Vorlesungen über Inhalt Oberfläche und. Isoperimetrie, Springer, Berlin, 1957.
4. Ghosh, P. K. A mathematical model for shape description using Minkowski operators, Comput. Vision, Graphics, Image Process. 44 (1988), 239-269.
5. Kaul, A. Computing Minkowski sums, PhD Thesis, Columbia University, 1993.

6. Kaul, A. and Rossignac, J. R.: Solid interpolating deformations: Construction and animation of PIP, *Computers and Graphics* 16 (1992), 107-115.
7. Lozano-Pe'rez, T. and Wesley, M. A.: An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles, *Comm. ACM* 22 (1979), 560-570.
8. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: 2-е изд., Физматлит, 2007, 440 с.
9. Wein R. Exact and efficient construction of planar Minkowski sums using the convolution method // *Proc. 14th European Symposium on Algorithms (ESA), LNCS. 2006. V. 4186. P. 829–840.*
10. Ramkumar, G.D.: An algorithm to compute the Minkowski sum outer-face of two simple polygons. In: *Proc. 12th Sympos. Comput. Geom.*, pp. 234–241 (1996)
11. Kaul, A., O'Connor, M.A., Srinivasan, V.: Computing Minkowski sums of regular polygons. In: *Proc. 3rd Canad. Conf. Comput. Geom.*, pp. 74–77 (1991)
12. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх I // *ДАН СССР. – Москва. 1967. – Вып. 174. – № 6. – С. 1278-1280.*
13. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх II // *ДАН СССР. – Москва. 1967. – Вып. 175. – № 4. – С. 764-766.*
14. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // *Мат. сборник. – Москва. 1980. – Т. 112. – № 3. – С. 307-330.*
15. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания // *Труды МИАН СССР. – Москва. 1971. – Т. 112. – С. 30-63.*
16. Сатимов Н.Ю. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх // *Дифференц. уравнения. – Минск. 1973. – Т. 9. – № 11. – С. 2000-2009.*
17. Иванов Г.Е. Слабо выпуклые множества и их свойства // *Матем. заметки. 2006. Том 7*9. Выпуск 1. С. 60-86.*

UDK:519.2

PANJARADAGI BIR ZARRACHALI SISTEMA ENERGIYASI TAQSIMOTINING BA'ZI XOSSALARI

J.I.Abdullayev, A.M.Toshturdiyev
Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya. Ushbu ishda bir o'lchamli panjarada erkin harakatlanayotgan zarracha energiyasining taqsimoti o'rganilgan. Kanonik bazis ψ_n , $n \in \mathbb{Z}$ holatlarda energiyaning taqsimoti bir xil taqsimlanganligi ko'rsatilgan. Energiya taqsimotining kanonik bazis holatlardagi o'rta qiymati va dispersiyasi hisoblangan.

Kalit so'zlar: holatlar fazosi, energiya operatori, kuzatiluvchan miqdor, spektral proyektorlar, taqsimot funksiya, o'rta qiymat, dispersiya.

Some properties of energy distribution of a one-particle system on a lattice

Abstract. In this work is studied distribution energy of the free particle moving on a lattice. It is shown that distribution of the energy at the canonical basis state ψ_n , $n \in \mathbb{Z}$ distributed identity. Mean value and dispersion of the distribution energy at the canonical basis state are calculated.

Keywords: State space, energy operator, observable, spectral projectors, distribution function, mean value, dispersion.

Некоторые свойства распределения энергии одночастичной системы на решетке

Аннотация. В работе исследована распределение энергии свободно движущейся частицы на одномерной решетке. Показано, что распределение энергии в каноническом базисном состоянии ψ_n , $n \in \mathbb{Z}$ одинаково распределены. Вычислены среднее значение и дисперсия энергии в каноническом базисном состоянии.

Ключевые слова: пространство состояний, оператор энергии, наблюдаемые, спектральные проекторы, функция распределения, среднее значение, дисперсия.

Fizik kattaliklarni o'lchashda turli tajribalar o'tkaziladi. Tajriba o'tkaziladigan shart-sharoitlar haqida to'liq ma'lumotga ega bo'lganda ham o'lchash natijasini oldindan aytish mumkin emas ekan. O'lchash natijasi tasodifiy miqdor bo'lib, kvant mexanikasida bunday miqdorlarning taqsimot qonunlari

o'rganiladi. Qiymatlarini tajribada istalgan aniqlikda o'lchash mumkin bo'lgan fizik miqdorlar kuzatiluvchan miqdorlar deyiladi. O'lchash natijalari haqiqiy sonlar deb hisoblanadi.

Kvant mexanikasining asosiy postulatlarini sistemasi Geyzenberg, Shryodinger, Yordan, Pauli, I. fon Neyman va boshqa ko'plab olimlar tomonidan taklif etilgan.

Biz quyida I. fon Neyman tomonidan taklif etilgan kvant mexanikasi postulatlarini sistemasiga tayanamiz [1].

1-postulat. Kvant mexanikasidagi sistemaning holatlari Ω kompleks separabel Hilbert fazosining (birlik) vektorlari bilan ifodalanadi. Bunda ikkita vektor ayni bitta holatni faqat va faqat nolmas kompleks ko'paytuvchiga farq qilgandagina (ψ va φ vektorlar uchun $\psi = c\varphi$, $|c| = 1$) ifodalaydi. Har bir kuzatiluvchan miqdorga Ω da chiziqli o'z-o'ziga qo'shma operatorni bir qiymatli mos qo'yish mumkin.

Ω – holatlar fazosi, uning elementlari esa holat vektorlari deyiladi. Biz har doim (agar aksi aytilmagan bo'lsa) fizik sistemaning holatini ifodalovchi $\psi \in \Omega$ vektorning normasi birga teng deb hisoblaymiz. Ba'zan sistemaning holati $\psi \in \Omega$ vektor bilan ifodalanishini nazarda tutib, sistema ψ holatda deb ataymiz. Kuzatiluvchan a miqdorga mos o'z-o'ziga qo'shma operatorni A bilan belgilaymiz. Agar kuzatiluvchan a_1, a_2, \dots, a_n miqdorlarning qiymatlarini bitta tajribada (bitta tajriba qurilmasida) istalgan aniqlikda o'lchash mumkin bo'lsa, ular bir vaqtda (yoki birgalikda) o'lchanadigan miqdorlar deyiladi. Shunday ekan, ixtiyoriy $\psi \in \Omega$ holatda a_1, a_2, \dots, a_n tasodifiy miqdorlar birgalikdagi taqsimot funksiyaga ega. Bu taqsimot funksiyani $F_\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ orqali belgilaymiz. Boshqacha aytganda $F_\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ argumentlarning tayinlangan qiymatlarida kuzatiluvchan a_1, a_2, \dots, a_n miqdorlarning ψ holatda o'lchangan qiymatlari mos ravishda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlardan oshmasligining ehtimolidir, ya'ni

$$F_\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = P_\psi(a_1 \leq \lambda_1, a_2 \leq \lambda_2, \dots, a_n \leq \lambda_n).$$

2-postulat. Kuzatiluvchan miqdorlar faqat va faqat ularga mos o'z-o'ziga qo'shma operatorlar o'zaro o'rin almashinuvchan bo'lgandagina bir vaqtda o'lchanadigan bo'ladi. Agar kuzatiluvchan a_1, a_2, \dots, a_n miqdorlar bir vaqtda o'lchanadigan bo'lsa, u holda ψ holatda ularning birgalikdagi taqsimot funksiyasi

$$F_\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \|E_{\lambda_1}^{(1)} \cdot E_{\lambda_2}^{(2)} \dots E_{\lambda_n}^{(n)} \psi\|^2 \quad (1)$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda $E_{\lambda_1}^{(1)}, E_{\lambda_2}^{(2)}, \dots, E_{\lambda_n}^{(n)}$ lar A_1, A_2, \dots, A_n operatorlarga mos birning yoyilmalaridan olingan proyektorlar.

O'z-o'ziga qo'shma operatorlarning spektral proyektorlari haqida ma'lumotlarni [2] adabiyotdan topish mumkin.

Ravshanki, agar ψ vektorni sistemaning xuddi shu holatini ifodalovchi boshqa $c\psi$, $|c| = 1$ vektor bilan almashtirsak (1) ifodaning qiymati o'zgarmaydi, haqiqatan ham

$$F_{c\psi}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \|E_{\lambda_1}^{(1)} \cdot E_{\lambda_2}^{(2)} \dots E_{\lambda_n}^{(n)} c\psi\|^2 = |c|^2 \|E_{\lambda_1}^{(1)} \cdot E_{\lambda_2}^{(2)} \dots E_{\lambda_n}^{(n)} \psi\|^2 = \|E_{\lambda_1}^{(1)} \cdot E_{\lambda_2}^{(2)} \dots E_{\lambda_n}^{(n)} \psi\|^2 = F_\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Proyektorlar o'zaro o'rin almashinuvchan bo'lgani uchun (1) ifodaning qiymati a_1, a_2, \dots, a_n kuzatiluvchan miqdorlar qanday tartibda qaralayotganidan ham bog'liq emas. Agar qandaydir bitta a kuzatiluvchan miqdor o'lchanadigan bo'lsa, u holda bu miqdorning ψ holatdagi taqsimot funksiyasi

$$F_\psi(\lambda) = \|E_\lambda \psi\|^2 \quad (2)$$

ko'rinishga ega, bu yerda E_λ - A operator birining yoyilmasidan olingan proyektor. Bu munosabat (1) munosabatning xususiy holdidir.

Har qanday kvantomexanik sistemada eng muhim fizik miqdorlardan biri bu energiya hisoblanadi. Bu kuzatiluvchan miqdorga mos o'z-o'ziga qo'shma operatorni H orqali belgilaymiz. Quyidagi postulat energiya operatori H sistema evolyutsiyasi qonunini aniqlashini takidlaydi [1].

3-postulat. Biror $t = 0$ vaqt momentida sistemaning holati ψ_0 vektor bilan tasvirlansin. U holda ixtiyoriy t vaqt momentida sistemaning holati $\psi(t) = U_t \psi_0$ vektor bilan tasvirlanadi, bu yerda U_t evolyutsiya operatori deb ataluvchi unitar operator. Agar $\psi(t)$ vektor-funksiya H operatorning $D(H)$ aniqlanish sohasiga aqalli $t = 0$ da tushsa, u differensiallanuvchi bo'ladi va

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t) \quad (3)$$

munosabat o'rinli, bu yerda \hbar – Plank doimiysi.

(3) munosabat kvant mexanikasining asosiy tenglamasi bo'lib, u Shryodinger tenglamasi deyiladi.

Bizga bir o'lchamli panjara $\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$ (\mathbb{Z} – butun sonlar to'plami) da erkin harakatlanayotgan kvant tipidagi zarracha berilgan bo'lsin.

Agar biz bu zarrachaning koordinatasini kuzatayotgan bo'lsak, unga mos holatlar fazosi Ω o'rnida separabel kompleks Hilbert fazosi $\ell_2(\mathbb{Z})$ ni olish mumkin [3].

Koordinata operatori K esa $\ell_2(\mathbb{Z})$ Hilbert fazosida quyidagicha aniqlanadi:

$$(Kf)(n) = nf(n), \quad f \in \ell_2(\mathbb{Z}).$$

K operator birining yoyilmasidagi E_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$ proyektorlar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$(E_\lambda f)(n) = \chi_{(-\infty; \lambda]}(n)f(n),$$

bu yerda

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A. \end{cases}$$

2-postulat va (2) formulaga ko‘ra koordinataning ψ holatdagi taqsimot funksiyasi F_ψ quyidagiga teng bo‘ladi:

$$\begin{aligned} F_\psi(\lambda) &= \|E_\lambda \psi\|^2 = (E_\lambda \psi, E_\lambda \psi) = (E_\lambda \psi, \psi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (E_\lambda \psi)(n) \cdot \overline{\psi(n)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_{(-\infty; \lambda]}(n) \psi(n) \cdot \overline{\psi(n)} = \sum_{n \leq \lambda} |\psi(n)|^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Xususan bu yerdan ψ holatda zarrachani $A \subset \mathbb{Z}$ to‘plamdan topish ehtimoli

$$P_\psi(\xi \in A) = \sum_{n \in A} |\psi(n)|^2.$$

ga teng.

Zarracha koordinatasining ixtiyoriy $\psi \in \ell_2(\mathbb{Z})$ holatdagi taqsimoti diskret bo‘lib, uning taqsimot qonunini quyidagi jadval orqali berish mumkin.

ξ	...	-1	0	1	...	n	...
P_ψ	...	$ \psi(-1) ^2$	$ \psi(0) ^2$	$ \psi(1) ^2$...	$ \psi(n) ^2$...

Erkin harakatlanayotgan zarrachaning energiya operatori \hat{H} quyidagicha aniqlanadi [3], [4]

$$(\hat{H}f)(n) = -\frac{1}{2m}(f(n+1) + f(n-1) - 2f(n)). \tag{5}$$

Bu yerda m – zarrachaning massasi. Energiya operatori \hat{H} ning (5) tasviriga koordinat tasvir deyiladi. Bu operator $\ell_2(\mathbb{Z})$ fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operator bo‘ladi.

Endi bu $\ell_2(\mathbb{Z})$ fazoda siljishlar gruppasi deb ataluvchi $\hat{U}_s, s \in \mathbb{Z}$, unitar operatorlar oilasini kiritamiz [3,4,5], bu operatorning f funksiyaga ta‘siri

$$(\hat{U}_s f)(n) = f(n+s), \quad s \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

ko‘rinishida aniqlanadi. Bu operatorlar ko‘paytirishga nisbatan Abel gruppasini tashkil qiladi. Ixtiyoriy $s, t \in \mathbb{Z}$ lar uchun

$$\hat{U}_s \cdot \hat{U}_t = \hat{U}_t \cdot \hat{U}_s = \hat{U}_{t+s}, \quad (\hat{U}_s)^* = \hat{U}_{-s} = (\hat{U}_s)^{-1} \tag{7}$$

tengliklar o‘rinli. (7) tenglikdan $\hat{U}_s, s \in \mathbb{Z}$ operatorlarning unitar ekanligi kelib chiqadi.

Energiya operatori \hat{H} ni \hat{U}_s operatorlarning chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ham tasvirlash mumkin.

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}(\hat{U}_1 + \hat{U}_{-1} - 2\hat{U}_0). \tag{8}$$

(7) va (8) tengliklardan quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

1-lemma. Ixtiyoriy $s \in \mathbb{Z}$ uchun $\hat{U}_s \hat{H} = \hat{H} \hat{U}_s$ tenglik o‘rinli.

Boshqacha aytganda barcha $s \in \mathbb{Z}$ lar uchun \hat{U}_s operator, energiya operatori \hat{H} bilan o‘rin almashinuvchidir.

1-teorema. (8) tenglik bilan aniqlangan energiya operatori $\hat{H}: \ell_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z})$, o‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan operator bo‘ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $s \in \mathbb{Z}$ da \hat{U}_s unitar operator bo‘lganligi uchun uning normasi birga teng bo‘ladi, ya‘ni $\|\hat{U}_s\| = 1$. Shunday ekan,

$$\|H\| = \left\| -\frac{1}{2m}(\hat{U}_1 + \hat{U}_{-1} - 2\hat{U}_0) \right\| \leq \frac{1}{2m}(\|\hat{U}_1\| + \|\hat{U}_{-1}\| + 2\|\hat{U}_0\|) = \frac{1}{2m} \cdot 4 = \frac{2}{m}$$

Demak, $\|\hat{H}\| \leq \frac{2}{m}$ bo‘lib \hat{H} chegaralangan operator ekan. Bu operatorning qo‘shmasi uchun

$$\begin{aligned} \hat{H}^* &= -\frac{1}{2m}(\hat{U}_1 + \hat{U}_{-1} - 2\hat{U}_0)^* = -\frac{1}{2m}(\hat{U}_1^* + \hat{U}_{-1}^* - 2\hat{U}_0^*) = \\ &= -\frac{1}{2m}(\hat{U}_{-1} + \hat{U}_1 - 2\hat{U}_0) = \hat{H}. \end{aligned}$$

Munosabat o‘rinli, demak, $\hat{H}^* = \hat{H}$. Bu esa \hat{H} ning o‘z-o‘ziga qo‘shma ekanligini ko‘rsatadi.

\hat{H} energiya operatorining koordinat tasviridan, impuls tasviriga o‘tish Furye almashtirishi orqali amalga oshiriladi:

$$\mathcal{F}: \ell_2(\mathbb{Z}) \rightarrow L_2[-\pi, \pi], \quad (\mathcal{F}\hat{f})(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inp}.$$

2-lemma. Istalgan $s \in \mathbb{Z}$ uchun

$$(\mathcal{F}\hat{U}_s \mathcal{F}^{-1}f)(p) = e^{-isp} f(p) = (\mathcal{U}_s f)(p)$$

tenglik o‘rinli.

Isbot. Lemmani isbotlash uchun $\mathcal{F}\hat{U}_s \hat{f}$ ni hisoblash yetarli.

$$(\mathcal{F}\hat{U}_s \hat{f})(p) = \mathcal{F}(\hat{f}(n+s))(p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n+s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inp}.$$

Bunda $n+s = m$ almashtirish olamiz, u holda

$$(\mathcal{F}\hat{U}_s \hat{f})(p) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(m-s)p} = e^{-isp} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imp} = e^{-isp} \cdot f(p)$$

lemma isbot bo‘ldi.

2-teorema. Energiya operatori $H = \mathcal{F}\hat{H}\mathcal{F}^{-1}$ ning impuls tasviri $L_2[-\pi, \pi]$ Hilbert fazosida quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$(\hat{H}f)(p) = \frac{1}{m}(1 - \cos p)f(p), \quad f \in L_2[-\pi, \pi]. \quad (9)$$

Isbot. (9) tenglikni o‘rinli ekanligini ko‘rsatish uchun (8) tenglikdan hamda 2-lemmadan foydalanamiz.

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\hat{H}\mathcal{F}^{-1}f)(p) &= -\frac{1}{2m} \mathcal{F}(\hat{U}_1 + \hat{U}_{-1} - 2\hat{U}_0)\mathcal{F}^{-1}f(p) = \\ &= -\frac{1}{2m} ((\mathcal{F}\hat{U}_1\mathcal{F}^{-1}f)(p) + (\mathcal{F}\hat{U}_{-1}\mathcal{F}^{-1}f)(p) - 2(\mathcal{F}\hat{U}_0\mathcal{F}^{-1}f)(p)) = \\ &= -\frac{1}{2m} (e^{-ip}f(p) + e^{ip}f(p) - 2f(p)) = -\frac{1}{m} \left(\frac{e^{-ip} + e^{ip}}{2} - 1 \right) f(p) = \\ &= \frac{1}{m}(1 - \cos p)f(p). \end{aligned}$$

Ma‘lumki [5], $\psi_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inp}$, $n \in \mathbb{Z}$ sistema $L_2[-\pi, \pi]$ fazoda ortonormal bazis tashkil qiladi.

1-ta‘rif. $\psi_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inp}$, $n \in \mathbb{Z}$ bazis vektorlariga mos holatlarni bazis holatlar deb ataymiz.

Ma‘lumki [5], uzluksiz u funksiyaga ko‘paytirish operatorining spektri u funksiyaning qiymatlar sohasidan iborat bo‘ladi. Shunday ekan quyidagi tasdiq o‘rinli.

3-lemma. Energiya operatori H ning spektri $\sigma(H) = \left[0, \frac{2}{m}\right]$ kesmadan iborat.

Bu lemma [4] ishdagi 1-lemmaga o‘xshash isbotlanadi.

Demak, energiyaning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $\left[0, \frac{2}{m}\right]$ kesmani tutash to‘ldiradi.

Har bir $\lambda \in \left[0, \frac{2}{m}\right]$ uchun $A(\lambda)$ to‘plamni kiritamiz:

$$A(\lambda) = \left\{ p \in [-\pi, \pi]: \frac{1}{m}(1 - \cos p) \leq \lambda \right\} = [-\arccos(1 - \lambda m), \arccos(1 - \lambda m)].$$

Bu $A(\lambda)$ to‘plamning indikatorini qaraymiz:

$$\chi_{A(\lambda)}(p) = \begin{cases} 1, & p \in A(\lambda) \\ 0, & p \notin A(\lambda). \end{cases}$$

4-lemma. Energiya operatori H biri yoyilmasidagi E_λ spektral proyektorlar quyidagicha bo‘ladi:

$$(E_\lambda f)(p) = \begin{cases} 0, & \text{agar } \lambda < 0, \\ \chi_{A(\lambda)}(p)f(p), & 0 \leq \lambda < \frac{2}{m}, \\ f(p), & \text{agar } \lambda \geq \frac{2}{m}. \end{cases} \quad (10)$$

Isbot. E_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$ operatori spektral proyektor shartlarini qanoatlantirishini ko‘rsatamiz:

- $\lambda \in (-\infty; 0)$ bo‘lsa, $E_\lambda = 0$ bo‘ladi, chunki $A(\lambda) = \emptyset$,
- $\lambda \geq \frac{2}{m}$ bo‘lsa, $E_\lambda = E$ bo‘ladi, chunki $A(\lambda) = [-\pi, \pi]$,
- $\lambda < \mu$ da $E_\lambda \leq E_\mu$, ya‘ni $A(\lambda) \subset A(\mu)$ uchun $\chi_{A(\lambda)}(p) \leq \chi_{A(\mu)}(p)$ va $((E_\mu - E_\lambda)f, f) = \int_{-\pi}^{\pi} ((E_\mu - E_\lambda)f)(p) \overline{f(p)} dp = \int_{-\pi}^{\pi} (\chi_{A(\mu)}(p) - \chi_{A(\lambda)}(p)) |f(p)|^2 dp = \int_{A(\mu) \setminus A(\lambda)} |f(p)|^2 dp \geq 0$.

Demak, $E_\mu - E_\lambda \geq 0$, ya'ni $E_\mu \geq E_\lambda$.

4. Endi quyidagi

$$H = \int_0^{\frac{2}{m}} \lambda dE_\lambda \tag{11}$$

tenglik bajarilishini isbotlaymiz, bu tenglikni isbotlash uchun, istalgan $f \in L_2[-\pi, \pi]$ da $(Hf, f) = \int_0^{\frac{2}{m}} \lambda d(E_\lambda f, f)$ tenglikni ko'rsatish kifoya. Haqiqatan ham

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2}{m}} \lambda d(E_\lambda f, f) = \int_0^{\frac{2}{m}} \lambda d \left(\int_{-\pi}^{\pi} (E_\lambda f)(p) \overline{f(p)} dp \right) = \\ & = \int_0^{\frac{2}{m}} \lambda d \left(\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{A(\lambda)}(p) |f(p)|^2 dp \right) = \int_0^{\frac{2}{m}} \lambda d \left(\int_{-\arccos(1-\lambda m)}^{\arccos(1-\lambda m)} |f(p)|^2 dp \right) = \\ & = \int_0^{\frac{2}{m}} \lambda d \left(\int_{-\arccos(1-\lambda m)}^0 |f(p)|^2 dp \right) + \int_0^{\frac{2}{m}} \lambda d \left(\int_0^{\arccos(1-\lambda m)} |f(p)|^2 dp \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Integrallarning ikkinchisi yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integrallarni differensiallash qoidasiga ko'ra quyidagiga teng bo'ladi [6],

$$\int_0^{\frac{2}{m}} \lambda d \left(\int_0^{\arccos(1-\lambda m)} |f(p)|^2 dp \right) = \int_0^{\frac{2}{m}} \lambda |f(\arccos(1-\lambda m))|^2 \cdot \frac{m d\lambda}{\sqrt{1-(1-\lambda m)^2}}. \tag{13}$$

Bu integralda o'zgaruvchilarni almashtiramiz $\arccos(1-\lambda m) = p$ deb, undan $1-\lambda m = \cos p$ va $d\lambda = \frac{1}{m} \sin p dp$, ni topamiz, bu yerda yangi o'zgaruvchiga mos integral chegaralari $p = 0$ dan $p = \pi$ gacha bo'ladi. Bu belgilashlarni (13) ga qo'yib quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\int_0^{\frac{2}{m}} \lambda d \left(\int_0^{\arccos(1-\lambda m)} |f(p)|^2 dp \right) = \frac{1}{m} \int_0^\pi (1-\cos p) |f(p)|^2 dp. \tag{14}$$

(12) tenglikdagi birinchi integralda ham xuddi shunday amallarni bajarib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_0^{\frac{2}{m}} \lambda d \left(\int_{-\arccos(1-\lambda m)}^0 |f(p)|^2 dp \right) = \frac{1}{m} \int_{-\pi}^0 (1-\cos p) |f(p)|^2 dp. \tag{15}$$

(14) va (15) tengliklarni mos ravishda o'ng va chap qismlarini qo'shamiz, natijada

$$\int_0^{\frac{2}{m}} \lambda d(E_\lambda f, f) = \frac{1}{m} \int_{-\pi}^\pi (1-\cos p) |f(p)|^2 dp = (Hf, f).$$

tenglikka kelamiz. Bu esa (12) tenglikni isbotlaydi. Bu o'z navbatida lemmani isbotlaydi.

3-teorema. Energiyaning ψ_n bazis holatdagi taqsimot funksiyasi F_{ψ_n} uchun quyidagi tenglik o'rinni:

$$F_{\psi_n}(\lambda) = \|E_\lambda \psi_n\|^2 = \begin{cases} 0, & \text{agar } \lambda < 0, \\ \frac{1}{\pi} \arccos(1-\lambda m), & 0 \leq \lambda < \frac{2}{m}, \\ 1, & \text{agar } \lambda \geq \frac{2}{m}. \end{cases} \tag{16}$$

Isbot. 4-lemmadan foydalanib $\lambda \in [0, \frac{2}{m}]$ lar uchun $F_{\psi_n}(\lambda)$ ni hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} F_{\psi_n}(\lambda) = \|E_\lambda \psi_n\|^2 &= \int_{-\pi}^\pi |\chi_{A(\lambda)}(p) \psi_n(p)|^2 dp = \int_{-\arccos(1-\lambda m)}^{\arccos(1-\lambda m)} |\psi_n(p)|^2 dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\arccos(1-\lambda m)}^{\arccos(1-\lambda m)} dp \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \arccos(1-\lambda m) = \frac{1}{\pi} \arccos(1-\lambda m). \end{aligned}$$

E_λ operatorning aniqlanishiga ko'ra: $\lambda < 0$ bo'lsa, $F_{\psi_n}(\lambda) = \|E_\lambda \psi_n\|^2 = 0$, $\lambda \geq \frac{2}{m}$ bo'lsa, $F_{\psi_n}(\lambda) = \|E_\lambda \psi_n\|^2 = 1$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

1-natija. Barcha ψ_n , $n \in \mathbb{Z}$ bazis holatlar uchun $F_{\psi_n}(\lambda)$ taqsimot funksiyalar bir xil, ya'ni $F_{\psi_n}(\lambda) = F_{\psi_0}(\lambda)$ tenglik o'rinli.

Bizga ma'lumki [7], taqsimot funksiyadan olingan 1-tartibli hosila taqsimot zichligini beradi, ya'ni energiyaning ψ_n holatdagi zichligi funksiyasi p_{ψ_n} quyidagiga teng:

$$F'_{\psi_n}(\lambda) = p_{\psi_n}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{agar } \lambda < 0, \\ \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\lambda(\frac{2}{m} - \lambda)}}, & 0 < \lambda < \frac{2}{m}, \\ 0, & \text{agar } \lambda > \frac{2}{m}. \end{cases}$$

a kuzatiluvchan miqdorning ψ holatdagi o'rta qiymati

$$\bar{a}_\psi = (A\psi, \psi) \quad (17)$$

va dispersiyasini ([1] ga qarang)

$$\delta_\psi(a) = \|A\psi - \bar{a}_\psi\psi\|^2 \quad (18)$$

formular orqali hisoblash mumkin.

4-teorema. Energiyaning barcha ψ_n , $n \in \mathbb{Z}$ bazis holatlardagi o'rta qiymati $\bar{h}_{\psi_n} = \frac{1}{m}$ va dispersiyasi $\delta_{\psi_n}(h) = \frac{1}{2m^2}$ ga teng.

Isbot. (17) formulaga ko'ra ψ_n bazis holatdagi energiyaning o'rta qiymati $(H\psi_n, \psi_n)$ skalyar ko'paytmaga teng. Bu skalyar ko'paytmani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} (H\psi_n, \psi_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} (H\psi_n)(p) \overline{\psi_n(p)} dp = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos p) |e^{inp}|^2 dp = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos p) dp \\ &= \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Bu yerda biz $|e^{inp}| = 1$ ayniyatdan foydalandik.

Endi (18) formuladan foydalanib energiyaning ψ_n bazis holatdagi dispersiyasi $\|H\psi_n - \frac{1}{m}\psi_n\|^2$ ni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \|H\psi_n - \frac{1}{m}\psi_n\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(H\psi_n - \frac{1}{m}\psi_n \right)(p) \right|^2 dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{m}(1 - \cos p) - \frac{1}{m} \right|^2 |e^{inp}|^2 dp \\ &= \frac{1}{2\pi m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 p dp = \frac{1}{4\pi m^2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2p) dp = \frac{1}{4\pi m^2} (2\pi + 0) = \frac{1}{2m^2}. \end{aligned}$$

Oxirgi integralni hisoblashda $\cos^2 p = \frac{1}{2}(1 + \cos 2p)$ va $|e^{inp}| = 1$ ayniyatlardan foydalandik. Teorema isbot bo'ldi.

Endi quyidagi tasdiqni isbotlaymiz.

5-teorema. Ixtiyoriy $\alpha < \beta$, $(\alpha, \beta) \subset [0, \frac{2}{m}]$ interval uchun shunday $f_\gamma \in L_2[-\pi, \pi]$ holat mavjudki, energiyaning bu holatdagi o'rta qiymati \bar{h}_{f_γ} uchun $\bar{h}_{f_\gamma} \in (\alpha, \beta)$ munosabat o'rinli.

Isbot. (α, β) intervalning o'rtasini $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ bilan belgilaymiz. Ma'lumki, $\gamma \in [0, \frac{2}{m}]$ bo'ladi, shuning uchun $\gamma = \frac{1}{m}(1 - \cos p)$ tenglama yechimga ega. Bu tenglama, ya'ni $\cos p = 1 - m\gamma$ ni qanoatlantiruvchi p ning qiymati p_γ uchun $p_\gamma = \arccos(1 - m\gamma) \in [0, \pi]$ tenglik o'rinli. Endi shunday $n \in \mathbb{N}$ ni tanlaymizki $(p_\gamma - \frac{1}{n}, p_\gamma + \frac{1}{n}) \subset [-\pi, \pi]$ munosabat o'rinli bo'lsin. $f_\gamma^{(n)}$ holat funksiyasini quyidagicha quramiz.

$$f_\gamma^{(n)}(p) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{2}}, & \text{agar } p \in (p_\gamma - \frac{1}{n}, p_\gamma + \frac{1}{n}) \\ 0, & \text{agar } p \in [-\pi, \pi] \setminus (p_\gamma - \frac{1}{n}, p_\gamma + \frac{1}{n}). \end{cases}$$

$L_2[-\pi, \pi]$ da kiritilgan norma ta'rifiga ko'ra barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $\|f_Y^{(n)}\| = 1$ ekanligini oson ko'rsatish mumkin. Endi (16) tenglikdan foydalanib $f_Y^{(n)}$ holatda zarracha energiyasining o'rta qiymatini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}\bar{h}_{f_Y^{(n)}} &= (Hf_Y^{(n)}, f_Y^{(n)}) = \int_{-\pi}^{\pi} (Hf_Y^{(n)})(p) \overline{f_Y^{(n)}(p)} dp = \frac{n}{2m} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos p) dp = \\ &= \frac{n}{2m} \left(p_Y + \frac{1}{n} - \sin \left(p_Y + \frac{1}{n} \right) - p_Y + \frac{1}{n} + \sin \left(p_Y - \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{n}{2m} \left(\frac{2}{n} - 2 \cos p_Y \sin \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{m} - \frac{n}{m} (1 - m\gamma) \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{m} - \frac{n}{m} \sin \frac{1}{n} + n \gamma \sin \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Demak,

$$\bar{h}_{f_Y^{(n)}} = \frac{1}{m} \left(1 - n \sin \frac{1}{n} \right) + \gamma n \sin \frac{1}{n} \quad (19)$$

Birinchi ajoyib limitga ko'ra (19) ifoda $n \rightarrow \infty$ da γ ga intiladi. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n \in \mathbb{N}$ nomer mavjudki, barcha $n_0 > n$ larda $|\bar{h}_{f_Y^{(n)}} - \gamma| < \varepsilon$ tengsizligi o'rinli bo'ladi. Agar $\varepsilon = \frac{\beta - \gamma}{2}$ deyilsa, u holda $\bar{h}_{f_Y^{(n)}} \in (\alpha, \beta)$ munosabat bajariladi. Teorema isbot bo'ldi.

Xulosa o'rnida shuni aytishimiz mumkinki zarrachaning massasi qancha katta bo'lsa energiyaning qabul qiladigan qiymatlari diapazoni shuncha kichik bo'ladi. Kanonik bazis holatlarda energiyaning o'rta qiymati $\frac{1}{m}$, dispersiyasi $\frac{1}{2m^2}$ ga proporsional ekan. Demak, kanonik bazis holatlarda energiya o'zining o'rta qiymatidan chetlanishi massa kvadratiga teskari proporsional ekan.

Adabiyotlar

1. Ф.А. Березин, М.А. Шубин М.Ш. Уравнение Шредингера. Изд. Московского университета. 1983. 394.
2. Л.А. Люстерник, В.И. Соболев «Элементы функционального анализа» Москва Наука 1965. 520 (2-е издание).
3. Minlos R.A., Mogilner A.I. Some problems concerning spectra of lattice models. In Schrodinger operators: Standard and Nonstandard (eds. P.Exner, P.Seba). World. Scientific. Singapor. 1989.
4. Абдуллаев Ж.И. Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке. Теоретическая и математическая физика. Россия, Москва. Т.147, № 1, 36-47, (2006).
5. Abdullayev J.I, G'anixo'jayev R.N, Shermatov M.H, Egamberdiyev O.I. «Funksional analiz». Darslik. Toshkent. LIGHT-GROUP. 2015. 460.
6. Sh.Alimov, R.Ashurov. Matematik analiz 1-qism. Toshkent, "MUMTOZ SO'Z", 2018, 584.
7. A. Abdushukurov, T. Zuparov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Darslik. Tafakkur Bo'stoni. Toshkent, 2015. 416.

УДК: 517 И 875

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРОМ

Б.И. Исломов, Б. З.Усмонов

Национальный Университет Узбекистана

islomovbozor@yandex.com; bakhtiyer.usmanov@mail.ru

Аннотация. В данной статье предлагается метод решения задач для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа путем сведения к обратным задачам для дифференциального уравнения смешанного типа второго порядка с неизвестными правыми частями. С помощью энергетического тождества для уравнения третьего порядка доказана единственность поставленных задач. Существование решения задачи доказывается методом обратных задач.

Ключевые слова: нелокальная задача, регулярное решение, энергетическое тождество, уравнение третьего порядка, метод регуляризация, уравнения Фредгольма.

Uchinchi tartibli elliptik-giperbolik operatori qatnashgan tenglama uchun chegaraviy masalalar

Annotatsiya. Ushbu maqolada uchinchi tartibli elliptik-giperbolik operatori qatnashgan tenglama uchun chegaraviy masalalarni tadqiqiga bag'ishlangan. Ishda qo'yilgan masalalar yechimining yagonaligi va mavjudligi o'rganilgan. Masalalar yechimining yagonaligi inergetik ayniyatga asoslanib isbotlangan. Mavjudligi esa sohaning elliptik va giperbolik qismlarida qo'yilgan masalalarni ikkinchi tartibli tenglama uchun qo'yilgan teskari masalalarga keltirilib o'rganilgan.

Kalit so'zlar: Uchinchi tartibli tenglama, nolokal masala, regulyar yechim, inergetik ayniyat, yechimining umumiy ko'rinishi, Fredgolim tenglamasi.

The boundary-value problems for one class of a third-order equation with an elliptic-hyperbolic operator

Abstract. This article proposes a method for solving problems for a third-order elliptic-hyperbolic type equation by reducing to inverse problems for a second-order mixed-type differential equation with unknown right-hand sides. Using the energy identity for the third-order equation, the uniqueness of the tasks is proved. The existence of a solution to the problem is proved by the method of inverse problems.

Keywords: Nonlocal problem, regular solution, energy identities, third-order equation, regularization method, Fredholm equations.

Введение

Последние годы все больше внимание специалистов привлекают неклассические уравнения математической физики, это связано как с теоретическим интересом, так и практическим.

Одним из важных классов неклассических уравнений математической физики является уравнение составного и смешанно-составного типа, главные части содержат операторы эллиптического, эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов. Корректные краевые задачи для уравнений эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов третьего порядка, когда главная часть оператора содержит производную по x или y впервые изучены в работах А.В. Бицадзе и М.С. Салахитдинова [1], М.С. Салахитдинова [2], Т.Д. Джураева [3], кроме того эти уравнения встречаются в различных задачах механики. Например, распространение плоской волны в вязкоупругом твердом теле [3]. В этих работах при исследовании краевых задач использовано представление общего решения уравнения смешанно-составного типа в виде суммы функций. Такое представление имеет важное место для уравнений, составленных из произведения перестановочных дифференциальных операторов. Далее, это направление для различных уравнений с частными производными третьего порядка развивались в работах [4-13].

Исходя из этого, краевые задачи для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа, в случае, когда уравнение составлено из произведения неперестановочных дифференциальных операторов мало изучены. Отметим работу [14].

Настоящая работа посвящена изучению уравнения третьего порядка с эллиптико-гиперболическим оператором в главной части. Применен метод, не требующий специального представления общего решения рассматриваемого уравнения. Этот метод обуславливает изучение уравнения эллиптико-гиперболического типа второго порядка с неизвестными правыми частями, что представляет интерес для решения важных обратных задач механики и физики.

Доказаны теоремы существования и единственности классического решения поставленных задач. Доказательстватеоремы основаны на энергетических тождествах, а также теория сингулярных и фредгольмских интегральных уравнений.

Постановка задачи.

Рассмотрим уравнение

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx} + \text{sign} u_{yy}) = 0, \quad a, b \in R, \quad a^2 + b^2 \neq 0. \quad (1)$$

Пусть D_1 - конечная однозначная область в плоскости (x, y) , ограниченная кривой σ при $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком AB оси x . Относительно кривой σ дополнительно предположим, что она с каждой прямой $x = \text{const}$ пересекается лишь в одной точке. Разобьем кривую σ на две части σ_1 и σ_2 в следующем образом:

$$\sigma_1 = \{(x, y) \in \sigma: ax_n + by_n > 0\}, \quad \sigma_2 = \sigma \setminus \sigma_1, \quad (2)$$

где $x_n = \frac{dx}{dn} = \cos(n, x)$, $y_n = \frac{dy}{dn} = \cos(n, y)$, а n – внешняя нормаль к кривой σ .

Через D_2 обозначим область, ограниченную при $y < 0$ отрезком AB и двумя характеристиками $AC: x + y = 0$, $BC: x - y = 1$ уравнения (1), выходящими из точки $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и пересекающимися в точке $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. $D = D_1 \cup D_2 \cup AB$, $J = \{(x, y): 0 < x < 1, y = 0\}$.

Постановка корректных краевых задач для уравнения (1) зависит от знака a, b и значений коэффициентов a, b . Уравнение (1) охватывает широкий класс ранее исследованных уравнений смешанно-составного типа. Например, если $a = 1, b = 0$; $a = 0, b = 1$, то получим уравнения, исследованные в работах [2], [3].

Пусть коэффициенты a и b уравнения (1) удовлетворяет условию

$$1 < \frac{b}{a} < \infty, \quad a > 0, \quad 0 < \frac{a+b}{2} < b, \quad 0 \leq bx - ay \leq \frac{a+b}{2}, \quad (x, y) \in D_{21}, \quad \frac{a+b}{2} \leq bx - ay \leq b, \quad (x, y) \in D_{22}, \quad (3)$$

$$0 < \frac{b}{a} \leq 1, \quad a > 0, \quad 0 < b < \frac{a+b}{2}, \quad 0 \leq bx - ay \leq \frac{a+b}{2}, \quad (x, y) \in D_2, \quad (4)$$

где D_{21} – треугольник с вершинами $A(0, 0)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $E\left(\frac{a+b}{2b}, 0\right)$; D_{22} – треугольник с вершинами $B(1, 0)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $E\left(\frac{a+b}{2b}, 0\right)$, а $D_2 = D_{21} \cup D_{22} \cup CE$.

Определение 1. Решением уравнения (1) будем называть регулярное решение – функцию $u(x, y)$, обладающую в области $D_j (j = 1, 2)$ непрерывными частными производными до третьего порядка включительно и обращающую его в тождество.

I. Пусть выполнены условия (3), тогда в области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача A_{ab} . Найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), непрерывное со своими производными в замкнутой области \bar{D} и удовлетворяющее условиям:

$$u(x, y)|_{\sigma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}, \quad (5)$$

$$u(x, y)|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \Big|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \Big|_{BC} = \psi_3(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (8)$$

где $\varphi(x, y)$, $\psi_j(x) (j = \overline{1, 3})$ – заданные функции, причем

$$\varphi(0, 0) = \psi_1(0), \quad \psi_1'(0) = \sqrt{2}\psi_2(0) - 2\varphi(0, 0), \quad (9)$$

$$\psi_2'\left(\frac{1}{2}\right) = -\psi_3'\left(\frac{1}{2}\right), \quad (b - a)\psi_2''\left(\frac{1}{2}\right) + (b + a)\psi_3''\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (10)$$

$$\varphi(x, y) = y\varphi_1(x, y), \quad \varphi_1(x, y) \in C(\bar{\sigma}), \quad (11)$$

$$\psi_1(x) \in C^3\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \psi_2(x) \in C^2\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \psi_3(x) \in C^2\left[\frac{1}{2}, 1\right]. \quad (12)$$

II. Пусть выполнены условия (4), тогда в области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача B_{ab} . Найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), непрерывное со своими производными в замкнутой области \bar{D} и удовлетворяющее условиям (5)-(7) и

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{\sigma_2} = \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_2,$$

где $\varphi_2(x, y)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Переходим к исследованию задачи A_{ab} .

Единственность решения задачи A_{ab} . Положим

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in D_2. \end{cases} \quad (13)$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде двух систем

$$\left. \begin{aligned} u_{1xx} + u_{1yy} &= v_1(x, y), \\ av_{1x} + bv_{1y} &= 0, \end{aligned} \right\} (x, y) \in D_1, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{2xx} - u_{2yy} &= v_2(x, y), \\ av_{2x} + bv_{2y} &= 0, \end{aligned} \right\} (x, y) \in D_2, \quad (15)$$

где $v_j(x, y)$ ($j=1, 2$) – произвольные достаточно гладкие функции.

Нетрудно заметить, что общее решение уравнения $av_{jx} + bv_{jy} = 0$, имеет вид

$$v_j(x, y) = \omega_j(bx - ay), \quad (j=1, 2), \quad (16)$$

где $\omega_j(bx - ay)$ – произвольные непрерывно - дифференцируемая функция, причем

$$\omega_1(A) = \omega_1(N) = 0, \quad (17)$$

где N – точка, принадлежащая кривой σ , в которой $ax_n + by_n = 0$. Кроме того имеет место:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \omega_1(bx - ay) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \omega_2(bx - ay).$$

Как нам известно, что решение задачи Коши с условиями

$$u_2(x, -0) = \tau_2(x), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad u_{2y}(x, -0) = v_2(x), \quad (x, 0) \in J, \quad (18)$$

для уравнения (15) с учетом (16) в области D_2 имеет вид:

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2} [\tau_2(x+y) + \tau_2(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} v_2(\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_{x-y}^{x+y} d\xi \int_{\xi}^{x-y} \omega_2 \left(\frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \eta \right) d\eta. \quad (19)$$

Поставляя (19) в (6), (7) и (8) получаем

$$\begin{aligned} & \tau_2(0) + \tau_2(x) - \int_0^x v_2(\xi) d\xi - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{\xi}^x \omega_2 \left(\frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \eta \right) d\eta = 2\psi_1 \left(\frac{x}{2} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial n} \right|_{AC} = \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \Big|_{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] \Big|_{y=-x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tau_2'(0) + \nu_2(0) - \frac{1}{2} \int_{2x}^0 \omega_{21} \left(\frac{b+a}{2} \eta \right) d\eta \right\} = \psi_2(x),$$

$$\frac{\partial u_2(x, y)}{\partial n} \Big|_{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] \Big|_{y=x-1} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tau_2'(1) - \nu_2(1) - \frac{1}{2} \int_{2x-1}^1 \omega_{22} \left(\frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \right) d\xi \right\} = \psi_3(x),$$

или

$$\int_{2x}^0 \omega_{21} \left(\frac{b+a}{2} \eta \right) d\eta = -2\sqrt{2}\psi_2(x) + 2\tau_2'(0) + 2\nu_2(0), \tag{21}$$

$$\int_{2x-1}^1 \omega_{22} \left(\frac{b-a}{2} \xi + \frac{a+b}{2} \right) d\xi = 2\sqrt{2}\psi_3(x) - 2\tau_2'(1) + 2\nu_2(1), \tag{22}$$

где $\omega_2(x) = \omega_{21}(x) + \omega_{22}(x)$.

Дифференцируя (20), (21) и (22) по x с учетом (3), находим

$$\tau_2'(x) - \nu_2(x) = p(x), \quad (x, 0) \in J, \tag{23}$$

$$\omega_{21}(z) = \sqrt{2}\psi_2' \left(\frac{z}{a+b} \right), \quad z = bx - ay, \quad 0 \leq z \leq \frac{a+b}{2}, \tag{24}$$

$$\omega_{22}(z) = -\sqrt{2}\psi_3' \left(\frac{z-a}{b-a} \right), \quad z = bx - ay, \quad \frac{a+b}{2} \leq z \leq b, \tag{25}$$

где

$$p(x) = \psi_1' \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \int_0^x \omega_2 \left(\frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} x \right) d\xi.$$

Если выполнены условия (9) и (10), то функции $\omega_2(z)$ и $\omega_2'(z)$ будут непрерывными в точках прямой $bx - ay = \frac{a+b}{2}$, т.е. уравнение (1) при $y < 0$ выполняется в точках этой прямой.

Теорема 1. Если $\varphi(x, y) \equiv 0, \forall (x, y) \in \bar{\sigma}, \psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv 0, \forall x \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$, и $\psi_3(x) \equiv 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, то решение задачи A_{ab} в области D единственно.

Доказательство. Докажем теорему 1 на основании энергетических тождеств и принципа экстремума. Пусть $u(x, y)$ трижды непрерывно дифференцируемое решение однородной задачи A_{ab} в области D_1 и D_1^ε , здесь D_1^ε - область с границей $\partial D_1^\varepsilon = \bar{J}^\varepsilon \cup \bar{\sigma}^\varepsilon$, строго лежащей в области D_1 , ε - достаточно малое положительное число.

Умножим уравнение (1) при $y > 0$ на $u(x, y)$ с учетом тождество

$$u \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_{xx} + u_{yy}) = \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) (uu_{xx} + uu_{yy}) - \frac{1}{2} \left[\left(a \frac{\partial}{\partial x} - b \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_x^2 - u_y^2) + 2 \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u_x u_y \right]$$

и интегрируя, по области D_1^ε , получим

$$\iint_{D_1^\varepsilon} u \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_{xx} + u_{yy}) dx dy = \iint_{D_1^\varepsilon} \left\{ \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) (u u_{xx} + u u_{yy}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\left(a \frac{\partial}{\partial x} - b \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_x^2 - u_y^2) + 2 \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) u_x u_y \right] \right\} dx dy = 0. \quad (26)$$

Применяя формулу Грина к интегралу (26), имеем

$$\int_{\bar{J}^\varepsilon \cup \bar{\sigma}^\varepsilon} \left[a(u u_{xx} + u u_{yy}) - \frac{a}{2}(u_x^2 - u_y^2) - b u_x u_y \right] dy - \left[b(u u_{xx} + u u_{yy}) + \frac{b}{2}(u_x^2 - u_y^2) - a u_x u_y \right] dx = 0.$$

Отсюда переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, а также учитывая условия теоремы 1 и $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$, получим

$$\frac{b}{2} \int_0^1 \tau_1'^2(x) dx + (a+b) \int_0^1 \tau_1'(x) \nu_1(x) dx + \frac{b}{2} \int_0^1 \nu_1^2(x) dx - \\ - \frac{1}{2} \int_\sigma \left[(a y_n + b x_n) u_{1x}^2 + (b y_n - a x_n) u_{1x} u_{1y} - (a y_n + b x_n) u_{1y}^2 \right] ds = 0, \quad (27)$$

где s - длина дуги кривой σ - отсчитываемая от точки $B(1, 0)$,

$$\tau_1(x) = u_1(x, +0), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad \nu_1(x) = u_{1y}(x, -0), \quad (x, 0) \in J. \quad (28)$$

Так как $u_1(x, y) = 0$ на σ , то $\frac{\partial u_1(x, y)}{\partial s} = 0$ на σ , поэтому на границе σ области D_1 выполняются равенства

$$u_{1x} = u_{1n} x_n, \quad u_{1y} = u_{1n} y_n. \quad (29)$$

В силу равенств $x_n = y_s, \quad y_n = -x_s$ из выражения (27) имеем

$$\frac{b}{2} \int_0^1 \tau_1'^2(x) dx + (a+b) \int_0^1 \tau_1'(x) \nu_1(x) dx + \frac{b}{2} \int_0^1 \nu_1^2(x) dx - \frac{1}{2} \int_\sigma u_n^2 (a x_s + b y_s) (x_s^2 + y_s^2) ds = 0.$$

Отсюда, учитывая условия теоремы 1, получим

$$\frac{b}{2} \int_0^1 \tau_1'^2(x) dx + (a+b) \int_0^1 \tau_1'(x) \nu_1(x) dx + \frac{b}{2} \int_0^1 \nu_1^2(x) dx = 0. \quad (30)$$

Теперь докажем, что выражение $I = \int_0^1 \tau_1'(x) \nu_1(x) dx$ неотрицательно.

Принимая во внимание $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv \psi_3(x) \equiv 0$ с учетом (23) и условия склеивания из последнего выражение имеем

$$I = \int_0^1 \tau_1'(x) \nu_1(x) dx = \int_0^1 \tau_1'^2(x) dx \geq 0. \quad (31)$$

Из (30) и (31) с учетом $a > 0, \quad b > 0, \quad \tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$ следует, что

$$\tau_1(x) = 0, \quad \nu_1(x) = 0, \quad (x, 0) \in \bar{J}. \quad (32)$$

Тогда согласно принципу экстремума для эллиптических и гиперболических уравнений [15] с учетом (32) заключаем, что, задача A_{ab} с нулевыми граничными условиями, не имеет отличного от нуля решения в области \bar{D} , т.е. $u(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \bar{D}$.

Тем самым, решение задачи A_{ab} единственно.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если выполнены условия (3), (9) - (12), то в области D регулярное решение задачи A_{ab} существует.

Доказательство. Решение уравнения (14) с учетом (16) удовлетворяющее условиям

$$v(x, y)|_{\sigma} = \varphi(x, y) - \omega_1(bx - ay), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}, \quad v_y(x, +0) = v_1(x) - a\omega'_1(bx), \quad x \in (-1, 1), \quad (33)$$

для нормальной области D_1 выражается формулой

$$v(x, y) = \int_{-1}^1 G(t, 0; x, y) v_1(t) dt + \Phi(x, y), \quad (34)$$

где

$$\Phi(x, y) = \int_{\sigma_0} \frac{\partial G(\xi(s), \eta(s); x, y)}{\partial n} \left[\varphi^*(s) - \omega_1(b\xi(s) - a\eta(s)) \right] ds - a \int_{-1}^1 G(t, 0; x, y) \omega'_1(bt) dt,$$

$$\varphi^*(s) = \varphi(\xi(s), \eta(s)), \quad \omega_1(x) = \omega_{21}(x) + \omega_{22}(x),$$

а $G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \left[-\ln r_1 + \ln \rho^2 r_2 r_3 \right]$ - функция Грина задачи N [3] для уравнения

$v_{xx} + v_{yy} = 0$, удовлетворяющая однородному условию (5) и $v_y(x, +0) = 0$;

$$\sigma_0: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y + \eta)^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2,$$

$$r_2^2 = (\bar{x} - \xi)^2 + (\bar{y} - \eta)^2, \quad r_3^2 = (\bar{x} - \xi)^2 + (\bar{y} + \eta)^2, \quad \bar{x} = x/\rho^2, \quad \bar{y} = y/\rho^2.$$

Положив в (34) $y = 0$ с учетом $v(x, +0) = \tau_1(x) - \omega_1(bx)$, а затем, дифференцируя по x , получим

$$\tau'_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt} \right] v_1(t) dt + \Phi_1(x), \quad (x, 0) \in J, \quad (35)$$

где

$$\Phi_1(x) = \Phi'_1(x, 0) + b\omega'_1(bx). \quad (36)$$

Формула (34) дает второе соотношение между $\tau'_1(x)$ и $v_1(x)$ принесённое из области D_1 на J .

Исключив $\tau'_1(x)$ из (23) и (35) с учетом условия склеивания получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $v_1(x)$:

$$\tilde{v}_1(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right] \tilde{v}_1(t) dt = \Phi_2(x), \quad (x, 0) \in J, \quad (37)$$

где $\tilde{v}_1(x) = (1+x)v_1(x)$,

$$\Phi_2(x) = (1+x) [\Phi_1(x) - p(x)]. \quad (38)$$

Переходя к вопросу о разрешимости сингулярного интегрального уравнения (37). Учитывая (11), (12), (24), (25) из (38), нетрудно убедиться, что функция $\Phi_2(x) \in C^2(-1, 1)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $x \rightarrow 1$, а при $x \rightarrow -1$, ограничена. Индекс интегрального уравнения (37) равен нулю в классе $h(-1)$ [16], т.е. в классе функций ограниченных при $x \rightarrow -1$ и неограниченных при $x \rightarrow 1$.

Таким образом, решение $\tilde{v}_1(x)$ уравнения (37) ищем в классе $h(-1)$.

Сингулярное интегральное уравнение (37) известным методом регуляризации Карлемана – Векуа [16] сведем к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода относительно $\tilde{v}_1(x)$, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи A_{ab} .

Таким образом, после определения $v_j(x) \in C^2(J)$, $\tau_j(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$ и $\omega_j(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$ из (16_j), (21)-(23) решение задачи A_{ab} можно восстановить в области D_1 как решение задачи N с условиями (2) и $u_{1y}(x, +0) = v_1(x)$, $x \in (-1, 1)$ для уравнения (14) (см.(34)). А в области D_2 находится с помощью решения задачи Коши для уравнения (15) (см. (19)). Из последнего следует, что в области D регулярное решение задачи A_{ab} существует.

Теорема 2 доказана.

Этим завершается исследование задачи A_{ab} для уравнения (1) в случае **I**.

Замечание. Пусть выполнены условия (4), тогда аналогично рассуждая, как и в случае задачи A_{ab} , можно доказать однозначную разрешимости задачи B_{ab} .

Литература

1. Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. К теории уравнений смешанно-составного типа. // "Сибирский математический журнал". Новосибирск. 1961. Т.2. № 1. С. 7-19.
2. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент. Фан. 1974. 156 с. <https://search.rsl.ru/ru/record/01007433443>
3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: Фан. 1979. 240 с. <https://www.twirpx.com/file/760814/>.
4. Chen S.X. Mixed type equations in gas dynamics. // Quart. Appl. Math. 2010. LVXIII (3). pp. 487-511. <https://doi.org/10.1155/2018/3931297>.
5. Кожанов А.И. Смешанная задача для некоторых классов нелинейных уравнений третьего порядка. // Матем. Сборник. 1982. 118(160): 4(8). С. 504–522. <http://dx.doi.org/10.1070/SM1983v046n04ABEH002949>.
6. Джураев Т.Д., Мамажанов М. О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка парабола-гиперболического типа. // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 37-50. MR688055.
7. Базаров Д. Об аналоге задачи Бицадзе-Самарского для парабола-гиперболического уравнения третьего порядка. // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. № 1. С. 21-27.
8. Мамажанов М., Халмуратов Д., Краевые задачи для парабола-гиперболических уравнений третьего порядка с нехарактеристической линией изменения типа. // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 2. С. 271-275.
9. Джохадзе О.М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Мат. заметки. 2003. Т.74. Вып.4.С. 517-528.
10. Сабитов К.Б., Удалова Г.Ю. Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с условиями периодичности. // Вестник Самарский гос. техн. ун-та. СГТУ. Сер. Физ. мат. науки. 2013. В. 3(32). С. 29–45. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1220>.
11. Карачик В.В. Задача Коши и Гурса для уравнения 3-го порядка. // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математика. Механика. Физика" 2015. Т. 7. № 2. С.31-43. eLIBRARYID 23142245.
12. Зикиров О.С. Об одной задаче типа Дирихле для уравнения составного типа. // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математика. Механика. Физика" 2016. Т. 8. № 2. С.19-26. DOI: 10.14529 / mmp 160203.
13. Иргашев Б.Ю. Краевая задача для вырождающегося уравнения третьего порядка. // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математика. Механика. Физика" 2016. Т. 8. № 2. С.27-35. DOI: 10.14529 / mmp 160204.
14. Islomov B. I., Usmonov B. Nonlocal boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type. // " Lobachevski Journal of Mathematics". 2020. Vol. 41. № 1. pp. 32-38. DOI: 10.1134/S1995080220010060.
15. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: «Наука». 1981. 448 с. https://www.studmed.ru/bicadze-av-nekotorye-klassy-uravneniy-v-chastnyh-proizvodnyh_5f371e781b6.
16. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 512 с.

УДК: 534.3 С 217

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА ОБТЕКАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ПРОФИЛЯ

Р.Сафаров

*Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт**E-mail: safarov-raxmon@mail.ru*

Аннотация. В работе разработанный алгоритм идентификации развиваются в практическом аспекте - рассматривается аддитивный метод самоорганизации, использующий как исходную информационную выборку, так и трансформацию ее на последовательных уровнях селекции. Преимущество аддитивного метода-существенная экономия памяти ЭВМ, применяемой для записи всего текущего объема информации. По-видимому, повышается и качество модели, так как при этом используется самоорганизация информации, для каждой последовательной части модели.

Ключевые слова: алгоритм, идентификация, аддитивный метод, селекция, самоорганизация.

Tebranuvchi profilning supersonik oqimi atrofidagi oqim parametrlarini identifikatsiyalash

Annotatsiya. Ishda ishlab chiqilgan identifikatsiya algoritmi amaliy jihatdan rivojlantirildi - o'z-o'zini tashkillashtirishning additiv usuli boshlang'ich axborot tanlanmasi kabi qaraladi va u ketma-ket yuksalish seleksiyasi bilan almashtiriladi. Additiv usulning qulayligi barcha hajmdagi axborotni yozishda ENM хотirasini sezilarli darajada iqtisod qiladi. Modelning har bir ketma-ket qismi uchun foydalanilayotgan o'z-o'zini tashkillashtirish usulida, axborotni o'z-o'zini tashkillashtirishni qo'llasa, modelning sifati oshganligi ko'rinadi.

Kalit so'zlar: algoritim, identifikatsiya, additiv usul, seleksiya (tanlash), o'z-o'zini tashkillashtirish.

Identification of the parameters of the process of flow around a supersonic flow of an oscillating profile

Abstract. In the work, the developed identification algorithm is developed in a practical aspect; an additive method of self- organization is considered, using both the initial information sample and its transformation at successive selection levels. The advantage of the additive method is a significant saving in computer memory used to record the entire current amount of information. Apparently, the quality of the model also improves, since it uses the self-organization of information for each sequential part of the model.

Keywords: algorithm, identification, additive method, selection, self-organization.

В работе рассматривается аддитивный метод самоорганизации, использующий как исходную информационную выборки, так и трансформация ее на последовательных уровнях селекции. Тем самым очередной уровень селекции становится соответственным начальным уровнем селекции, который может быть продолжен как в обычном методе самоорганизации, так и в предложенном нами аддитивном методе самоорганизации.

Рассмотрим применение предложенного алгоритма для получения модели идентификации. В качестве аэродинамической характеристики использован отход ударной волны $\bar{\Delta}$. Основные влияющие на функцию отклика факторы-следующие: X_1 -число Маха M_∞ , X_2 -относительное расстояние от нижней кромки профиля до экрана \bar{H} , X_3 - угол атаки профиля α , X_4 -относительная толщина профиля C . Процесс построения модели состоит из трех этапов. На первом этапе рассмотрена линейная часть модели. На втором-квадратичная часть и на третьем-нелинейная часть.

Для достижения полученной обусловленности матриц, эксперименты проводились методом рототабельного центрального композиционного планирования.

На первом этапе линейная модель имеет вид

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^4 a_i X_i$$

На первом ряде селекции получим шесть комбинаций (из четырех по два) линейных полиномов. Частный полином можно записать в виде:

$$\begin{aligned} Y_{1i} &= a_{0i} + a_{1i}X_1 + a_{2i}X_{i+1}, i = \overline{1,3}, \\ Y_{2i+2} &= a_{0i+3} + a_{1i+3}X_2 + a_{2i+3}X_{i+2}, i = \overline{1,2}, \\ Y_{34} &= a_{06} + a_{16}X_3 + a_{26}X_4. \end{aligned}$$

Для определения коэффициентов $a_{0i}, a_{1i}, a_{2i}, (i = \overline{1,6})$ составляем систему условных уравнений в виде

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N y_{ij}^k - a_0 N - a_i \sum_{k=1}^N X_{ik} - a_j \sum_{k=1}^N X_{jk} = 0 \\ \sum_{k=1}^N y_{ij}^k X_{ik} - a_0 \sum_{k=1}^N X_{ik} - a_i \sum_{k=1}^N X_{ik}^2 - a_j \sum_{k=1}^N X_{jk} X_{ik} = 0 \\ \sum_{k=1}^N y_{ij}^k X_{jk} - a_0 \sum_{k=1}^N X_{jk} - a_i \sum_{k=1}^N X_{ik} X_{jk} - a_j \sum_{k=1}^N X_{jk}^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где $i = \overline{1, n}, j = \overline{i + 1, n}$.

Система уравнения решается методом Гаусса. Среднеквадратическая ошибка вычисляется по формуле

$$\delta_s^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_{ijk}^3 - y_{ijk}^p)^2, s = \overline{1, C_n^2} \quad (2)$$

где y_{ijk}^3 – экспериментальные значения в i -й точке;

y_{ijk}^p – расчетное значение частных описаний;

δ_s^2 – среднеквадратическая ошибка последовательности моделей.

Будем постепенно повышать сложность частных и полного уравнений регрессии и проследим при этом характер изменения среднеквадратичной ошибки.

Первый этап построения модели-на первом ряде селекции получены следующие коэффициенты, и соответственно, среднеквадратичные отклонения (табл. 1).

Табл. 1.

I	a_{0i}	a_{1i}	a_{2i}	δ_i^2
1	1.6316	-0.3005	0.0847	0.4017
2	1.7807	-0.0256	-0.4017	0.5443
3	1.5347	-0.4791	0.0654	0.4358
4	1.5757	0.0723	-0.5428	0.4367
5	1.4079	0.0353	0.0166	0.5496
6	1.4788	-0.6092	0.0439	0.4181

$$\delta_{cp}^2 = 0.4728$$

На следующем ряде селекции пропускаются те переменные, которые удовлетворяют условию

$$\delta_i^2 < \delta_{cp}^2, i = \overline{1,6}$$

Среди полученных переменных, удовлетворяющих критерию Y_{14}, Y_{23}, Y_{34} .

На втором ряде селекции получены при комбинации (из трех по два) линейных полиномов

$$Z_{14-23} = b_{01} + b_{11}Y_{14} + b_{21}Y_{23}, Z_{14-34} = b_{02} + b_{12}Y_{14} + b_{22}Y_{34},$$

$$Z_{23-34} = b_{03} + b_{13}Y_{23} + b_{23}Y_{34}.$$

Получены численные значения табл. 2

Табл. 2.

I	b_{0i}	b_{1i}	b_{2i}	δ_i^2
1	-1.5231	0.9629	0.9626	0.2621
2	-0.7688	0.7151	0.7521	0.3343
3	-0.2774	0.5173	0.6512	0.3931

$$\delta_{cp}^2 = 0.3298$$

Из полученных результатов видно, что только Z_{14-23} удовлетворяют критерию (2).

Тогда

$$Z_{14-23} = b_{01} + b_{11}Y_{14} + b_{21}Y_{23}$$

$$Y_{14} = a_{03} + a_{13}X_1 + a_{23}X_4, Y_{23} = a_{04} + a_{14}X_2 + a_{24}X_3$$

$$Z_{14-23} = b_{01} + b_{11}a_{03} + b_{21}a_{04} + b_{11}a_{13}X_1 + b_{21}a_{14}X_2 + b_{21}a_{24}X_3 + b_{11}a_{23}X_4$$

$$a_0 = b_{01} + b_{11}a_{03} + b_{21}a_{04} = 1.4714, a_1 = b_{11}a_{13} = -0.4614$$

$$a_2 = b_{21}a_{14} = 0.0696, a_3 = b_{21}a_{24} = -0.5224, a_4 = 0.063$$

На первом этапе получена линейная модель.

$$U = 1.471 - 0.4614X_1 + 0.0696X_2 - 0.5224X_3 + 0.063X_4.$$

Второй этап построения модели.

На первом ряде селекции получены следующие коэффициенты, соответственно со среднеквадратическими отклонениями (табл.3).

Табл. 3.

I	a'_{0i}	a'_{1i}	a'_{2i}	δ_i^2
1	0.1232	-0,0622	-0.0005	0.2443
2	0.0951	-0.0653	0.0343	0.2436
3	0.136	-0.0547	-0.0003	0.2433

4	0.017	-0.0013	0.0424	0.2559
5	0.0833	-0.0006	-0.0005	0.2512
6	0.0511	0.0428	-0.0006	0.2501

$$\delta_{cp}^2 = 0.2479$$

На втором ряде селекции (табл. 4.)

Табл. 4.

I	b'_{0i}	b'_{1i}	b'_{2i}	δ_i^2
1	0	0.3228	0.6991	0.2434
2	0	0.0825	0.9265	0.2423
3	0	0.3647	0.6831	0.2418

$$\delta_{cp}^2 = 0.2425$$

На третьем ряде селекции $c_{01} = 0, c_{11} = -0.1206, c_{12} = 1.1182, \delta^2 = 0.2418$

$$v_{1214-1324} = c_{01} + c_{11}z_{12-14} + c_{21}z_{13-14},$$

$$z_{12-14} = b'_{02} + b'_{12}y_{12} + b'_{22}y_{14}, z_{13-14} = b'_{03} + b'_{13}y_{13} + b'_{23}y_{14}$$

$$y_{1i+1} = a'_{0i} + a'_{1i}\bar{X}_1 + a'_{2i}\bar{X}_{i+1}, i = 1,3$$

$$v_{1214-1314} = c_{11}b_{12}a_{01} + c_{11}b_{22}a_{03} + c_{21}b_{13}a_{02} + (c_{11}b_{12}a_{11} + c_{11}b_{22}a_{13} + c_{21}b_{13}a_{13} + c_{21}b_{23}a_{13})\bar{X}_1 + (c_{11}b_{12}a_{21} + c_{11}b_{22}a_{23})\bar{X}_2 + c_{21}b_{13}a_{23}\bar{X}_3 + c_{21}b_{23}a_{23}\bar{X}_4$$

На втором этапе получена модель

$$\bar{Y}'_0 = 0.0224 - 0.0617X_1^2 + 0.014X_2^2 - 0.0002X_4^2, \delta^2 = 0.2418.$$

Третий этап построения модели.

На первом ряде селекции получим следующие коэффициенты, соответственно с среднеквадратическими отклонениями (табл. 5).

Табл. 5.

i	a''_{0i}	a''_{1i}	δ_i^2
1	0.0313	-0.0063	0.2392
2	0.0462	-0.1074	0.2348
3	0.0164	-0.0013	0.2414
4	0.0750	-0.0440	0.2138
5	0.0512	-0.0011	0.2345
6	0.0793	-0.0186	0.2223

$$\delta_{cp}^2 = 0.2310$$

Во втором ряде селекции $b''_{01} = 0.0921, b''_{11} = -6.1055, \delta^2 = 0.195$

На третьем этапе получена модель

$$\bar{Y} = 0.0558 + 0.0213X_2X_3 + 0.0085X_3X_4 - 0.005X_2X_3^2X_4$$

И так модель идентификации объекта

$$y = 1.549 - 0.4614X_1 + 0.069X_2 - 0.5224X_3 + 0.063X_4 - 0.0617X_1^2 + 0.014X_2^2 - 0.0002X_4^2 + 0.0213X_2X_3 + 0.0085X_3X_4 - 0.005X_2X_3^2X_4.$$

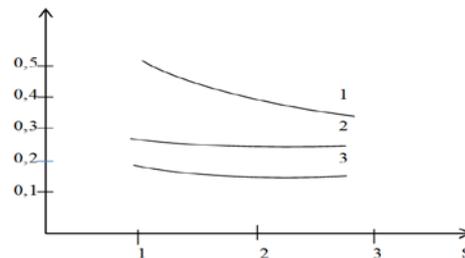


Рис.1. Зависимость среднеквадратической ошибки от числа рядов селекции

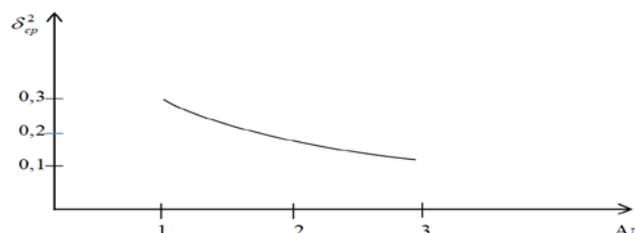


Рис.2. Зависимость среднеквадратической ошибки от числа аддитивности процесса

Зависимость среднеквадратической ошибки от числа рядов селекции на первом (кривая 1), втором (кривая 2), и третьем этапах (кривая 3), приведены на рис. 1, а зависимость среднеквадратической ошибки от числа аддитивности приведена на рис. 2.

Таким образом разработана методика построения нелинейных многопараметрических математических моделей и использованы при моделировании и идентификации параметров процесса обтекания сверхзвуковым потоком колеблющегося профиля.

Литература

1. Ивахненко А.Г., Зайченко Р.Г., Димитров В.Д. Принятие решения на основе самоорганизации. М., Сов. Радио, 1976. 280 с.
2. Богусловский И.А., Круглянова О.В., Мирошичев Н.Я., Цымбалюк Г.М. Алгоритм идентификации параметров динамической системы летательного аппарата. М. Известия РАН. Теория и системы управления. 2009, №3, с. 3-15
3. Сафаров Р. Аддитивный алгоритм самоорганизации. СамГУ Научный вестник. Аниқ фанлар серияси. №3(115), 2019, с. 4-8.

УДК: 513 О 955

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

З.Х.Очилов

Самаркандский государственный университет

E-mail: zarifjonochilov@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается новый класс задач интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида. Доказано теорема единственности решения, получены оценки устойчивости и формула обращения в пространствах Соболева, тем самым показана слабая некорректность решения задача интегральной геометрии.

Ключевые слова. Задача интегральной геометрии, слабая и сильная некорректность, единственность и устойчивость.

Uniqueness of solution the problem of integral geometry of volterra type with a weight function of a special type

Annotation. A new class of Volterra type integral geometry problems with a special-weight function is considered. Theorem of uniqueness of a solution are proved, stability estimates and the inversion formula in Sobolev spaces are obtained, thereby showing the weak incorrectness of the solution of the integral geometry problem.

Keywords. The problem of integral geometry, weak and strong incorrectness, uniqueness and stability

Махсус кўринишдаги вазн функцияли волтерра типдаги интеграл геометрия масаласи ечимининг ягоналиги

Аннотация. Бу ишда махсус кўринишдаги вазн функцияли волтерра типдаги интеграл геометрия масалаларининг янги синфи қаралган. Интеграл геометрия масаласи ечимининг мавжудлиги теоремаси исботланган, Соболев фазоларида турғунлик баҳоси ва тескариланиш формулалари олинган бўлиб, интеграл геометрия масаласи кучсиз ноқоррект масала эканлиги кўрсатилган.

Калит сўзлар: интеграл геометрия масалалари, кучли ва кучсиз ноқорректлик, ягоналик ва турғунлик.

ВВЕДЕНИЕ

Интегральная геометрия – это интенсивно развивающаяся область современной математики. Она является одним из крупных направлений в теории некорректных задач математической физики и анализа.

Задачами интегральной геометрии вольтерровского типа называются задачи, которые могут быть сведены к исследованию операторных уравнений вольтерра в смысле определения, данного М.М. Лаврентьевым [1].

Достаточно общие результаты по единственности и устойчивости решения задач интегральной геометрии в случае, когда многообразия, по которым ведется интегрирование, имеют вид параболоидов, весовые функции и многообразия инвариантны относительно группы всех движений вдоль фиксированной гиперплоскости, получены В.Г. Романовым [3].

Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [9-14]. Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями вершинах получены в [15-18].

Единственность решения значительно более широких классов задач интегральной геометрии в полосе, рассматриваемых как сильно некорректные, была установлена В.Г. Романовым (см.[4]). В работах А.Л. Бухгейма [5,6] получены формулы обращения для задачи восстановления функции через интегралы от неё по параболоидам в полупространстве $y > 0$, причем формула обращения, приведенная в [5], содержит только конечное число производных от данных. В [6] с помощью техники шкал банаховых пространств доказана теорема единственности решения задачи интегральной геометрии в полосе на параболах с весовой функцией, аналитической по части переменных.

В своей работе [2] М.М. Лаврентьев показал единственность решения сильно некорректной задачи интегральной геометрии в полосе на параболах с возмущением достаточно общего вида.

В работах [7-8] рассматриваются некоторые классы возмущенных полусингулярных интегральных уравнений в трехмерном пространстве, возникающие при исследовании ряда задач интегральной геометрии. Здесь доказаны теоремы единственности и в слабо некорректном случае теорема существования решения таких уравнений.

В статье рассматривается задача интегральной геометрии с весовой функцией специального вида по полуплоскости $y > 0$. Доказаны теоремы единственности решения в классе гладких финитных функций, получены оценки устойчивости решения задачи в пространствах Соболева, что показывает её слабую некорректность, а также формулы обращения.

Основная часть

Пусть G - множество ограниченных функций $g(\cdot)$, определенных на R^1 и удовлетворяющих следующим условиям:

I. Функция $I(\cdot, \cdot)$ определена на $R \times C$ по формуле

$$I(\lambda, p) = \int_0^{\infty} [e^{i\lambda h} g(h) - e^{-i\lambda h} g(-h)] e^{-ph} dh, \quad (1)$$

непрерывна на $R \times C$ такое, что $I(\lambda, p)$ отлична от нуля для всех $\lambda \in R$ с $\text{Re } p > 0$;

II. Существуют числа $n, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ такие, что

$$\left| \frac{1}{I(\lambda, p)} \right| \leq C(|p|^n + |\lambda|^m) \quad (2)$$

для всех $\lambda \in R$ и $\text{Re } p > 0$.

Замечание. Отметим, что множество G не пусто. Например, если функция $g(\cdot)$ имеет вид

$$g(h) = \begin{cases} a_1 e^{-kh}, & \text{при } h \geq 0, \\ -a_1 e^{kh}, & \text{при } h < 0, \end{cases}$$

$a_1 k > 0$, то

$$I(\lambda, p) = 2a_1 \int_0^{\infty} e^{-(p+k)h} \cos(\lambda h) dh = 2 \frac{a_1 (k+p)}{(k+p)^2 + \lambda^2} \neq 0 \quad (3)$$

для всех $\lambda \in R$ и $\text{Re } p \geq 0$.

Отсюда имеем:

$$|I(\lambda, p)| \geq \frac{1}{|p| + \lambda^2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{|I(\lambda, p)|} \leq (|p| + \lambda^2)N \tag{4}$$

т.е. в формуле (1) $C = N, n = 1, m = 2, p = 0, g \in G$.

Таким образом мы показали справедливость формулы (1).

Введем обозначения

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R^1, x_2 \in (0, l), l < \infty\},$$

$$\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R^1, x_2 \in [0, l]\}.$$

В полосе $\bar{\Omega}$ рассматривается семейство ломанных $P(x_1, x_2)$, которое однозначно

параметризуются с помощью координат своих вершин $(x, y) \in \bar{\Omega}$:

$$P(x_1, x_2) = \{(\xi_1, \xi_2) : (x_1 - x_2) + (\xi_2 - \xi_1) = 0, 0 \leq \xi_2 \leq x_2, x_1 - x_2 \leq \xi_1 \leq x_1\} \cup$$

$$\cup \{(\xi_1, \xi_2) : (x_1 + x_2) - (\xi_2 + \xi_1) = 0, 0 \leq \xi_2 \leq x_2, x_1 \leq \xi_1 \leq x_1 + x_2\}.$$

Задача А. Определить функцию двух переменных $u(x_1, x_2)$ если для всех $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$ известны интегралы от функции $u(x_1, x_2)$ по ломанным $P(x_1, x_2)$:

$$\int_{x_1-x_2}^{x_1} g(x_1 - \xi_1)u(\xi_1, \xi_1 + x_2 - x_1)d\xi_1 + \int_{x_1}^{x_1+x_2} g(x_1 - \xi_1)u(\xi_1, x_1 + x_2 - \xi_1)d\xi_1 = f(x_1, x_2), \tag{5}$$

где $g(x_1 - \xi_1)$ - весовая функция из множества G .

Через U определим класс функции $u(\cdot)$, которые имеют все непрерывные частные производные до $(n + m + 4)$ -го порядка включительно и финитны с носителем в R_+^2 :

$$\text{supp } u \subset D = \{(x_1, x_2) : -a < x_1 < a, 0 < x_2 < l\}$$

где $0 < a < \infty, l < \infty$.

Введем следующие функции

$$I_1(\lambda, x_2 - \xi_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{p(x_2-\xi_2)} \frac{dp}{p^{n+2} I(\lambda, p)}, \tag{6}$$

$$I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda(x_1-\xi_1)} \frac{I_1(\lambda, h)}{1 + \lambda^{m+2}} d\lambda. \tag{7}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ известна для всех $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$. Тогда решение задачи А в классе U единственно и имеет место представление если $m = 4j, j = 0, 1, 2, \dots$

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \left[\frac{\partial^{n+2}}{\partial \xi_2^{n+2}} + \frac{\partial^{n+m+4}}{\partial \xi_1^{m+2} \partial \xi_2^{n+2}} \right] f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \tag{8}$$

если $m = 4j + 2, j = 0, 1, 2, \dots$

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \left[\frac{\partial^{n+2}}{\partial \xi_2^{n+2}} - \frac{\partial^{n+m+4}}{\partial \xi_1^{m+2} \partial \xi_2^{n+2}} \right] f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \tag{9}$$

кроме того выполняется неравенство

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C_0 \|f\|_{W_2^{m+2, n+2}(\Omega)}$$

где C_0 — некоторая постоянная.

Доказательство теоремы 1.

В результате, перейдя в (5) к интегрированию по $d\xi_2$,

получим:

$$\int_0^{x_2} g(x_2 - \xi_2)u(x_1 - x_2 + \xi_2, \xi_2)d\xi_2 - \int_0^{x_2} g(\xi_2 - x_2)u(x_1 + x_2 - \xi_2, \xi_2)d\xi_2 = f(x_1, x_2)$$

или

$$\int_0^{x_2} g(h)u(x_1 - h, \xi_2)dh - \int_0^{x_2} g(-h)u(x_1 + h, \xi_2)dh = f(x_1, x_2) \tag{10}$$

где $h = x_2 - \xi_2$.

Применяя преобразование Фурье по переменной x к обеим частям уравнения (10) получим:

$$\hat{f}(\lambda, x_2) = \int_0^{x_2} [e^{i\lambda h} g(h) - e^{-i\lambda h} g(-h)] \hat{u}(\lambda, y - h) dh. \tag{11}$$

Таким образом, $\hat{f}(\lambda, x_2)$ является функцией оригиналом. Поэтому согласно к обеим частям уравнения (5), а также уравнения (11), можно применять преобразование Лапласа по y .

Применим к уравнению (11) преобразование Лапласа по переменной x_2 . Используя, теорему Фубини имеем:

$$\tilde{\hat{f}}(\lambda, p) = \tilde{\hat{u}}(\lambda, p) \int_0^{x_2} [e^{i\lambda h} g(h) - e^{-i\lambda h} g(-h)] e^{-ph} dh$$

Далее учитывая (1) получаем следующее уравнение:

$$\tilde{\hat{u}}(\lambda, p) I(\lambda, p) = \tilde{\hat{f}}(\lambda, p)$$

Поскольку $g \in G$ то

$$I(\lambda, p) \neq 0, \quad \lambda \in R, \quad \text{Re } p \geq 0.$$

Поэтому можно до множить обе части уравнения на $\frac{1}{I(\lambda, p)}$, т.е.

$$\tilde{\hat{u}}(\lambda, p) = \frac{1}{I(\lambda, p)} \tilde{\hat{f}}(\lambda, p) \tag{12}$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-p\xi_2} f(\lambda, p) d\xi_2,$$

переменяя метод интегрирования по частям $n + 2$ раза, учитывая, что $f(\cdot)$ финитна в $\overline{\Omega}$,

$$\int_0^{\infty} e^{-p\xi_2} f(\lambda, p) d\xi_2 = \int_0^{\infty} \frac{1}{p^{n+2}} e^{-p\xi_2} \frac{\partial^{n+2} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2^{n+2}} d\xi_2.$$

Уравнение (12) примет вид

$$\tilde{\hat{u}}(\lambda, p) = \frac{1}{p^{n+2} I(\lambda, p)} \int_0^{\infty} e^{-p\xi_2} \frac{\partial^{n+2} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2^{n+2}} d\xi_2. \tag{13}$$

Как следует из (4) функция $\frac{1}{p^{n+2}I(\lambda, p)}$ аналитично, в полуплоскости $\text{Re } p > 0$, стремится к нулю, при $|p| \rightarrow \infty$ в любой полуплоскости $\text{Re } p \geq a > 0$ равномерно относительно $\text{arg } p$ и интеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{px_2} \frac{dp}{p^{n+2}I(\lambda, p)}$$

абсолютно сходится. Следовательно (см.[2]), функция $(p^{n+2}I(\lambda, p))^{-1}$ является преобразованием Лапласа функции $I_1(\lambda, \cdot)$, точнее

$$I_1(\lambda, x_2 - \xi_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{p(x_2 - \xi_2)} \frac{dp}{p^{n+2}I(\lambda, p)}.$$

Применим к обеим частям уравнения (12) обратное преобразования Лапласа по переменной p . Используя теорему обращения и теорему о свертке, а также учитывая свойства преобразования Лапласа, имеем

$$\hat{u}(\lambda, x_2) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_1(\lambda, x_2 - \xi_2) \frac{\partial^{n+2} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2^{n+2}} e^{i\lambda \xi_1} d\xi_1 d\xi_2. \tag{14}$$

Разделим и умножим правую часть равенства (14) на $(1 + \lambda^{m+2})$:

$$\hat{u}(\lambda, x_2) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \lambda^{m+2}) I_1(\lambda, x_2 - \xi_2) \frac{\partial^{n+2} f(\xi_1, \xi_2)}{(1 + \lambda^{m+2}) \partial \xi_2^{n+2}} e^{i\lambda \xi_1} d\xi_1 d\xi_2. \tag{15}$$

В интеграле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{n+2} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2^{n+2}} e^{i\lambda \xi_1} d\xi_1,$$

применяя метод интегрирования по частям $m + 2$ раза, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{n+2} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2^{n+2}} e^{i\lambda \xi_1} d\xi_1 = \frac{1}{(i\lambda)^{m+2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{n+m+4} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2^{n+2} \partial \xi_1^{m+2}} e^{i\lambda \xi_1} d\xi_1. \tag{16}$$

Отсюда (15) примет вид

$$\begin{aligned} \hat{u}(\lambda, x_2) = & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda x_1} I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{1 + \lambda^{m+2}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{n+2} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2^{n+2}} e^{i\lambda \xi_1} d\xi_1 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{i^{m+2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{n+m+4} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2^{n+2} \partial \xi_1^{m+2}} e^{i\lambda \xi_1} d\xi_1 \right\} d\xi_2. \tag{17} \end{aligned}$$

Из (6) вытекает, что функция $I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)(1 + \lambda^{m+2})^{-1}$ является преобразованием Фурье по первой переменной функции

$$I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda(x_1 - \xi_1)} I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{1 + \lambda^{m+2}} d\lambda$$

Применяя к уравнению (17) обратное преобразование Фурье по переменной λ и используя теорему о свертке, а также свойство дифференцирования преобразования Фурье, получим:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) = & \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda x_1} I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{1 + \lambda^{m+2}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{n+2} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2^{n+2}} e^{i\lambda \xi_1} d\xi_1 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{i^{m+2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{n+m+4} f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2^{n+2} \partial \xi_1^{m+2}} e^{i\lambda \xi_1} d\xi_1 \right\} d\xi_2 d\lambda. \tag{18} \end{aligned}$$

Учитывая (7) и (16), уравнения (17) примет вид

Значит,

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \left[\frac{\partial^{n+2}}{\partial \xi_2^{n+2}} + \frac{1}{i^{m+2}} \frac{\partial^{n+m+4}}{\partial \xi_1^{m+2} \partial \xi_2^{n+2}} \right] f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (19)$$

Если $m = 4j, j = 0, 1, 2, \dots$

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \left[\frac{\partial^{n+2}}{\partial \xi_2^{n+2}} + \frac{\partial^{n+m+4}}{\partial \xi_1^{m+2} \partial \xi_2^{n+2}} \right] f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

если $m = 4j + 2, j = 0, 1, 2, \dots$

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \left[\frac{\partial^{n+2}}{\partial \xi_2^{n+2}} - \frac{\partial^{n+m+4}}{\partial \xi_1^{m+2} \partial \xi_2^{n+2}} \right] f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Формула (19) имеет локальный характер по переменной x_2 . С учетом условия $\text{supp } u \subset \Omega$ ясно, что представление (19) для решения уравнения (4) имеет место и при $l < \infty$. Тогда из (3), (12) и (19) вытекает единственность решения исходной задачи А в классе функций $C_0^2(\Omega)$.

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq 2 \|I_2\|_{L_2(\bar{\Omega})} \|f\|_{W_2^{m+2, n+2}(\Omega)} \cdot M(D) \quad (20)$$

Используя свойства дифференцирования преобразований Лапласа и Фурье, неравенство треугольника для норм, а также учитывая (19) и (20) и условия, наложенные на функцию u , получим оценку

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C_0 \|f\|_{W_2^{m+2, n+2}(\Omega)}$$

где C_0 – некоторая постоянная.

Из которой вытекает единственность решения задачи А.

Теорема 1 доказана.

Литература

1. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 1999. – 702 с.
2. Лаврентьев А.М., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1986.
3. Романов В. Г. О восстановлении функции через интегралы по эллипсоидам вращения, у которых фокус неподвижен // Докл. АН СССР. – Москва, 1967. Т. 173. – № 4. – С. 766-769.
4. Романов В. Г. О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых // Сиб. мат. журн., 1967. Т. 8. – № 5. – С. 1206-1208.
5. Бухгейм А.Л. О некоторых задачах интегральной геометрии // Сиб. мат. журн., 1972. Т. 13. – № 1. – С. 34- 42.
6. Бухгейм А.Л. Об одной задаче интегральной геометрии // Мат. проблемы геофизики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973. Вып. 4. – С. 69-73.
7. Бегматов Акбар Х. О некоторых классах полисингулярных интегральных уравнений // Сиб.мат.журн., 1994. Т. 35. –№ 3. –С. 515-519.
8. Бегматов Акбар Х. О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости // Докл. РАН. – Москва, 2009. Т. 427. – № 4. – С. 439-441.
9. Бегматов Акрам Х. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа // Доклады РАН. – Москва, 1996. Т. 349. – № 3. – С. 297-298.
10. Бегматов Акрам Х. Задачи интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве // Сиб. мат. журн., 1996. Т. 37. – № 3. – С. 500-505.
11. Бегматов Акрам Х. Новые классы слабо и сильно некорректных задач интегральной геометрии // Второй Сиб. конгресс по прикл. и инд. математике. Тез. докл., ч. III. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1996. – С. 298.

12. Бегматов Акрам Х. Некоторые новые классы задач интегральной геометрии. – Новосибирск, 1997. Препринт / РАН. Сибирское отделение. Институт математики. – № 40, 30 с.
13. Бегматов Акрам Х. Вольтерровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых с особенностями // Сиб. мат. журн., 1997. Т. 38. – № 4. – С. 723-737.
14. Бегматов Акрам Х. Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершине // Доклады РАН. – Москва, 1998. Т. 358. – № 2. – С. 151-153.
15. Бегматов Акрам Х. Теоремы существования решения двух слабо некорректных задач интегральной геометрии // Доклады РАН. – Москва, 2002. Т. 386. – № 1. – С. 1-3.
16. Бегматов Акрам Х., Очиллов З.Х. Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией // Доклады РАН. – Москва, 2009. 429. – № 3. – С. 295-297.
17. Begmatov Akram H., Ochilov Z.H. Recovering of function set by integrals along a curve in the plane // Ill-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrent'ev et al., Eds., Proceedings of International Conference, VSP. – Utrecht-Boston, 2003. – С. 191-197.
18. Бегматов Акрам Х., Очиллов З.Х. Задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида. Журнал Continuum: Математика. Информатика. Образование. Россия 2017 г., № 2., С. 11-15.

УДК 517.957

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СИНОС-ГОРДОНА В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

У.Б.Муминов

Самаркандский государственный университет

Аннотация. Метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного уравнения типа синус-Гордона в классе периодических функций.

Ключевые слова: Оператор Дирака, спектральные данные, нелинейное уравнение синус-Гордона, система уравнений Дубровина.

Integration of a nonlinear sine-Gordon type equation in the class of periodic functions

Abstract. The inverse spectral problem method is used to integrate a nonlinear sine-Gordon type equation in the class of periodic functions.

Keywords: Dirac operator, spectral data, nonlinear sine-Gordon equation, Dubrovin system of equations.

Ночизикли синус-Гордон типидаги тенгламани даврий функциялар синфида интеграллаш

Аннотация. Ночизикли синус-Гордон тенгламасини тескари спектрал масала ечиш методидан фойдаланиб, даврий функциялар синфида интеграллаш.

Калит сўзлар: Дирак оператори, спектрал берилганлар, ночизикли синус-Гордон тенгламаси, Дубровин тенгламалар системаси.

Обратные спектральные задачи играют значительную роль при интегрировании некоторых важных эволюционных уравнений математической физики. Важный прорыв был сделан в октябре 1967 года с появлением статьи Гарднера, Грина, Крускала и Миура [1], где было показано, что уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx}, \quad q(x, 0) = q_0(x), \quad x \in R, t > 0,$$

можно представить как условие совместности двух линейных дифференциальных уравнений, одно из которых оказалось уравнением Штурма-Лиувилля

$$L\psi \equiv -\psi''(x, k, t) + q(x, t)\psi(x, k, t) = k^2\psi(x, k, t), \quad x \in R.$$

Было отмечено, что если потенциал $q(x, t)$ в этом уравнении меняется во времени согласно КдФ, то \square удовлетворяет ещё одному линейному уравнению, а именно

$$\dot{\psi}_t = -4\psi''_{xx} + 6q(x, t)\psi'_x + 3q_x(x, t)\psi.$$

Данное обстоятельство позволило авторам [1] предложить процедуру построения точных решений уравнения КдФ сведением ее к обратной задаче теории рассеяния. Обратная задача теории рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля на всей прямой изучалась в работах Фаддеева [2],

Марченко [3], Левитана [4] и др. В статье [5] Лакс показал универсальность метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), обобщил уравнения КдФ, вводя понятие высшего уравнения КдФ. В этом направлении следующий важный результат был получен Захаровым и Шабатом [6]. Им удалось интегрировать нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ):

$$iu_t \pm 2u|u|^2 + u_{xx} = 0.$$

Вскоре Вадате [7], опираясь на идеи работы [6], предложил метод решения модифицированного уравнения КдФ (мКдФ):

$$u_t \pm 6u^2u_x + u_{xxx} = 0.$$

Захаров, Тахтаджян, Фаддеев [8], а также Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сигур[9] показали, что МОЗР также можно применить и к решению уравнения синус-Гордон:

$$u_{xt} = \sin u.$$

Применение МОЗР к уравнениям НУШ, мКдФ и синус-Гордон опирается на задачу рассеяния для оператора Дирака на всей оси:

$$L = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -q(x) \\ r(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}, x \in R.$$

Обратная задача рассеяния для оператора Дирака на всей оси изучалась в работах [6], [10], [11] и др.

В настоящей работе рассматривается нелинейное уравнение типа синус-Гордон

$$q_{xt} = chq, q = q(x, t), x \in R, t > 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in R, \tag{2}$$

в классе действительных π -периодических по x (не обязательно конечнозонных) функций:

$$q(x + \pi, t) = q(x, t) \in C_{xt}^{1,1}(t > 0) \cap C(t \geq 0), \tag{3}$$

Хорошо известно, что интегрирование нелинейного эволюционного уравнения КдФ, мКдФ, НУШ и синус-Гордона в классе периодических функций существенно зависят от количества нетривиальных лаун в спектре периодического оператора Штурма-Лиувилля и Дирака.

С помощью метода обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лаун, в работах Итса, Матвеева[12] и Дубровина, Новикова [13] была доказана полная интегрируемость уравнения КдФ в классе конечнозонных периодических квазипериодических функций. Кроме того, для конечнозонных потенциалов (т.е. для решения уравнения КдФ) была выведена явная формула через τ -функции Римана. В работах [14] и [15] с помощью МОЗР для оператора Дирака была установлена полная интегрируемость нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ) и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ) в классе конечнозонных функций. Более подробно об этой теории изложено в монографиях [3], [4] и [16]-[17].

Известно [18], что если $q(x) = 2a \cos 2x, a \neq 0$, то все нетривиальные лауны в спектре оператора $L \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, x \in R$ открыты, иначе говоря $q(x)$ – бесконечнозонный периодический потенциал. Аналогичные примеры имеются для периодического оператора Дирака [19]. В связи с этим мы изучаем задачу Коши (1) – (3) в классе периодических (не обязательно конечнозонных) функций. К данной задаче можно применить метод статьи [20]. При этом решение нелинейного уравнения (1) получается в виде равномерно сходящегося функционального ряда.

Наша цель – построение решения $q(x, t)$ задачи (1) – (3) в рамках обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y \equiv By' + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, \tau \in R, x \in R \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}q'_x(x, t) \\ \frac{1}{2}q'_x(x, t) & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ и

$s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$. Функция $\Delta(\lambda) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$ называются функций Ляпунова для уравнения (4).

Спектр оператора L чисто непрерывен и состоит из следующего множества:

$$\sigma(L) \equiv \{\lambda \in R: |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = R \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}),$$

при этом интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ $n \in Z$, называются лакунами, где $\lambda_{4k-1}, \lambda_{4k}$ собственные значения периодической задачи $(y(0) = y(\pi))$, а $\lambda_{4k+1}, \lambda_{4k}$ собственные значения антипериодической задачи $(y(0) = -y(\pi))$ для уравнения (4).

Корни уравнения $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$ обозначим через $\xi_n = \xi_n(\tau, t), n \in Z$.

Они совпадают с собственными значениями задача Дирихле для системы (4) с краевыми условиями $y_1(0, \tau, t) = 0, y_1(\pi, \tau, t) = 0$.

Числа $\xi_n, n \in Z$ и знаки

$$\sigma_n \equiv \sigma_n(\tau, t) = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}, n \in Z,$$

называются спектральными параметрами оператора L . Спектральные параметры $\xi_n, \sigma_n, n \in Z$ и границы спектра $\lambda_n, n \in Z$ называются спектральными данными оператора L .

Лемма. Пусть $y_n(x, \tau, t) = (y_{n,1}(x, \tau, t), y_{n,2}(x, \tau, t))^T, n \in Z \setminus \{0\}$ ортонормированные собственные вектор-функции, соответствующие собственным значениям $0 \neq \xi_n = \xi_n(\tau, t), n \in Z$ задачи Дирихле для системы уравнений (4). Тогда имеет место:

$$1) \quad \dot{\xi}_n(\tau, t) = \frac{1}{2\xi_n} e^{q(\tau, t)} [y_{n,2}^2(\pi, \tau, t) - y_{n,2}^2(0, \tau, t)], \quad (5)$$

$$2) \quad y_{n,2}^2(\pi, \tau, t) - y_{n,2}^2(0, \tau, t) = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi), \quad (6)$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}. \quad (7)$$

Доказательство. Обозначим через $0 \neq \xi_n = \xi_n(\tau, t), n \in Z \setminus \{0\}$ собственные значения задачи Дирихле

$$y_1(0, \tau, t) = 0, y_1(\pi, \tau, t) = 0 \quad (8)$$

для уравнения (5). Пусть $y_n(x, \tau, t) = (y_{n,1}(x, \tau, t), y_{n,2}(x, \tau, t))^T, n \in Z \setminus \{0\}$ ортонормированные собственные вектор-функции задачи Дирихле (4), (8) соответствующие собственным значениям $0 \neq \xi_n = \xi_n(\tau, t), n \in Z \setminus \{0\}$.

Дифференцируя по t равенство $\xi_n(\tau, t) = (L(\tau, t)y_n, y_n), n \in Z \setminus \{0\}$, и используя симметричность оператора $L(\tau, t)$, имеем

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = (\dot{\Omega}(x + \tau, t)y_n, y_n), n \in Z \setminus \{0\}. \quad (9)$$

Используя явный вид скалярного произведения

$$(y, z) = \int_0^\pi [y_1(x)z_1(x) + y_2(x)z_2(x)] dx, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \text{ равенство (9)}$$

перепишем в виде

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \int_0^\pi y_{n,1}(x, \tau, t) y_{n,2}(x, \tau, t) q_{xt}(x + \tau, t) dx. \quad (10)$$

Подставляя уравнения (1) в (10), находим

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \int_0^\pi y_{n,1}(x, \tau, t) y_{n,2}(x, \tau, t) chq(x + \tau, t) dx. \quad (11)$$

Из уравнения (4) следует следующее равенство

$$\begin{cases} y'_{n,1} + \xi_n y_{n,2} = \frac{1}{2} q'(x + \tau, t) y_{n,1}, \\ -y'_{n,2} + \xi_n y_{n,1} = \frac{1}{2} q'(x + \tau, t) y_{n,2}. \end{cases} \quad (12)$$

Используя эти тождества, прямым вычислением находим

$$\begin{aligned} & (e^{-q} y_{n,1}^2 - e^q y_{n,2}^2)' = e^{-q} (-q') y_{n,1}^2 + 2e^{-q} y_{n,1} y'_{n,1} - e^q q' y_{n,2}^2 - \\ & - 2e^q y_{n,2} y'_{n,2} = -e^{-q} q' y_{n,1}^2 + e^{-q} (q' y_{n,1}^2 - 2\xi_n y_{n,1} y_{n,2}) - e^q q' y_{n,2}^2 - \\ & - e^q (2\xi_n y_{n,1} y_{n,2} - q' y_{n,2}^2) = -e^{-q} q' y_{n,1}^2 + e^{-q} q' y_{n,1}^2 - 2\xi_n e^{-q} y_{n,1} y_{n,2} - \\ & - e^q q' y_{n,2}^2 - 2\xi_n e^q y_{n,1} y_{n,2} + e^q q' y_{n,2}^2 = -2\xi_n y_{n,1} y_{n,2} (e^q + e^{-q}) = \\ & = -4\xi_n y_{n,1} y_{n,2} chq. \end{aligned}$$

Поэтому

$$y_{n,1} y_{n,2} chq = -\frac{1}{4\xi_n} (e^{-q} y_{n,1}^2 - e^q y_{n,2}^2)'. \quad (13)$$

Из (11) и (13) выводим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_n}{\partial t} &= -\frac{1}{2\xi_n} \int_0^\pi (e^{-q(x+\tau,t)} y_{n,1}^2 - e^{q(x+\tau,t)} y_{n,2}^2)' dx = -\frac{1}{2\xi_n} (e^{-q(x+\tau,t)} y_{n,1}^2 - e^{q(x+\tau,t)} y_{n,2}^2) \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \\ &= -\frac{1}{2\xi_n} (e^{-q(\tau,t)} y_{n,1}^2(\pi, \tau, t) - e^{q(\tau,t)} y_{n,2}^2(\pi, \tau, t)) + \\ &\quad + \frac{1}{2\xi_n} (e^{-q(\tau,t)} y_{n,1}^2(0, \tau, t) - e^{q(\tau,t)} y_{n,2}^2(0, \tau, t)) = \\ &= \frac{1}{2\xi_n} e^{q(\tau,t)} [y_{n,2}^2(\pi, \tau, t) - y_{n,2}^2(0, \tau, t)]. \end{aligned} \tag{14}$$

Лемма2. Пусть $v_n(x, \tau, t) = (v_{n,1}(x, \tau, t), v_{n,2}(x, \tau, t))^T, n \in Z$ ортонормированные собственные вектор-функции, соответствующие собственным значениям $\lambda_n(\tau, t), n \in Z$ периодической или антипериодической краевой задачи для системы уравнений (5). Тогда имеет место:

$$\dot{\lambda}_n(\tau, t) = 0. \tag{15}$$

Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $q(x, t), x \in R, t > 0$ решение задачи (1) – (3). Тогда $\lambda_n(\tau, t), n \in Z$ - границы спектра оператора Дирака $L(\tau, t)$ не зависят от параметров τ и t , а спектральные параметры $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n(\tau, t) = \frac{(-1)^n}{\xi_n} \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) e^{q(\tau,t)}. \tag{16}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau, t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in Z \tag{17}$$

при этом $\xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in Z$ - спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau, 0)$ с коэффициентом $q_0(x + \tau), \tau \in R$.

Доказательство теоремы следует из тождеств (6) и (14).

Следствие 1. Теорема 1 даёт метод решения задачи (1) – (3). Для этого, сначала найдем спектральные данные $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in Z$ оператора Дирака $L(\tau, 0)$ соответствующие коэффициенту $q_0'(x + \tau)$. Далее, решая задачу Коши (16), (17) при произвольном значении τ , находим $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in Z$. По формуле следов

$$q'_\tau(\tau, t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)) \tag{18}$$

определим $q(\tau, t)$, т.е. решение задачи (1) – (3).

Следствие 2. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной π – периодической аналитической функцией, то решение $q(x, t)$ задачи Коши (1)-(3) тоже является аналитической функцией по x .

Это утверждение следует из аналога теоремы Трубовица [13], [14]. Так как длины лакун оператора Дирака соответствующие коэффициенту $q_0(x)$, убывают экспоненциально, а коэффициенту $q(x, t)$ соответствуют те же лакуны, значит $q(x, t)$ является действительной аналитической функцией по x .

Следствие 3. Если число $\frac{\pi}{2}$ является периодом (антипериодом) для начальной функции $q_0(x)$, то все корни уравнения $\Delta(\lambda) + 2 = 0$ ($\Delta(\lambda) - 2 = 0$) являются двукратными. Так как функция Ляпунова, соответствующая коэффициенту $q(x, t)$, совпадает с $\Delta(\lambda)$, то по аналогу обратной теореме Борга [15], [16], число $\frac{\pi}{2}$ является также периодом (антипериодом) для решения $q(x, t)$, по переменной x .

Литература

1. Gardner C., Geern I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Kortevge-de Vries equation. // Phys. Rev. Lett., - New York, 1967. V.19. p. 1095-1098.
2. Фаддеев Л.Д. Свойства S - матрицы одномерного уравнения Шредингера. //Тр. МИАН СССР, 73(1964), с. 314-336.
3. Марченко В.А. Операторы Штурма- Лиувилля и их приложения, Наука думка, Киев, 1977.
4. Левитан Б.М. Обратные задача Штурма -Лиувилля, Наука, М.: 1984.

5. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. //Comm. Pure and Appl. Math, 1968. V. 21. p. 467-490.
6. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах.// ЖЭТФ, 61:1 (1971), с. 118-134.
7. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. // J. Phys. Soc. Japn., 32: 6 (1972), 44-47.
8. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Полное описание решений “Sin-Gordon” уравнения. // Докл. АН СССР, 219: 6 (1974), с. 1334-1337.
9. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. Method for solving the sine – Gordon equation. // Phys. Rev. Lett., 30: 25 (1973), p. 1262-1264.
10. Фролов И.С. Обратная задача для системы Дирака на всей оси. // Докл. АН СССР, 207: 1 (1972), с. 44-47.
11. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов, Наука, М., 1986., с.528 .
12. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и N – солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза // ТМФ, 23: 1 (1975), с.51-68.
13. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега -де Фриза //ЖЭТФ, 67: 12 (1974), с. 2131-2143.
14. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шрёдингера // Докл. АН УССР, Сер. А., 1976, №11, с. 965-968.
15. Смирнов А.О. Эллиптические нелинейного уравнения Шрёдингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза // Матем. сб., 185: 8 (1994), 103-114.
16. Митропольский Ю.А. Боголюбов Н.Н.(мл.) Прикарпатский А.К. Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. // Киев: Наукова думка, 1987., 296 с.
17. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980., 320с.
18. Ince E.L. Ordinary differential equations. 1956, New York: Dover.
19. Джаков П.Б., Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака. //УМН, 61: 4 (370), (2006), с. 77-182.
20. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов.// Функц. анализ и его прил. – Москва, 1975. –т.9. вып. 3, - с. 41-51.

УДК 517.957

ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

О.Э.Мирзаев, Ф.М.Муродов

Самаркандский государственный университет

Аннотация. В настоящей работе излагается алгоритм построения семейства разных краевых задач Штурма – Лиувилля с одинаковым спектром.

Ключевые слова: собственные значения, нормирующие константы, интегральное уравнение.

Chekli kesmadagi Shturm-Liuvill izospektral operatorlari

Annotatsiya. Ushbu maqolada spektrlari bir xil bo'lgan har xil Shturm – Liuvill chegaraviy masalalari oilasini qurish algoritmi bayon qilingan.

Kalit so'zlar: xos qiymat, normallovchi o'zgarmlar, integral tenglama.

Isospectral Sturm-Liouville operators on the finite segment

Abstract. In this paper is an algorithm for constructing a family of different Sturm-Liouville boundary-value problems with a same spectrum is presented.

Keywords: eigenvalues, normalization constants, integral equation.

1. Введение

Настоящая работа посвящена обратной спектральной задаче об описании всех краевых задач Штурма-Лиувилля на конечном отрезке с одним и тем же спектром. Такие краевые задачи называются изоспектральными и были изучены в работах Е.Исаксона, Р.Макина, В.Долберга и

Е.Трубовица. В настоящее время имеются разные методы решения обратных спектральных задач: метод оператора преобразования (т.е. метод Гельфанда-Левитана), метод спектральных отображений, метод эталонных моделей и другие (см.[1]-[11]). В.А.Марченко показал, что оператор Штурма-Лиувилля на конечном отрезке определяется однозначно по его собственным значениям и последовательности нормирующих константы, т.е. по спектральной функции. При построении изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля с заданным спектром $n^2, n \geq 1$ нами использован метод Гельфанда-Левитана. И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном была найдена необходимые и достаточные условия восстановления краевых задач Штурма-Лиувилля по его спектральной функции. Этот метод основан на восстановлении потенциала и краевых условий по спектральным данным с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода с параметрам.

Определение 1.1. Краевые задачи Штурма-Лиувилля с граничным условиям Дирихле

$$L^0 y \equiv -y'' = \lambda y, \quad (0 < x < \pi), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

и

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (0 < x < \pi), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

называются изоспектральными, если у них имеются одинаковые собственные значения, т.е. $\sigma(L) = \sigma(L^0) = \{n^2, n \geq 1\}$. Здесь $q(x) \in C[0, \pi]$ - действительная функция на отрезке $[0, \pi]$.

В данной работе восстанавливается семейство краевых задач $L = L(q(x))$ Штурма-Лиувилля с граничными условиями Дирихле спектры которых удовлетворяют условию $\sigma(L) = (\lambda_n)_{n=1}^\infty = \{n^2, n \geq 1\}$.

2. Некоторые сведения по обратной спектральной задаче

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$L(q(x))y \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (0 < x < \pi) \tag{2.1}$$

$$y(0) = 0, \tag{2.2}$$

$$y(\pi) = 0 \tag{2.3}$$

где $q(x) \in C[0, \pi]$, λ - спектральный параметр.

Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1. \tag{2.4}$$

Хорошо известно [3], что решение $\varphi(x, \lambda)$ задачи (2.1), (2.4) существует и единственно, а также для каждого фиксированного $x \in [0, \pi]$ является целой функцией по λ .

Кроме того имеет место интегральное представление:

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x K(x, t) \sin \sqrt{\lambda} t dt, \tag{2.5}$$

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt. \tag{2.6}$$

Очевидно, что $\varphi(x, \lambda)$ при любом λ удовлетворяет граничному условию (2.2). Поэтому собственные значения $\lambda_n, n = 1, 2, 3, \dots$ задачи (2.1)-(2.3) суть корни уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \varphi(\pi, \lambda) = 0, \tag{2.7}$$

а соответствующая собственная функция $y_n(x)$ равна $\varphi(x, \lambda_n), n = 1, 2, 3, \dots$. Положим

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx. \tag{2.8}$$

Числа α_n называются нормировочными числами краевой задачи (2.1)-(2.3). Набор чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^\infty$ будем называть в дальнейшем спектральными данными задачи (2.1)-(2.3).

Теорема 2.1. Для спектральных данных $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^\infty$ задачи (2.1)-(2.3) справедливы равенства

$$\sqrt{\lambda_n} = n + c/(n\pi) + \gamma_n/n^2, \quad c = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt, \quad \{\gamma_n\} \in l_2, \quad \alpha_n = \pi/(2n^2) + \beta_n/n^3, \quad \{\beta_n\} \in l_2. \tag{2.9}$$

Хорошо известно, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны и для произвольных функций $f(x) \in L^2(0, \pi)$ имеет место

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left(\int_0^{\pi} f(t) \varphi(t, \lambda_n) dt \right) \varphi(x, \lambda_n). \tag{2.10}$$

Отсюда получим символическое равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(t, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} = \delta(t-x), \tag{2.11}$$

где $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. В частности, при $q(x) \equiv 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^0} \frac{\sin nx \sin nt}{n^2} = \delta(t-x), \tag{2.12}$$

где

$$\alpha_1^0 = \pi/2, \alpha_n^0 = \pi/(2n^2), n \geq 2. \tag{2.13}$$

Теорема 2.2 (В.А.Марченко). Коэффициент $q(x)$ краевой задачи (2.1)-(2.3) определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Лемма 2.1. Имеет место тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda_n)}{\alpha_n} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}} = 0, 0 < t < x. \tag{2.14}$$

Теорема 2.3 (И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан). Ядро $K(x, t)$ оператора преобразования (2.5), удовлетворяет интегральному уравнению:

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_0^x K(x, s) F(s, t) ds = 0, (0 < t < x). \tag{2.15}$$

где

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_n} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x \sin \sqrt{\lambda_n} t}{\lambda_n} - \frac{1}{\alpha_n^0} \frac{\sin nx \sin nt}{n^2} \right\}. \tag{2.16}$$

Теорема 2.4 (И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан). Для того чтобы последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ были спектральными данными некоторой кривой задачи вида (2.1)-(2.3) с $q(x) \in L^2(0, \pi)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (2.9).

Итак, пусть $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (2.9). Построим функции $F(x, t)$ по формуле (2.16) и рассмотрим семейство интегральных уравнений (2.15) относительно $K(x, t)$.

Теорема 2.5. При каждом фиксированном $x \in (0, \pi)$ интегральное уравнение (2.16) имеет единственное решение $K(x, t) \equiv K_x(t)$.

Теперь, решая уравнение (2.15) находим $K(x, t)$. Далее определим функцию $\varphi(x, \lambda)$ по формуле (2.5). Тогда функция $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\varphi'' + q(x)\varphi = \lambda\varphi, (0 < x < \pi), \tag{2.17}$$

и начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \varphi'(0, \lambda) = 1, \tag{2.18}$$

где

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x). \tag{2.19}$$

3. Алгоритм восстановления изоспектральных краевых задач

1) Пусть

$$\lambda_n = n^2, n \geq 1; \alpha_n = a_n, n = \overline{1, k}, \alpha_n = \pi/(2n^2), n \geq k+1, n = k+1, k+2, \dots \tag{3.1}$$

где a_1, a_2, \dots, a_k - заданные положительные числа.

Очевидно, что последовательность $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ определенная равенствами (3.1) удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Поэтому существует единственная краевая задача $L(q(x)) = L(a_1, a_2, \dots, a_k)$ вида (2.1)-(2.3) с коэффициентами

$$q(x) = q(x, a_1, a_2, \dots, a_k) \in L^2 \in (0, \pi). \tag{3.2}$$

В этом случае спектр $L(a_1, a_2, \dots, a_k)$ семейства краевых задач удовлетворяет равенствам $\sigma(L(a_1, a_2, \dots, a_k)) = \{n^2, n \geq 1\}$. Далее находим коэффициенты (3.2) краевых задач:

$$L(a_1, a_2, \dots, a_k)y = -y'' + q(x, a_1, a_2, \dots, a_k)y = \lambda y, \tag{3.3}$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{3.4}$$

Сперва определим $F(x, t)$ по формулам (2.16) и (3.1)

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^k a_n \sin nx \sin nt \tag{3.5}$$

где

$$a_n = 1/(n^2 \alpha_n) - 1/\alpha_n^0, \quad \alpha_1^0 = \pi/2, \quad \alpha_n^0 = \pi/(2n^2), \quad n \geq 2. \tag{3.6}$$

Затем, подставляя (3.5) в интегральное уравнение (2.15) получим

$$K(x, t) = -F(x, t) - \int_0^x K(x, s)F(s, t)ds = -\sum_{n=1}^k na_n \sin nt \varphi(x, \lambda_n), \tag{3.7}$$

где

$$\varphi(x, \lambda_n) = \frac{\sin nx}{n} + \frac{1}{n} \int_0^x K(x, s) \sin ns ds. \tag{3.8}$$

Далее, учитывая формулу (2.19) находим коэффициент уравнения (3.3):

$$q(x) = q(x, a_1, a_2, \dots, a_k) = -2 \sum_{n=1}^k na_n (\sin nx \varphi(x, \lambda_n))'. \tag{3.9}$$

Теперь, подставляя формулу (3.7) в (3.8) имеем

$$\varphi(x, \lambda_n) = \frac{1}{n} [\sin nx - \sum_{p=1}^k \{pa_p \varphi(x, \lambda_p) \int_0^x \sin ns \sin ps ds\}], \quad n = \overline{1, k}. \tag{3.10}$$

Легко проверяется выполнение граничных условий (3.4), т.е. $\varphi(0, \lambda_n) = 0, \varphi(\pi, \lambda_n) = 0$.

2) Пусть последовательность положительных чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ определена соотношениями

$$\lambda_n = n^2, \quad n \geq 1; \quad \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_n^0} (1 + \beta_n/n) \tag{3.11}$$

где β_n удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n} < \infty \tag{3.12}$$

и α_n^0 определена по формуле (2.13).

Легко заметить, что данная последовательность $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Поэтому существует единственная краевая задача $L(q(x)) \equiv L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots)$ вида (2.1)-(2.3) с коэффициентом

$$q(x) = q(x, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots) \tag{3.13}$$

спектры которых равны $n^2, n \geq 1$, т.е. $\sigma(L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots)) = \{n^2, n \geq 1\}$.

Теперь находим коэффициент (3.13) краевых задач

$$L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots)y = -y'' + q(x, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi \tag{3.14}$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{3.15}$$

Для этого определим $F(x, t)$ по формулам (2.16) и (3.11)

$$F(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n} \sin nx \sin nt . \quad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в интегральное уравнение Гельфанда-Левитана (2.15) получим

$$K(x, t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nt \varphi(x, \lambda_n) \quad (3.17)$$

где

$$\varphi(x, \lambda_n) = \frac{\sin nx}{n} + \frac{1}{n} \int_0^x K(x, s) \sin ns ds . \quad (3.18)$$

Известно, что функция $\varphi(x, \lambda)$ определенная по формуле (2.5) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\varphi'' + q(x, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots) \varphi = \lambda \varphi \quad (3.19)$$

и начальным условиям $\varphi(0, \lambda) = 0, \varphi'(0, \lambda) = 1$, где коэффициент $q(x, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots)$ определяется по формуле:

$$q(x, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x) . \quad (3.20)$$

Теперь, подставляя формулы (3.17) в (3.18) имеем

$$\varphi(x, \lambda_n) = \frac{1}{n} [\sin nx - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \{\beta_k \varphi(x, \lambda_k)\} \int_0^x \sin ns \sin ks ds], n \in N . \quad (3.21)$$

Легко проверяются выполнения граничных условий (3.4), т.е. $\varphi(0, \lambda_n) = 0, \varphi(\pi, \lambda_n) = 0$.

Далее, из формулы (3.17) и (3.20) получим $q(x, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (\sin nx \varphi(x, \lambda_n))'$, где функция $\varphi(x, \lambda_n), n \geq 1$ определена по формуле (3.21).

Литература

1. Марченко В.А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка. // Труды Москва. Матем. Об. ва. 1952. Т.1. с.327-420.
2. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. // Изв. АН СССР. сер. матем. Москва. 1951. Т.15. №4. с.309-360.
3. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука. 1988.
4. Isaacson E.L., Trubowitz E. The inverse Sturm- Liouvill problem I. // Comm. Pure Appl. Math. 1983. V. 36. P.767-783.
5. Isaacson E.L., McKean H.P., Trubowitz E. The inverse Sturm-Liouville problem II. // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V.37. P.1-11.
6. Dahlberg B.E., Trubowitz E. The inverse Sturm-Liouville problem III. // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V.37. P. 255-267.
7. Poschel J., Trubowitz E. Inverse spektral theory. // Academic Press, Nev York. 1987.
8. Савчук А.М., Шкаликов А.А. О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма-Лиувилля. // Тр. МИАИ. 2002. Т. 260., с. 227-247.
9. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит. 2007. 284 с.
10. Jodeit M., Levitan B.M. The isospectality problem for the classical Sturm-Liouville equation. // Advances in differential equations. 1997., V.2., № 2, -p.297-318.
11. Ashrafyan Y.A., Harutyunyan T.N. Inverse Sturm-Liouville problems with fixed boundery conditions. // Electronic Journal of differential equations, (2015), vol.2015, №27, p.1-8.

UDK:519.21

TO'LA BO'LMAGAN TANLANMALAR UCHUN FISHER INFORMATSIYASI

B. R. Xanimqulov

Chirchiq davlat pedagogika institut

xanimqulov@inbox.ru

Annotatsiya. Ushbu maqola tanlanma to'la bo'lmagan holda Fisher informatsiyasi haqidadir. Tanlanma to'la bo'lganda Kramer-Raoning regularlik shartlari bajarilishini bilgan holda tanlanma to'la bo'lmagan holda ham regularlik shartlari bajarilishi ko'rsatilgan. 2 ta teorema isboti bilan keltirilgan.

Kalit so'zlar: To'la bo'lgan tanlanmalar, to'la bo'lmagan tanlanmalar, Kramer-Raoning regularlik shartlari, Fisher informatsiyasi.

Информация Фишера для неполной выборки

Аннотация. Эта статья об информации Фишера для неполной выборки. Зная, что условия регулярности Крамера-Рао выполняются, когда выборка завершена, показано, что условия регулярности выполняются, даже если выборка является неполной. 2 теоремы представлены с доказательством.

Ключевые слова: полные выборы, неполные выборы, условия регулярности Крамера-Рао, информация Фишера.

Fisher information for incomplete selections

Абстракт. This article is about Fisher information without the selection being complete. Knowing that Kramer-Rao's regularity conditions are met when the sample is complete, it is shown that the regularity conditions are met even when the sample is incomplete. 2 are proved by the proof of the theorem.

Keywords: Complete selections, incomplete selections, Kramer-Rao regularity conditions, Fisher information.

To'la bo'lmagan tanlanmalar zichlik funksiyalari:

F- absolyut uzliksiz bo'lgan holda

$$(1) \quad g(x; \theta) = \begin{cases} F(a; \theta) = \int_{-\infty}^a f(u; \theta) du, & \text{agar } x = a \\ f(x; \theta), & \text{agar } a < x < b \\ 1 - F(b; \theta) = \int_b^{\infty} f(u; \theta) du, & \text{agar } x = b \end{cases}$$

formula orqali va F- diskret bo'lgan holda esa

$$(2) \quad g(x; \theta) = \begin{cases} \sum_{\{i: x_i < a\}} f(x_i; \theta), & \text{agar } x = a \\ f(x_i; \theta), & \text{agar } x = x_i \in (a, b) \\ \sum_{\{i: x_i > b\}} f(x_i; \theta), & \text{agar } x = b \end{cases}$$

$$(3) \quad g_n(x^n; \theta) = [F(a; \theta)]^{m_1} * [1 - F(b; \theta)]^{m_2} * \prod_{i=1}^n [f(x_i; \theta)]^{E_i}$$

formular bilan berilganida Fisherning noma'lum θ parametr haqidagi informatsiya funksiyasining hisoblash formulalarini ko'rib o'tamiz. Agarda bu to'g'ridan-to'g'ri (ya'ni ma'lum regularlik shartlari bajarilgan holda) (1) va (2) formulalarga murojat etsak, to'la bo'lmagan tanlanma bo'lgan holda informatsiya funksiyasi uzliksizlik holda

$$(4) \quad I^*(\theta) = \left(\frac{\partial \log F(a; \theta)}{\partial \theta}\right)^2 \cdot F(a; \theta) + \int_a^b \left(\frac{\partial \log F(x; \theta)}{\partial \theta}\right)^2 \cdot f(x; \theta) dx + \left(\frac{\partial \log(1 - F(b; \theta))}{\partial \theta}\right)^2 (1 - F(b; \theta))$$

formula yordamida va diskret holda esa

$$(5) \quad I^*(\theta) = \left(\frac{\partial \log F(a; \theta)}{\partial \theta}\right)^2 \cdot F(a; \theta) + \sum_{\{i: a < x_i < b\}} \left(\frac{\partial \log F(x; \theta)}{\partial \theta}\right)^2 f(x_i; \theta) + \left(\frac{\partial \log(1 - F(b; \theta))}{\partial \theta}\right)^2 (1 - F(b; \theta));$$

ya'ni (4) ga o'xshash formula yordamida hisoblanadi.

Endi yuorida ta'kidlab o'tilgan regulyarlik shartlarini eslatib o'tamiz:

(R1) $\{x; f(x; \theta) > 0\}$ to'plam θ ga bo'liq bo'lmasin;

(R2) $\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta}$ hosila barcha θ lar uchun mavjud va cheklidir;

(R3) $i = 1, 2$ va barcha θ lar uchun

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^i f(x; \theta)}{\partial \theta^i} \right| dx < \infty, \text{ F - absolyut uzluksiz bo'lsa;} \right.$$

$$\left. \sum_i \left| \frac{\partial^i f(x; \theta)}{\partial \theta^i} \right| < \infty, \text{ F - diskret bo'lsa;} \right.$$

(R4) $I_x(\theta) < \infty$ shart barcha θ lar uchun bajarilsin

Odatda, matematik statistikada (R1)–(R4) shartlarni Kramer – Rao regulyarlik shartlari deb ataladi.

1-Teorema: (R1)–(R4) regulyarlik shartlar bajarilgan holda barcha θ larda $\frac{\partial F(a; \theta)}{\partial \theta}$ va $\frac{\partial F(b; \theta)}{\partial \theta}$

hosilalar mavjud, chekli va bu

$$F(a; \theta) \cdot \left(\frac{\partial \log F(a; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \leq I_x(\theta), \quad (6)$$

$$(1 - F(b; \theta)) \cdot \left(\frac{\partial \log(1 - F(b; \theta))}{\partial \theta} \right)^2 \leq I_x(\theta), \quad (7)$$

$$I^*(\theta) \leq 3I_x(\theta) \quad (8)$$

Isbot. Biz faqat F-absolyut uzluksiz bo'lgan xol bilan chegaralanibgina qolamiz xolos. Diskret xol uchun da'vo xudi shunga o'xshash yo'l bilan isbotlanadi (R1)–(R3) shartlarga asosan,

$$\text{Sup}_{\theta \in H} \left[\frac{\partial F(a; \theta)}{\partial \theta} \right] = \text{Sup}_{\theta \in H} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^a f(x; \theta) dx \right|,$$

(7) tengsizliklarni va quyidagini e'tiborga olsak yetarlidir ya'ni barcha θ lar uchun:

$$I^*(\theta) \leq 2 \cdot I_x(\theta) + \int_a^b \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \cdot f(a; \theta) dx \leq 3 \cdot I_x(\theta) < \infty$$

Teorema isbotlandi.

Ma'lumki, $a \rightarrow -\infty$ va $b \rightarrow +\infty$ bo'lgan holda $I^*(\theta) \rightarrow I(\theta)$ yaqinlashish o'rinli, ya'ni kuzatish natijalari to'liq bo'lishiga yo'l qo'ymaydigan interval yo'qolib borgani sari to'la bo'lmagan tanlanmaga mos Fisher informatsiyasi to'liq tanlanmaga mos Fisher informatsiyasiga yaqinlashib borishi kerakdir. Quyidagi 2-teoremada biz bu da'voni qat'iy isbotlaymiz. Yuqoridagidek, faqat uzluksiz hol uchun isbotlaymiz.

2-Teorema: (R1)–(R4) shartlar o'rinli bo'lgan holda agar $a \rightarrow -\infty$ va $b \rightarrow +\infty$ deb faraz qilsak, u holda

$$(9) \quad I^*(\theta) \rightarrow I(\theta)$$

Isbot. Bu da'voni isboti trivial bo'lgan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x; \theta) dx = 1$ barcha θ lar uchun tenglik va

(R1)–(R3) regulyarlik shartlaridan

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \theta) dx = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\text{yoki } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} dx = 0 \quad (10)$$

ekani kelib chiqadi. Bizga ma'lumki (R4) - regulyarlik shartidan

$$(11) \lim_{\substack{a \downarrow -\infty \\ b \uparrow +\infty}} \int_a^b \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) dx \uparrow \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) dx = I_x(\theta) < \infty;$$

Demak, da'voni isbotlash uchun

$$(12) \lim_{a \downarrow -\infty} \left(\frac{\partial \log F(a; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 F(a; \theta) = 0$$

$$(13) \lim_{b \uparrow +\infty} \left(\frac{\partial \log(1 - F(b; \theta))}{\partial \theta} \right)^2 (1 - F(b; \theta)) = 0$$

tengliklar o'rinli ekanini ko'rsatish yetarli ekan.

$$0 \leq \lim_{a \downarrow -\infty} \left(\frac{\partial \log F(a; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 F(a; \theta) \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^a \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) dx = 0$$

$$0 \leq \lim_{b \uparrow +\infty} \left(\frac{\partial \log(1 - F(b; \theta))}{\partial \theta} \right)^2 (1 - F(b; \theta)) \leq \lim_{b \uparrow +\infty} \int_b^{+\infty} \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) dx = 0$$

Demak, (9) o'rinli ekan. Teorema isbot bo'ldi.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, biz hozirga qadar birgina kuzatuv natijasi to'la bo'lmagan hol uchun Fisher informatsiyasini ko'rib o'tdik. Tanlanma to'la bo'lgan holda yuqoridagi additivlik xossasiga ko'ra $I_{x^{(n)}}(\theta) = n I_x(\theta)$, ya'ni $X^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$ tanlanmaning informatsiyasini hisoblash uchun, X ning infmatsiyasi $I_x(\theta)$ ni n ga ko'paytirish kifoya edi. Endi to'la bo'lmagan tanlanma bo'lgan hol uchun esa,

$$(6) \quad I_{x^n}(\theta) = M_{\theta} \left[\frac{\partial \log g_n(x^n; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 = M_{\theta} \left[m_1 \frac{\partial \log F(a; \theta)}{\partial \theta} + m_2 \frac{\partial \log(1 - F(b; \theta))}{\partial \theta} + \sum_{i=1}^n E_i \frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta} \right]^2;$$

murakkab ifoda bilan aniqlanishiga ishonch hosil qilamiz. Bu esa, o'z navbatida tanlanmalar to'la bo'lmagan holda informatsiya funksiyasini hisoblash, to'la tanlanma bo'lgan holda farqli o'laroq trivial masala emasligini ko'rsatadi. Yana shuni ta'kidlab o'tish lozimki, biz hozirga qadar noma'lum parametr skalyar, ya'ni bir o'lchovli bo'lgan holinigina ko'rgan edik. Agar parametr ko'p o'lchovli, ya'ni $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ vektor bo'lsa, u holda informatsiya funksiyasi emas, balki Fisher informatsiya matritsalarini bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bu holda X tasodifiy miqdorga mos Fisher informatsiya matritsasi

$J_x(\theta) = \left\| I_x^{ij}(\theta) \right\|_{i,j=1,k}$ ning elementlari:

$$I_x^{ij}(\theta) = M_{\theta} \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta_j} \right) \right] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta_j} \right) f(x; \theta) dx; \\ \left(\frac{\partial \log f(x_k; \theta)}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{\partial \log f(x_k; \theta)}{\partial \theta_j} \right) f(x_k; \theta); \end{cases}$$

formular bilan aniqlanadi. Agar X ni kuzatish to'liq bo'lmaydigan holni e'tiborga olsak, u holda Fisher informatsiya matritsasi $J^*(\theta) = \left\| I_*^{ij}(\theta) \right\|_{i,j=1,k}$ ning elementlari (7), (8) larga o'xshash holda

$$I_*^{ij}(\theta) = \left(\frac{\partial \log F(a; \theta)}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{\partial \log F(a; \theta)}{\partial \theta_j} \right) F(a; \theta) + \left(\frac{\partial \log(1 - F(b; \theta))}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{\partial \log(1 - F(b; \theta))}{\partial \theta_j} \right) + I_*^{ij}(a; b; \theta);$$

formulalar bilan aniqlanib, bu yerda

$$I^{ij}_*(a; b; \theta) = \begin{cases} \int_a^b \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta_j} \right) f(x; \theta) dx, \\ \sum_{\{x; a < x_k < b\}} \left(\frac{\partial \log f(x_k; \theta)}{\partial \theta_i} \right) \left(\frac{\partial \log f(x_k; \theta)}{\partial \theta_j} \right) f(x_k; \theta) dx, \end{cases}$$

bo'ladi.

Adabiyotlar

1. Leman E. Teoriya tochechnogo otsenivaniya. - M.: Nauka, 1991. – 448 s.
2. Рохо, Антонио. Возможно да, возможно нет. Фишер. Статистический вывод // Наука. Величайшие теории. – М.: Де Агостини, 2015. - Вып. 47. – ISSN 2409-0069.
3. A.A.Abdushukurov, T.A.Azlarov, A.A.Jomirzayev. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masala va misollar to'plami. Toshkent-2004. 104-105 betlar.

УДК 330.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КРЕДИТНО-ДЕПОЗИТНЫХ ОПЕРАЦИЙ КОММЕРЧЕСКИХ БАНКОВ

Х. Б. Хужаёров, Р. Б. Бобобекова

Самаркандский институт экономики и сервиса

Аннотация. В работе составлена усовершенствованная математическая модель динамики кредитно-деPOSITНЫХ операций коммерческих банков. Показано, что учет запаздывающих факторов в динамике операций может быть осуществлен применением аппарата дифференциальных уравнений дробного порядка. Дано обобщение известных ранее моделей и их численный анализ.

Ключевые слова: динамика банковского капитала, коммерческий банк, конкурирующие интересы, кредитные ресурсы, математическая модель.

Тижорат банклари кредит-депозит операциялари динамикасини математик моделлаштириш

Аннотация. Ишда тижорат банкларининг кредит-депозит операциялари динамикасининг такомиллашган математик модели тузилган. Динамикада кечикиш омилларини инобатга олиш каср ҳосилалари дифференциал тенгламаларни қўллаш орқали амалга оширилиши мумкинлиги кўрсатилган. Маълум моделлар такомиллаштирилган ва улар сонли тадқиқ қилинган.

Калит сўзлар. банк капитали динамикаси, кредит ресурслари, манфаатлар рақобати, математик модель, тижорат банки.

Mathematical modeling of credit-deposit operations dynamics of commercial banks

Abstract. In the paper an improved mathematical model of credit-deposit operations dynamics of commercial banks is developed. It is shown that delay factors in the dynamics can be taken into account by using the fractional differential equations apparatus. A generalization of previously known models and their numerical analysis are given.

Keywords: banking capital dynamics, commercial bank, competing interests, credit resources, mathematical model.

1. **Ведение.** В условиях интенсивного роста и либерализации экономики Республики Узбекистан роль банковской системы, независимо от формы собственности, становится чрезвычайно важной. Хозяйствующие субъекты, предприятия и предприниматели из-за динамичности оборотных средств, необходимостью создания новых, высокотехнологичных производственных мощностей нуждаются в больших средствах, особенно в начальный период осуществления своей деятельности по отдельным проектам. В то же самое время, некоторые субъекты размещают свои свободные средства в банках и получают дивиденды. Таким образом, капитал банков является непрерывно меняющимся, т.е. имеет динамический характер. Этот процесс является чрезвычайно сложным для моделирования из-за стохастичности спроса и предложения средств банку, наличия рисков, межбанковской конкуренции, несвоевременного выполнения

обязательств заемщиками-клиентами, изменения рыночной конъюнктуры, локальных и глобальных неблагоприятных экономических процессов и др. На практике, в большинстве случаев, вопрос кредитования физических и юридических лиц решается простой оценкой текущей ситуации с учетом состоятельности заемщика вовремя возвращать средства с начисленными процентами. Это далеко не всегда себя оправдывает, потому что реализация проектов осуществляется в будущем, после получения кредита, и не все возможные изменения в период реализации проекта удается учитывать в момент принятия решения о целесообразности или нецелесообразности кредитования. Следовательно, математическая модель кредитно-депозитных операций коммерческих банков, в принципе, должна быть динамической, позволяющей оценивать основные финансово-экономических показатели во времени.

Известно, что любая кредитная операция банка связана с определенным риском. Одним из основных факторов, влияющих на кредитный риск банка, является кредитный рейтинг заемщика, что характеризует кредитоспособность заемщика. Динамика кредитных рейтингов может быть причиной, негативно влияющей на коммерческую деятельность банков. В большинстве математических моделей, методик расчета и управления кредитным риском переходные вероятности кредитных рейтингов заемщиков считаются постоянными и однородными. Вместе с тем известно, что кредитные рейтинги заемщиков под действием различных факторов представляют собой динамический процесс. Известно [1,2,3], что в качестве меры оценки риска в долгосрочных финансовых операциях может быть использован такой показатель, как дисперсия дохода во времени. В качестве одной из мер уменьшения этой дисперсии может рассматриваться диверсификация портфеля при всех прочих равных условиях. При этом суммарная дисперсия определяется как сумма дисперсий каждой компоненты портфеля. Таким образом, за счет диверсификации портфеля появляется возможность минимизации суммарной дисперсии дохода, следовательно – уменьшения риска. При этом банки должны остерегаться рискованных и спекулятивных операций. На сегодняшний день банки стали многофункциональными, их деятельность вышла далеко за пределы сберегательных действий. В условиях рыночной экономики их следует рассматривать как полноценный коммерческий субъект. Это обстоятельство непосредственно связано с ростом рискованных ситуаций в деятельности коммерческих банков, что накладывает определенные трудности при математическом моделировании финансовых операций банков.

Среди математических моделей наибольшее распространение получили оптимизационные модели (как частные, так и полные) банковской деятельности, сводящиеся к задачам математического программирования. К таким, в частности, относятся модели формирования портфеля заказов (портфеля банковских активов), теории риска, формирования структуры активов и т.д. Такие модели способны описать состояние анализируемого объекта на данный момент времени. В то время как наиболее полный анализ динамики банковских операций может быть осуществлен на основе математических моделей, составляемых с использованием феноменологических соображений и аппарата дифференциальных уравнений.

В данной работе даются некоторые модели кредитно-депозитных операций коммерческих банков. Показаны методы обобщения моделей, учитывающих эффекты запаздывания динамики финансово-экономических банков. Модифицирована и численно реализована модель кредитно-депозитных операций банка и для различных вариантов исходных параметров.

2. Математические модели. Нами была предложена математическая модель кредитования коммерческими банками, учитывающая конкурирующие интересы сторон [4]. В этой модели банки и клиенты рассматриваются как две конкурирующие стороны, вступающие в взаимоотношение со своими интересами. Банки субсидируя и кредитируя клиента (физических и юридических лиц) преследует интерес в получении максимальной прибыли. Клиент же преследует свой интерес в минимизации дополнительной платы по процентам за кредит. Таким образом интересы банка и клиента (заёмщика) взаимно конкурируют. В этих условиях естественно использовать принципы моделирования взаимодействия двух конкурирующих субъектов [5,6,7,8], эффективно применяющиеся при моделировании биологических и экологических систем, изменения зарплаты и занятости и др. Модель имеет вид

$$\frac{dq}{dt} = \alpha_1(p - p_0), \quad \alpha_1 > 0, \quad p_0 = \text{const} > 0, \quad (1)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha_2(q - q_0), \quad \alpha_2 = \text{const} > 0, \quad q_0 = \text{const} > 0, \quad (2)$$

где $p(t)$ - кредитные ресурсы банка, $q(t)$ - количество заемщиков за время t , α_1 - параметр, характеризующий темп роста количества заемщиков, α_2 характеризует темп изменения кредитных ресурсов с увеличением количества заемщиков.

Численная реализация модели (1), (2) показала, что с ростом количества заемщиков q текущие кредитные ресурсы банка p уменьшаются. С уменьшением количества заёмщиков с определенным запаздыванием текущие кредитные ресурсы увеличиваются за счет погашения предыдущих кредитов. При равновесных значениях кредитных ресурсов и количества заёмщиков соответственно количество заёмщиков и кредитные ресурсы достигают равновесных значений, что полностью согласуется с исходными допущениями и свойствами уравнений (1), (2).

Идея применения принципов взаимодействия конкурирующих биологических индивидов к финансово-экономическим процессам использовалась и ранее. В частности, в [9] предложена модель тройного уровня. Аналогично биологической системе «биомасса – травоядные – плотоядные (хищники)» построена модель для системы «головной банк – коммерческие банки – клиенты», которая имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(t)(a_1 - b_1x_2(t) + c_1x_3(t)), \quad (3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(t)(-a_2 + b_2x_1(t)), \quad (4)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3(t)(a_3 - b_3x_1(t)), \quad (5)$$

где $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ - количество головных банков, коммерческих банков и клиентов, соответственно, $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1$ - положительные постоянные.

В модели (4) – (6) взаимодействует три субъекта. Модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой при заданных начальных условиях $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, x_3(0) = x_{30}$, где x_{10}, x_{20}, x_{30} - известные величины, существует, однако устойчивость решения должна быть проверена. При определенных соотношениях между константами модели возможно существование равновесного состояния между тремя субъектами. Устойчивость решения также зависит от параметров модели. Следует отметить, что устойчивость банковской системы непосредственно связана с устойчивостью решения системы дифференциальных уравнений, моделирующих деятельность банка.

Несколько иной подход к моделированию динамики банковского капитала дан в [10]. Модель представлена в виде

$$\frac{\partial D}{\partial t} = (r_D - a_{11})D + a_{12}C + a_{13}r_D Y(t), \quad (6)$$

$$\frac{dK}{dt} = -a_{21}K + a_{22}C + \frac{a_{23}}{r_K(t)} Y'(t), \quad (7)$$

$$\frac{dC}{dt} = a_{31}(r_K K - r_D D) - a_{32}C, \quad (8)$$

где $D(t)$ - объем депозитов клиентов в момент времени t , $K(t)$ - величина кредитного портфеля банка в момент времени t , $C(t)$ - собственный капитал банка, накопленный к некоторому моменту времени t , $Y(t)$ - совокупный доход клиентов банка в момент времени t в годовом выражении, r_D, r_K - процентные ставки по депозитам и кредитам банка, соответственно, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ - положительные константы.

Точка равновесия модели (7) - (9) находится как стационарное решение системы уравнений.

Представленные модели характеризуют соперничество или конкуренцию между несколькими объектами. По характеру они аналогичны соответствующим моделям популяционной биологии [7,8] типа Лотки-Вольтерра. В принципе, такие модели можно построить между любыми двумя конкурирующими субъектами. В частности, как такие субъекты можно рассматривать государственные и частные коммерческие банки нашей республики. Такой подход был использован, например, в [11, 12]. В качестве субъектов рассматриваются коммерческие банки и локально-территориальные банки (rural banks). Банки последнего типа широко распространены в

таких странах как Индия, Индонезия и др., которые, как правило, являются государственными и обслуживают клиентов отдельных сельских территорий.

В последнее время стали использоваться модели с дробными производными [11,12,13,14]. Они в отличие от моделей с производными целого порядка позволяют описать процессы памяти и наследственности, поэтому считаются более общими и реалистичными. В духе этих работ здесь предлагается обобщение приведенных выше моделей следующим образом:

а) Модель (1), (2) -

$$\frac{d^\alpha q}{dt^\alpha} = \alpha_1(p - p_0), \quad \alpha_1 > 0, \quad p_0 = const > 0, \tag{1'}$$

$$\frac{d^\beta p}{dt^\beta} = -\alpha_2(q - q_0), \quad \alpha_2 = const > 0, \quad q_0 = const > 0, \tag{2'}$$

б) Модель (3) – (5) –

$$\frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} = x_1(t)(a_1 - b_1 x_2(t) + c_1 x_3(t)), \tag{3'}$$

$$\frac{d^\beta x_2}{dt^\beta} = x_2(t)(-a_2 + b_2 x_1(t)), \tag{4'}$$

$$\frac{d^\gamma x_3}{dt^\gamma} = x_3(t)(a_3 - b_3 x_1(t)), \tag{5'}$$

с) Модель (6) – (8) –

$$\frac{d^\alpha D}{dt^\alpha} = (r_D - a_{11})D + a_{12}C + a_{13}r_D Y, \tag{6'}$$

$$\frac{d^\beta K}{dt^\beta} = -a_{21}K + a_{22}C, \tag{7'}$$

$$\frac{d^\gamma C}{dt^\gamma} = a_{31}(r_K K - r_D D) - a_{32}C, \tag{8'}$$

где α, β, γ - порядок производных.

Модели (1') – (8') в отличие от соответствующих (1) – (8) имеют наследственный характер, с уменьшением α, β, γ от единицы это свойство усиливается. При заданных начальных условиях их решение определяется однозначно.

Здесь дадим модификацию модели (6) – (8). При выводе (7) считалось, что на скорость динамики кредитного портфеля влияет кредитная политика банка. Банки, имеющие большие собственные средства в более широком масштабе могут проводить кредитную экспансию и увеличить кредитный портфель ускоренными темпами [10]. Данное обстоятельство учитывалось добавлением в правую часть уравнения (7) члена $a_{22}C$. Здесь мы основываемся на несколько иное предположение. Считаем, что на увеличение динамики кредитного портфеля влияет объем привлеченных средств от вкладчиков, т.е. депозитов, как составная часть финансовых ресурсов банка. На основе этого предположения заменяем в (7) $a_{22}C$ на $a_{22}D$. Таким образом, уравнение (7) приобретает вид

$$\frac{dK}{dt} = a_{22}D - a_{21}K + \frac{a_{23}}{r_K(t)} Y'(t).$$

Уравнения (6) и (8) оставляем без изменения. Тогда система (6) – (8) записывается в виде

$$\frac{\partial D}{\partial t} = (r_D - a_{11})D + a_{12}C + a_{13}r_D Y(t), \tag{9}$$

$$\frac{dK}{dt} = a_{22}D - a_{21}K + \frac{a_{23}}{r_K(t)} Y'(t), \tag{10}$$

$$\frac{dC}{dt} = a_{31}(r_K K - r_D D) - a_{32}C. \tag{11}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (9)-(11) в матричной форме записывается в виде

$$\frac{dX}{dt} = AX + B, \tag{12}$$

где $X = \begin{pmatrix} D \\ K \\ C \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} r_D - a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{22} & -a_{21} & 0 \\ -r_D a_{31} & a_{31} r_K & -a_{32} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{13} r_D Y(t) \\ \frac{a_{23}}{r_K(t)} Y'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Для решения (12) необходимо задать начальное условие $X(0) = X_0$, где $X_0 = (D_0 \ K_0 \ C_0)^T$, D_0, K_0, C_0 - начальные значения D, K, C , т.е. $D(0) = D_0, K(0) = K_0, C(0) = C_0$, T - знак транспонирования.

Точка покоя системы (12) определяется как стационарное решение при $\frac{dX}{dt} = 0$, что приводит к система линейных алгебраических уравнений $AX = -B$ относительно D, K, C . Решение последней системы уравнений при $Y(t) = Y_0 = const$ имеет вид

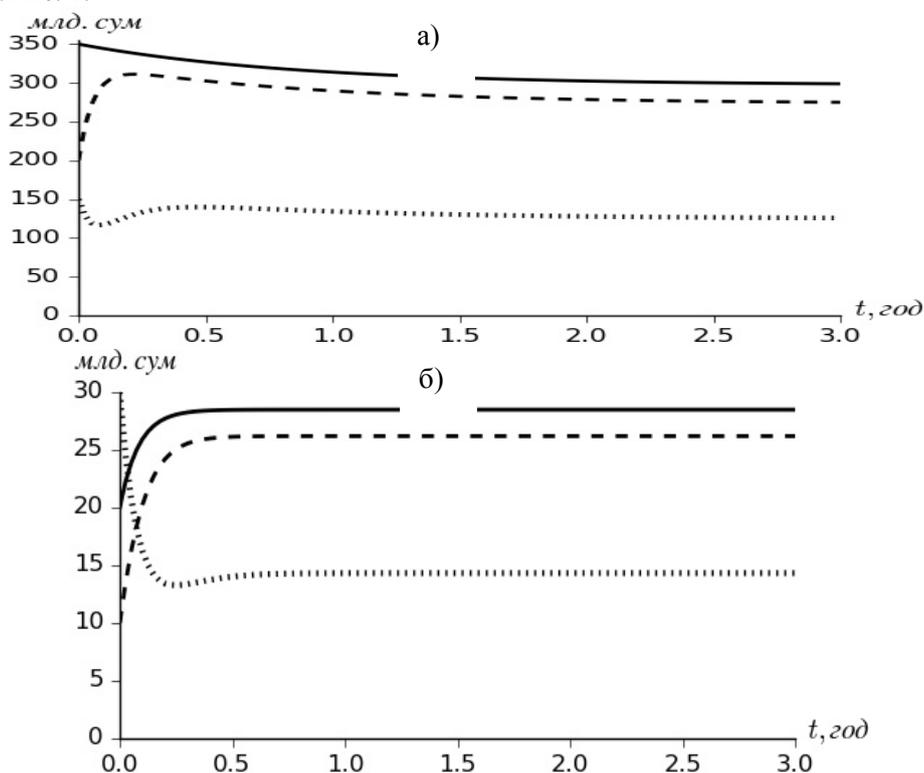
$$D^0 = a_{13} a_{32} a_{21} r_D Y_0 / d, K^0 = a_{13} a_{32} a_{22} r_D Y_0 / d, C^0 = a_{13} a_{31} r_D (a_{22} r_K - a_{21} r_D) Y_0 / d, \tag{13}$$

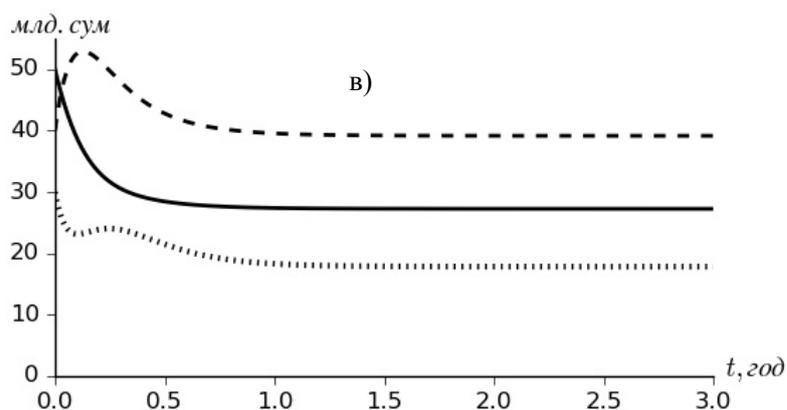
где

$$d = a_{13} a_{12} a_{21} r_D + a_{11} a_{32} a_{21} - a_{31} a_{12} a_{22} r_K - a_{32} a_{21} r_D.$$

Для того чтобы точка равновесия существовала, необходимо, чтобы решение системы (12) было устойчивым. Для этого необходимо исследовать собственные значения матрицы A . Все три собственные значения должны быть вещественными отрицательными или одно – вещественное отрицательное, а два остальные комплексно-сопряженными с отрицательной реальной частью. Это можно проверить на основе критериев Рауса-Гурвица[15].

3. **Реализация обобщенной модели.** Система дифференциальных уравнений (12) решена с использованием стандартной библиотеки языка программирования Python. Некоторые результаты приведены на Рис. 1.



Рис.1. Динамика D, K, C при различных значениях параметров (Табл.1)

— D , - - - K , C .

Исходные данные и промежуточные расчетные параметры приведены в Таб.1.

Таблица 1. Значения исходных и промежуточных расчетных параметров задачи на основе модели (9)-(11)

Параметры, размерность	Рис.1а	Рис.1б	Рис.1в
r_D , 1/год	0,125	0,103	0,139
r_K , 1/год	0,234	0,225	0,236
a_{11} , 1/год	0,139	0,247	0,225
a_{12} , 1/год	0,00001	0,00001	0,01
a_{13} , 1/год	0,219	0,263	0,104
a_{21} , 1/год	0,212	0,209	0,104
a_{22} , 1/год	0,195	0,192	0,149
a_{23} , 1/год	0	0	0
a_{31} , 1/год	0,474	0,493	0,351
a_{32} , 1/год	0,101	0,102	0,108
λ_1 , 1/год	-0,014	-0,209	-0,123+0,045i
λ_2 , 1/год	-0,212	-0,143	-0,123- 0,045i
λ_3 , 1/год	-0,101	-0,102	-0,052
Y_0 , млн.сум	150	150	150
D_0 , млн.сум	350	20	50
K_0 , млн.сум	200	10	40
C_0 , млн.сум	150	30	30
D^0 , млн.сум	297,146	28,487	27,271
K^0 , млн.сум	273,315	26,195	39,173
C^0 , млн.сум	124,777	14,326	17,845

Как видно из рисунка, в зависимости от исходных данных получаются различные зависимости финансовых показателей. Можно наблюдать как монотонно убывающий, так и монотонно возрастающий характер показателей. В отдельных случаях монотонность нарушается, появляются локальные минимальные и максимальные значения. Характер зависимостей также существенно меняется в зависимости от значений исходных параметров. Так, если на Рис.1а,в имеем монотонно убывающую динамику $D(t)$, то на Рис. 1б имеем монотонно возрастающую.

Аналогично, на Рис.1а,в имеем немонотонную динамику $K(t)$, а на Рис.1б – монотонно возрастающую. Графики Рис.1в получены для одного действительного и двух комплексно-сопряженных собственных значений матрицы A . Для этого случая вполне резонно ожидать колебательную динамику финансовых показателей. Однако, ввиду малости мнимой части собственных значений (Табл. 1) колебание показателей выражено слабо, оно заметно только для $C(t)$. Заметим, что для данных вариантов исходных параметров собственные значения матрицы A получаются либо отрицательными действительными, либо с парой комплексно сопряженных с отрицательной реальной частью.

Важным финансовым показателем является параметр K^0/D^0 - отношение кредитного портфеля банка к средствам клиентов-вкладчиков в равновесных условиях. Этот коэффициент можно использовать для оценки ликвидности коммерческого банка [10]. Большие его значения означают слабую ликвидность банка, что затрудняет оказание услуг банком своим клиентам. Малые его значения означают низкую доходность, что равносильно низкой эффективности финансово-экономической деятельности банка. Оценим этот коэффициент для осуществленных расчетных вариантов (Табл.1). Для данных Рис.1а,б имеем $K^0/D^0=0,92$, а для варианта Рис.1в - $K^0/D^0=1,44$. Эти значения нельзя отнести к указанным выше критическим значениям. С точки зрения доходности банка вариант Рис.1в является более предпочтительным.

Следует отметить, что $C(t)$ в рамках данной модели представляет собой не всю доходную часть банковского капитала, а лишь капитализируемую часть прибыли, что учитывается коэффициентом a_{31} . Поэтому, рост динамики кредитования $K(t)$ не всегда означает рост динамики $C(t)$. Кроме того, не учитывается здесь временная переоценка основных средств и дополнительных инвестиций, вносимых учредителями и другими субъектами, не кредитно-депозитная коммерческая деятельность банков и др. Все это, естественно, отражается на динамике $C(t)$. Для учета временной переоценки основных средств, необходимость которой диктуется степенью инфляции, следует переходить к приведенным финансово-экономическим показателям.

4. **Заключение.** Предложены пути обобщения моделей кредитно-депозитной деятельности коммерческих банков, учитывающих запаздывающую динамику финансово-экономических показателей. Предложена модифицированная математическая модель оценки кредитно-депозитных операций коммерческих банков. На основе численной реализации модели для различных вариантов исходных данных оценена динамика основных финансово-экономических показателей банка. Показано, что в зависимости от исходных параметров могут быть реализованы различные динамики показателей.

Литература

1. Capinski M., Zastawniak T. *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*. Springer. 2003. – 321 p.
2. Lando D. *Credit Risk Modeling. Theory and Applications*. Princeton University Press. 2004. – 329 p.
3. Bensoussan A., Zhang Q. (Guest editors). *Mathematical modeling and numerical methods in finance*. Elsevier. 2009.
4. Хужаёров Х.Б. Математическое моделирование динамики кредитных средств коммерческих банков // “Инновацион ва замонавий ахборот технологияларини таълим, фан ва бошқарув соҳаларида қўллаш истикболлари”. Халқаро илмий – амалий онлайн конференция материаллари. Самарканд. СамГУ. Самарканд. 2020. С. 200-205.
5. Greene W. H. *Econometric analysis*. Prentice Hall. 2012.
6. Самарский А. А., Михайлов А. П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*. — 2-е изд., — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 320 с.
7. Ризниченко Г. Ю. *Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии*. — М.: Издательство Юрайт, 2016. — 183 с.
8. Hastings Alan. *Population Biology: Concepts and Models*, Springer Science & Business Media, 2013.
9. Comes C.A. Banking system: three level Lotka-Volterra model, *Procedia Economics and Finance*. 2012, 3. 3251–3255.

10. Власенко М. Математическая модель условного банка. *Банкаўскі веснік*, СТУДЗЕНЬ. 2013. 20-25.
11. Khan F.M.A., Azizah M., Ullah W.S. A fractional model for the dynamics of competition between commercial and rural banks in Indonesia. *Chaos Solitons Fract.* 122 (2019). 32–46.
12. Wang W., Khan M.A., Kumam F.P., Thounthong P. A comparison study of bank data in fractional calculus. *Chaos, Solitons Fract.* 126 (2019) 369–384.
13. Wang W., Khan M.A. Analysis and numerical simulation of fractional model of bank data with fractal–fractional Atangana-Baleanu derivative. *J. Comput. Appl. Math.* 369 (2019) 112646.
14. Das S., Gupta P. A mathematical model on fractional Lotka–Volterra equations, *J. Theor. Biol.* 277 (1) (2011). 1–6.
15. Тихонов, А.Н. *Дифференциальные уравнения* / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. — М.: Изд-во “Наука”, 1980.- 231 с.

УДК 517.91

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

Э.К.Курбонов, Ш.У.Файзуллаев

Джизакский государственный педагогический институт

E-mail: sherzod.fayzullayev.1994@mail.ru

Аннотация: В данной статье изучено взаимное расположение прямых, принадлежащих однополостному гиперболоиду.

Ключевые слова: Прямая линия, плоскость, поверхность.

Mutual arrangement of lines on the surface of negative Gaussian curvature

Annotation: In this article, the mutual arrangement of straight lines belonging to a single-speed hyperboloid is studied.

Keywords: Straight line, flatness, surface.

Gauss egriligi o'zgarman manfiy bo'lgan sirt ustudagi to'g'ri chiziqning o'zaro joylashuvi

Аннотация: Ушбу маколада бир паллала гиперболоидга тегишли тўғри чизикларнинг ўзаро жойлашуви ўрганилган.

Калит сўзлар: Тўғри чизик, текислик, сирт.

В период появления и развития Евклидовой геометрии задаче определения взаимного расположения прямых положительно разрешила многочисленные споры и проблемы. Изученный на протяжении 2000 лет V – постулат Евклиде хоть и посвящён взаимному пересечению прямых выводы исходящие из них ввели точность взаимному расположению прямых. Известно [1] что, произвольные две прямых на плоскости либо параллельны, либо пересекаются а в трехмерном Евклидовом пространстве они скрещиваются. Естественно рождается следующий вопрос. Кроме плоскости и пространстве существует ли другое многообразие, для которого, произвольные прямые, принадлежащие ему были бы взаимно параллельны, пересекались и скрещивались.

Как известно [2] по различным свойствам поверхности делятся на разные классы. Из них более общие, линейные поверхности содержащие прямые и поверхности к которым не принадлежит ни одна прямая.

Нас интересуют в этом работе лишь вещественные прямолинейные образующие однополостного гиперболоида. Известно, что эллипсоиды, двуполостные гиперболоиды и эллиптические параболоиды их не имеют вовсе. Докажем, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходят по крайней мере две различные вещественные прямолинейные образующие.

Определение-1. Гиперболическим параболоидом называется множество точек координаты которых относительно некоторой декартовой или аффинного репера удовлетворяют следующее алгебраическое уравнение второго порядка

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}. \quad (1)$$

Гиперболический параболоид является линейной поверхностью. В [2] доказана следующая теорема.

Теорема-1. Через каждую точку гиперболического параболоида проходят две и только две прямолинейные образующие.

Как результат доказательства теоремы в качестве прямолинейных образующих, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей гиперболоиду определены следующие линии

$$x = x_0 + \sqrt{p} \cdot t, \quad y = y_0 + \sqrt{q} \cdot t, \quad z = z_0 + \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) \cdot t, \quad (2)$$

$$x = x_0 + \sqrt{p} \cdot t, \quad y = y_0 + \sqrt{q} \cdot t, \quad z = z_0 + \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) \cdot t. \quad (3)$$

Используя последние соотношения прямые, проходящие через точки параболоида можно разделить на два класса. Например: если уравнения прямых принадлежащих первому классу проходящих через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$ имеют вид

$$x = x_0 + \sqrt{p} \cdot t, \quad y = y_0 + \sqrt{q} \cdot t, \quad z = z_0 + \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) \cdot t, \quad (4)$$

$$x = x'_0 + \sqrt{p} \cdot t, \quad y = y'_0 + \sqrt{q} \cdot t, \quad z = z'_0 + \left(\frac{x'_0}{\sqrt{p}} - \frac{y'_0}{\sqrt{q}} \right) \cdot t. \quad (5)$$

то прямые, приподлежащие второму классу, проходящих через эти же точки будут выражаться следующими уравнениями

$$x = x_0 + \sqrt{p} \cdot t, \quad y = y_0 + \sqrt{q} \cdot t, \quad z = z_0 + \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) \cdot t, \quad (6)$$

$$x = x'_0 + \sqrt{p} \cdot t, \quad y = y'_0 + \sqrt{q} \cdot t, \quad z = z'_0 + \left(\frac{x'_0}{\sqrt{p}} + \frac{y'_0}{\sqrt{q}} \right) \cdot t. \quad (7)$$

Теперь рассмотрим взаимное расположение прямых, принадлежащих одному классу. Для прямых (4) и (5) или (6) и (7) векторное произведение

$$\overline{M_0 M'_0} \text{ и } \bar{u}_1 \left(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right), \quad \bar{u}_2 \left(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \frac{x'_0}{\sqrt{p}} - \frac{y'_0}{\sqrt{q}} \right), \quad \bar{u}_3 \left(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}} \right),$$

$$\bar{u}_4 \left(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \frac{x'_0}{\sqrt{p}} + \frac{y'_0}{\sqrt{q}} \right) \text{ направляющих векторов}$$

$$\begin{vmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & \frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}} \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & \frac{x'_0}{\sqrt{p}} - \frac{y'_0}{\sqrt{q}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} x'_0 - x_0 & y'_0 - y_0 & z'_0 - z_0 \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & \frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}} \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & \frac{x'_0}{\sqrt{p}} + \frac{y'_0}{\sqrt{q}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как $M_0 \neq M'_0$, \vec{u}_1 и \vec{u}_2 непараллельны, то элементы какой либо строки или столбца этих определителей нельзя линейно взаимно связать. Из этого следует скрещивание прямых (4) и (5) или (6) и (7). Если для гиперboloида (1) имеет место равенство $p = q = \frac{1}{2}$, то $z = x^2 - y^2$ (8). Тогда точки M_0 и M'_0 будут иметь координаты $M_0(1,2,-3)$ и $M'_0(2,1,3)$. Также направляющие векторы прямых (4) и (5) принадлежащих первому классу будут иметь координаты $\vec{u}_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$ и $\vec{u}_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$. Отсюда следует

$$x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad z = -3 - \sqrt{2}t \tag{9}$$

$$x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad z = 3 + \sqrt{2}t \tag{10}$$

Эти прямые принадлежат гиперболическому параболоиду (1). Теперь для прямых (9) и (10) рассмотрим смешенное произведение векторов $\overrightarrow{M_0M'_0}$, \vec{u}_1 и \vec{u}_2 , т.е.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Используя приведенные данные можно привести следующую теорему без доказательства.

Теорема-2. Прямые принадлежащие первому классу гиперболического параболоида скрещиваются.

Теперь покажем существование взаимно параллельных прямых, принадлежащих гиперболического параболоида. Известно, что прямая, принадлежащая первому классу, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параболоида $x = x_0 + \sqrt{p} \cdot t$, $y = y_0 + \sqrt{q} \cdot t$,

$z = z_0 + \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) \cdot t$, а также прямая, принадлежащая второму классу, проходящая через точку

$M'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$ параболоида имеет уравнение вида $x = x'_0 + \sqrt{p} \cdot t$, $y = y'_0 + \sqrt{q} \cdot t$,

$z = z'_0 + \left(\frac{x'_0}{\sqrt{p}} + \frac{y'_0}{\sqrt{q}}\right) \cdot t$.

Для его направляющих векторов этих прямых про анализируем условие

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}} \neq \frac{\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}}{\frac{x'_0}{\sqrt{p}} + \frac{y'_0}{\sqrt{q}}} \tag{10}$$

Можно показать существование бесконечно много точек которое координаты x_0, y_0 и x'_0, y'_0 удовлетворяющих условие (10) и уравнение гиперболического параболоида. Например, если для выше приведенного параболоида $p = q = \frac{1}{2}$, $x_0 = 3, y_0 = 1, z_0 = 8, x'_0 = 3, y'_0 = -1, z'_0 = 8$ то прямые (4) и (6) будет параллельны.

Теперь рассмотрим правильный однополостный гиперboloид, заданный уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (11)$$

Как мы видели, он описывается гиперболой

$$x^2 - z^2 = 1, \quad y = 0$$

при вращении пространства вокруг оси z , в соответствии с чем его сечения плоскостями $z = h = \text{const}$ суть окружности

$$x^2 + y^2 = 1 + h^2, \quad z = h.$$

В частности, при $z = h = 0$ получаем так называемую горловую окружность

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0.$$

Докажем, что через каждую точку M_0 горловой окружности проходят две прямолинейные образующие гиперболоида.

Повернув систему координат на надлежащий угол вокруг оси z , можно достигнуть того, что ось y пройдет именно через точку M_0 , причем вид уравнения (11) при этом преобразовании не изменится. Итак, достаточно доказать наше утверждение для точки $M_0 = (0, 1, 0)$. Но плоскость $y = 1$ очевидно, пересекает гиперболоид (11) по паре прямых

$$\left. \begin{aligned} (d_1) \quad x + z = 0, \quad y = 1, \\ (d_2) \quad x - z = 0, \quad y = 1, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Они лежат на нашем гиперболоиде (11), проходят через точку $M_0 = (0, 1, 0)$ и, значит, являются искомыми образующими.

Докажем, что при вращении пространства вокруг оси z каждая из прямых (12), например прямая d_1 , опишет весь гиперболоид (11).

Пусть M_1 —какая-нибудь точка прямой d_1 ; она лежит на окружности, по которой гиперболоид пересекает горизонтальная, то есть параллельная, плоскость Oxy , плоскость, проходящая через точку M_1 при вращении пространства вокруг оси z точка M_1 описывает всю эту окружность, то есть, во-первых, не покидает гиперболоида, а во-вторых, попадает в любую его точку, лежащую на той же высоте то есть на той же горизонтальной плоскости, что и точка M_1 .

Следовательно, при вращении вокруг оси z и вся прямая d_1 во-первых, в каждый момент времени всеми своими точками лежит на гиперболоиде (11), а во-вторых, в не-некоторый момент оказывается проходящей через любую точку M гиперболоида.

То же справедливо и для прямой d_2 : прямая d_2 при вращении пространства вокруг оси z в некоторый момент также пройдет через любую точку M гиперболоида.

Все прямые, в которые при вращении пространства вокруг оси z , переходит каждая из двух прямых d_1, d_2 составляют два семейства прямолинейных образующих правильного однополостного гиперболоида (11). Через каждую точку M гиперболоида проходит по одной из образующих каждого семейства [3].

Мы чисто геометрически доказали, что любые две образующие, принадлежащие различным семействам, лежат в одной плоскости (следовательно, или пересекаются, или параллельны между собою), по этому как любые две образующие, принадлежащие одному и тому же семейству, скрещиваются [4].

Аффинное преобразование пространства E_3

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad z' = \frac{z}{c}$$

переводит всякую прямую в прямую, а однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в правильный однополостный гиперболоид

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1$$

поэтому на любом однополостном гиперboloиде имеются два семейства прямолинейных образующих, каждое из которых покрывает его так, что через всякую точку гиперboloида проходит по одной образующей каждого семейства. Мы сейчас дадим аналитическую трактовку того же вопроса.

Пусть однополостный гиперboloид задан своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (13)$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad (13')$$

или

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (14)$$

Рассмотрим теперь пару вещественных чисел α , β , не равных одновременно нулю, и для каждой такой пары напомним систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \alpha \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \beta \cdot \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \alpha \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \beta \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В частности, при $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ получаем

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= 0 \\ \left(1 - \frac{y}{b}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

а при $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{y}{b}\right) &= 0 \\ \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для каждой пары чисел α , β наши уравнения определяют пару плоскостей, как легко видеть, не параллельных (в широком смысле слова) и, следовательно, пересекающихся по прямой. Прямая эта целиком лежит на гиперboloиде (13).

Используя приведенные данные можно привести следующую заключение без доказательства.

Заключение-1. Две произвольные прямые, принадлежащие на гиперболическому параболоиду или однополостного гиперboloида либо пересекаются, либо параллельны, либо скрещиваются.

Литература

1. А.Я. Нарманов «Аналитическая геометрия» ЎФМЖ. Тошкент. 2008й. ст. 114-132
2. А.Н. Остыловский «Аналитическая геометрия». Учебное пособие. Красноярск : Сибирский федеральный университет. 2011г. ст. 184-190
3. А.П. Веселов, Е.В. Троицкий «Лекции по аналитической геометрии». МГУ. Москва. 2002г. ст. 144-156
4. Н.В. Ефимов «Краткий курс аналитической геометрии». Учеб. Пособие. ФизМатЛит. Москва. 2005г. ст. 229-243

УДК 517.97:519.9

УПРАВЛЯЕМОСТЬ АНСАМБЛЯ ТРАЕКТОРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ВКЛЮЧЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.Отакулов, Ф.Х.Холиярова

Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий,

E-mail: otakulov52@mail.ru, feruza1377@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрена задача управления ансамбля траекторий дифференциального включения с запаздывающим аргументом. Изучены условия управляемости ансамбля траекторий из начального состояния $\varphi^0(\cdot)$ на заданное терминальное множество $Y = Y(t)$. Даны необходимые и достаточные условия (φ^0, Y) -управляемости и полной Y -управляемости. Результаты получены методами теории дифференциальных включений и многозначного анализа.

Ключевые слова: дифференциальное включение, система управления, запаздывающий аргумент, ансамбль траекторий, условия управляемости.

Kechikishga ega differensial mansublik traektoriylar ansambling
boshqariluvchanligi

Annotatsiya. Ishda kechikishga ega differensial mansublik trayektoriylar ansamblini boshqarish masalasi qaralgan. Trayektoriylar ansambling boshlang'ich $\varphi^0(\cdot)$ holatdan berilgan $Y = Y(t)$ terminal to'plamga boshqariluvchanligi shartlari o'rganilgan. (φ^0, Y) - boshqariluvchanlik va to'la Y - boshqariluvchanlik shartlari olingan. Natijalarni olishda differensial mansubliklar va ko'p qiymatli analiz usullaridan foydalanilgan.

Kalit so'zlar: differensial mansublik, boshqaruv tizimi, kechikuvchi argument, traektoriylar ansambli, boshqariluvchanlik shartlari.

A controllability of ensemble trajectories of differential inclusion with delay

Abstract. In this paper we consider the control problem of an ensemble of trajectories of differential inclusion with a delayed argument. The controllability conditions for the ensemble of trajectories from the initial state $\varphi^0(\cdot)$ to a given terminal set $Y = Y(t)$ are studied. Necessary and sufficient conditions for (φ^0, Y) -controllability and complete Y -controllability are given. The results are obtained by methods of the theory of differential inclusions and multi-valued analysis.

Keywords: differential inclusion, control system, delayed argument, ensemble of trajectories, controllability conditions.

1. Введение

В реальных ситуациях для эффективного управления сложными техническими объектами и процессами следует учесть такие важные факторы, как неполнота информации о внешних параметрах и неточности исходных априорных данных о начальном состоянии системы. Такие задачи управления в условиях ограниченности информации различного типа приводят информационным моделям систем управления. Информационные модели для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, в общем виде можно представить в виде

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), t \geq t_0, x(t_0) = x^0, u \in U, \quad (1)$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $u = u(t)$ – управляющий параметр, $w = w(t)$ – параметр неизвестных внешних воздействий.

Известные методы исследования модели вида (1) разработаны с учетом степени ограниченности информации относительно внешних параметров и начального состояния

системы. Когда известны функции распределения вероятностей параметра $w = w(t)$ и начальных данных, система (1) изучается методами теории стохастического управления.

В прикладных задачах более распространенной является ситуация, когда априорные данные о начальном состоянии системы и параметрах внешних воздействий минимальны, т.е. какие-либо статистическое описание их отсутствуют, а информация ограничивается заданием лишь множество возможных значений неизвестных параметров. Из теории дифференциальных включений и многозначного анализа [3, 13] хорошо известно, что при довольно общих предположениях, система управления (1) с неопределенными параметрами $w = w(t) \in W$ и начальными данными $x^0 \in D$ эквивалентна дифференциальному включению

$$\dot{x} \in f(t, x, u, W) \equiv \{f(t, x, u, w) : w \in W\}, \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) \in D, u \in U.$$

Полученная математическая модель относится к классу, так называемых управляемых дифференциальных включений [6,9,16]

$$\dot{x} \in F(t, x, u), \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) \in D, u \in U, \quad (2)$$

где $F(t, x, u)$ – многозначное отображение, $u = u(t)$ – параметр управления.

Для систем управления в условиях неопределенности большой интерес представляют свойства ансамбля траекторий, методы оценки множества достижимости и прогноза фазового состояния системы и другие [2,5,14]. В зависимости от критерия оценки состояния системы изучаются различные задачи оптимального управления ансамблем траекторий: управление по быстродействию, минимаксному и другим критериям [4, 5, 7,11,14].

Исследование каждой задачи управления для дифференциальных включений опирается на фундаментальные свойства таких динамических систем. Свойства управляемых дифференциальных включений и некоторые задачи оптимизации таких систем исследованы в работах [6,11,14]. Некоторые свойства управляемых дифференциальных включений с запаздываниями изучены в работах [9, 10]. В частности, выявлены условия компактности, выпуклости множества абсолютно непрерывных решений, а также их зависимость от параметра управления и начального состояния.

Проблема управляемости, суть которой состоит в возможности перевода системы из заданного начального состояния на желаемое терминальное (конечное) состояние, важна для каждой модели динамической системы управления. Задача управления ансамблем траекторий дифференциальных включений имеет свою специфическую особенность. Можно рассмотреть задачи о полном или частичном погружении концов всевозможных траекторий системы на заданное терминальное множество.

Вопрос управляемости ансамбля траекторий для дифференциальных включений является актуальной, как сравнительно малоизученная задача для таких систем. Некоторые постановки задач управляемости для дифференциальных включений, понимаемые как управляемость ансамбля траекторий относительно заданных начальных и терминальных состояний, рассмотрены в работах [6,8,14]. Для таких систем изучены условия управляемости и некоторые свойства множества точек управляемости относительно терминального множества, в частности, изучена его топологическая структура.

К задачам управления для дифференциальных включений с запаздываниями характерна особенность, связанная со спецификой проблемы управления ансамблем траекторий и фактора запаздывания. Отдельные результаты по вопросу управления ансамбля траекторий для дифференциальных включений с запаздыванием получены в работе [9]. В случае линейности таких систем изучены условия управляемости ансамбля траекторий. В [12,16] для таких систем рассмотрена минимаксная задача оптимального управления ансамбля траекторий, а в [15] негладкая задача с терминальными ограничениями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное включение с запаздыванием вида

$$\dot{x} \in F(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad (3)$$

где $x \in R^n$, $F(t, y, u) \subset R^n$, $u \in R^m$, $t \geq t_0$. Здесь параметр u играет роль управляющих воздействий.

Допустимым управлением для системы (3) будем понимать произвольную измеримую ограниченную m -вектор-функцию $u = u(t)$, определенную на некотором отрезке $T = [t_0, t_1]$ времени. Обозначим $U_T(L)$ – множество всех допустимых управлений $u(t), t \in T$, со значениями из замкнутого шара $S_L = \{v \in R^m : \|v\| \leq L\}$. Обозначим через $H_T(u, \varphi^0)$ множество абсолютно-непрерывных решений $x = x(t), t \in T$, дифференциального включения (3), соответствующих управлению $u \in U_T(L)$ и начальному условию

$$x(t) = \varphi^0(t), \quad t \in T_0, \quad (4)$$

где $\varphi^0(\cdot) \in C^n(T_0)$ ($C^n(T_0)$ – пространство непрерывных на $T_0 = [t_0 - h, t_0]$ n -вектор-функций).

Рассмотрим следующую задачу управляемости для управляемого дифференциального включения с запаздыванием (3) в смысле полного погружения ансамбля траекторий на заданное терминальное множество $Y = Y(t) \subset R^n, t \geq t_0$.

Задача: требуется выяснить условия, при выполнении которых существует такое допустимое управление $u(t), t \in T$, что соответствующие ему все решения $x(\cdot) \in H_T(u, \varphi^0)$ удовлетворяют условию $x(t_1) \in Y(t_1)$.

Рассмотрим множество $X_T(t, u, \varphi^0) = \{\xi \in R^n : \xi = x(t), x(\cdot) \in H_T(u, \varphi^0)\}$, состоящее из всех точек пространства фазовых состояний, лежащих на траекториях $x(\cdot) \in H_T(u, \varphi^0)$ при заданном допустимом управлении $u = u(t)$, начальной функции $\varphi^0 \in C^n(T_0)$ и времени $t \in T = [t_0, t_1]$. Многозначное отображение $t \rightarrow X_T(t, u, \varphi^0)$ назовем ансамблем траекторий системы (3)–(4).

Определение 1. Будем говорить, что ансамбль траекторий системы (3) управляема из начального состояния $\varphi^0(\cdot) \in C^n(T_0)$ в множество терминальных состояний $Y = Y(t)$ (система (3) (φ^0, Y) -управляемая), если существует допустимое управление $u = u(t), t \in T = [t_0, t_1] \subset T_\infty = [t_0, \infty]$, такое, что соответствующий ансамбль траекторий удовлетворяет граничному условию

$$X_T(t_1, u, \varphi^0) \subset Y(t_1). \quad (5)$$

Определение 2. Ансамбль траекторий системы (3) назовем полностью управляемой в терминальное множество $Y = Y(t)$ (система (3) полностью Y -управляемая), если система (φ^0, Y) -управляемая при каждой начальной функции $\varphi^0(\cdot) \in C^n(T_0)$, для которой $\varphi^0(t_0) \notin Y(t_0)$.

Из определения 1 ясно, что (φ^0, Y) -управляемость системы означает разрешимость граничной задачи (3)–(4) в классе допустимых управлений $u = u(t)$, определенных на некотором отрезке времени $T = [t_0, t_1]$. Выяснение условий разрешимости этой задачи составляет основную цель исследования, предусмотренной в данной работе. Кроме того, будут исследованы условия полной Y -управляемости ансамбля траекторий рассматриваемой системы.

3. Методы исследования. Вспомогательные результаты

Из приведенных определений ясно, что для управляемости ансамбля траекторий системы (3) существенными являются условия компактности и выпуклости множества $X_T(t, u, \varphi^0)$, а также непрерывная зависимость $X_T(t, u, \varphi^0)$ от (t, u) . Поэтому, относительно правой части $F(t, x, u)$ дифференциального включения (3) будем налагать некоторые условия, которые должны обеспечить выполнение этих требований.

Предположение 1.

1) для любых $(t, x, y, u) \in T_\infty \times R^n \times R^n \times R^m$ множество $F(t, x, y, u)$ выпуклый компакт из R^n ;

2) многозначное отображение $(t, x, y, u) \rightarrow F(t, x, y, u)$ измеримо по $t \in T_\infty$ при $\forall (x, y, u) \in R^n \times R^n \times R^m$ и непрерывно по (x, y, u) при почти всех $t \in T_\infty$;

3) многозначное отображение $(x, y) \rightarrow F(t, x, y, u)$ удовлетворяет условию Липшица: $h(F(t, x', y', u), F(t, x'', y'', u)) \leq l(t, u)[\|x' - x''\| + \|y' - y''\|]$, $\forall x', x'', y', y'' \in R^n$, где функция $l(t, u)$ такая, что $l(t, u(t))$ – суммируема на $T = [t_0, t_1]$ при любом допустимом управлении $u = u(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$ ($h(F_1, F_2)$ – Хаусдорфово расстояние между множествами);

4) существуют функции $g_i(t, u)$, $i = 1, 2$, такие что $g_i(t, u(t))$, $i = 1, 2$, суммируемые на T функции при любых допустимых управлениях $u = u(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$ $T \subset T_\infty$, и справедливо

$$\|\xi\| \leq g_1(t, u)(\|x\| + \|y\|) + g_2(t, u), \forall \xi \in F(t, x, y, u), (t, x, y, u) \in T \times R^n \times R^n \times R^m.$$

5) опорная функция $C(F(t, x, y, u), \psi) = \max\{\langle \xi, \psi \rangle : \xi \in F(t, x, y, u)\}$ вогнута по (x, y) при почти всех $t \in T_\infty$ и всех $(u, \psi) \in R^m \times R^n$.

Из результатов работы [10] легко следует

Лемма 1. Пусть выполнено предположение 1. Тогда:

A) для любых $u \in U_T(L), T \in T_\infty$, $\varphi^0(\cdot) \in C^n(T_0)$ и $t \in T = [t_0, t_1]$ множество $X_T(t, u, \varphi^0)$ является непустым выпуклым компактом из R^n ;

B) многозначное отображение $(t, u) \rightarrow X_T(t, u, \varphi^0)$ непрерывно на $T \times U_T(L)$ в метрике $R^1 \times L_2(T)$, где $L_2(T)$ – пространство суммируемых с квадратом функций.

Пусть правая часть дифференциального включения (3) имеет вид:

$$F(t, x, y, u) = A(t)x + A_1(t)y + b(t, u), \tag{6}$$

т.е. рассмотрим следующую линейную модель:

$$\dot{x} \in A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + b(t, u(t)), \tag{7}$$

где $A(t)$ и $A_1(t)$ – квадратные матрицы размера n , $b(t, u)$ – непустое подмножество R^n . На правую часть дифференциального включения (7) будем налагать следующие условия:

Предположение 2.

1) элементы $n \times n$ -матриц $A(t)$ и $A_1(t)$ суммируемы на любом $T = [t_0, t_1] \subset T_\infty$;

2) для любых $(t, u) \in T_\infty \times R^m$ множество $b(t, u)$ – выпуклый компакт из R^n ;

3) многозначное отображение $(t, u) \rightarrow b(t, u)$ измеримо по $t \in T_\infty$ и непрерывно по $u \in R^m$, причем $\|\xi\| \leq \beta_1(t)\|u\| + \beta_2(t)$, $\forall \xi \in b(t, u)$, $(t, u) \in T_\infty \times R^m$, где $\beta_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, – суммируемые на любом отрезке $T \subset T_\infty$ функции.

4) опорная функция $C(b(t, u), \psi) = \max\{\langle \xi, \psi \rangle : \xi \in b(t, u)\}$ выпукла по $u \in V$ при почти всех $t \in T_\infty$.

В условиях предположения 2 справедливо следующее представление ансамбля траекторий системы (7) через ее параметры:

$$X_T(t, u, \varphi^0) = F(t, t_0)\varphi^0(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} F(t, \tau)A_1(\tau)\varphi^0(\tau-h)d\tau + \int_{t_0}^t F(t, \tau)b(\tau, u(\tau))d\tau, \tag{8}$$

где $F(t, \tau) - n \times n$ – матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = -F(t, \tau)A(\tau) - F(t, \tau+h)A_1(\tau+h), \tau \leq t,$$

$$F(t, t-0) = E, F(t, \tau) \equiv 0, \tau > t+0,$$

E – единичная $n \times n$ – матрица.

Лемма 2. Пусть выполняется предположение 2, причем для любых $(t, u) \in T_\infty \times R^m$ множество $b(t, u)$ – компакт из R^n (не обязательно выпуклый). Тогда все утверждения леммы 1 верны и кроме того, опорная функция $C(X_T(t, u, \varphi^0), \psi) = \max\{(\xi, \psi) : \xi \in X_T(t, u, \varphi^0)\}$ выпукла по $u \in U_T(L)$ при всех $t \in T$ и всех $\psi \in R^n$.

В самом деле, если выполняются условия предположения 2, то многозначное отображение $(t, x, y, u) \rightarrow F(t, x, y, u)$ вида (6) удовлетворяет условиям предположения 1. Поэтому для системы управления (7) все утверждения леммы 1 остаются справедливыми. Воспользовавшись представлением ансамбля траекторий линейной системы (7), и учитывая при этом свойств интеграла от многозначных отображений, убедимся, что свойство выпуклости каждого множества $X_T(t, u, \varphi^0)$, $t \in T = [t_0, t_1]$, сохраняется без требования выпуклости значений многозначного отображения $(t, u) \rightarrow b(t, u)$.

Далее, используя формулу (8) и свойств опорных функций, имеем:

$$C(X_T(t, u, \varphi^0), \psi) = (F(t, t_0)\varphi^0(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} F(t, \tau)A_1(\tau)\varphi^0(\tau-h)d\tau, \psi) + \int_{t_0}^t C(F(t, \tau)b(\tau, u(\tau)), \psi)d\tau. \tag{9}$$

Из этой формулы для опорной функции множества $X_T(t, u, \varphi^0)$ легко следует, что при выполнении условия 4) предположения 2 опорная функция $C(X_T(t, u, \varphi^0), \psi)$ выпукла по $u \in U_V(T)$ при всех $t \in T$ и всех $\psi \in R^n$.

4. Основные результаты.

Согласно определению 1, система (3) (φ^0, Y) – управляема тогда и только тогда, когда соотношение (5) имеет место при некотором допустимом управлении $u \in U_T(L)$, т.е. система включений: $X_T(t_1, u, \varphi^0) \subset Y(t_1)$, $u \in U_T(L)$ совместна. Следовательно, в силу лемму 2 и результатов работы [6], справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для (φ^0, Y) – управляемости системы (3) необходимо, а для линейной системы (7) необходимо и достаточно, существование $t_1 > t_0$, такого, что

$$\sup_{\|\psi\|=1} \inf_{u \in U_T(L)} \overline{\text{conc}}[C(X_T(t_1, u, \varphi^0), \psi) - C(Y(t_1), \psi)] \leq 0, \tag{10}$$

где $\overline{\text{conc}}f$ –вогнутое замыкание [2] функции f .

Приведенная теорема, хотя она дает неявный критерий управляемости ансамбля траекторий в виде соотношения (10), усложненное последовательностью трех операций: $\sup_{\|\psi\|=1} \inf_{u \in U_V(T)} \overline{\text{conc}}f$, будет теоретической основой для последующих, полученных нами результатов по условиям управляемости.

Применяя формулу (9) для опорной функции множества $X_T(t_1, u, \varphi^0)$ и используя свойств операции перехода к вогнутым замыканиям, из теоремы 1 получим следующий результат.

Теорема 2. Для (φ^0, Y) - управляемости системы (7) необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\sup_{\|\psi\|=1} \left\{ (F(t_1, t_0)\varphi^0(t_0), \psi) + \int_{t_0}^{t_0+h} (F(t, \tau)A_1(\tau)\varphi^0(\tau-h), \psi) d\tau + \inf_{u \in U_T(L)} \overline{\text{conc}}_{\psi} \left[\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t)b(t, u(t)), \psi) - C(Y(t_1), \psi) \right] \right\} \leq 0$$

при некотором $t_1 > t_0$.

Рассмотрим еще один частный случай системы с запаздыванием (3).

Пусть в (7) $b(t, u) = B(t)u + Q(t)$, где $B(t)$ – $n \times m$ -матрица, $Q(t)$ – непустое подмножество R^n , рассмотрим линейное управляемое дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B(t)u(t) + Q(t) \tag{11}$$

Предположение 3.

- 1) элементы $n \times m$ -матрицы $B(t)$ суммируемы на любом $T = [t_0, t_1] \subset T_{\infty}$;
- 2) $Q(t)$, $t \geq t_0$, – выпуклые замкнутые ограниченные подмножества R^n ;
- 3) многозначное отображение $t \rightarrow Q(t)$, $t \geq t_0$, измеримо.

При выполнении предположения 3 все условия предположения 2 выполняется. Поэтому, поскольку

$$\inf_{u \in U_T(L)} \overline{\text{conc}}_{\psi} \left[\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t)b(t, u(t)), \psi) - C(Y(t_1), \psi) \right] = -L \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + \overline{\text{conc}}_{\psi} \left[\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t)Q(t), \psi) dt - C(Y(t_1), \psi) \right],$$

то из теоремы 2 вытекает следующий критерий управляемости ансамбля траекторий системы (11):

$$\sup_{\|\psi\|=1} \left\{ (F(t_1, t_0)\varphi^0(t_0), \psi) + \int_{t_0}^{t_0+h} (F(t_1, \tau)A_1(\tau)\varphi^0(\tau-h), \psi) d\tau + -L \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + \overline{\text{conc}}_{\psi} \left[\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t)Q(t), \psi) dt - C(Y(t_1), \psi) \right] \right\} \leq 0. \tag{12}$$

Введем обозначение:

$$S(t, \varphi^0) = F(t, t_0)\varphi^0(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} F(t, \tau)A_1(\tau)\varphi^0(\tau-h) d\tau + \int_{t_0}^t F(t, \tau)Q(\tau) d\tau, \quad t > t_0.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & (F(t_1, t_0)\varphi^0(t_0), \psi) + \int_{t_0}^{t_0+h} (F(t_1, \tau)A_1(\tau)\varphi^0(\tau-h), \psi) d\tau + \\ & + \overline{\text{conc}}_{\psi} \left[\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t)Q(t), \psi) dt - C(Y(t_1), \psi) \right] = \\ & = -\overline{\text{co}}_{\psi} [C(Y(t_1), \psi) - C(S(t_1, \varphi^0), \psi)] = -C(Y(t_1) \ast_{\underline{}} S(t_1, \varphi^0), \psi), \end{aligned}$$

где $Y(t_1) \ast_{\underline{}} S(t_1, \varphi^0)$ – геометрическая разность множеств $Y(t_1)$ и $S(t_1, \varphi^0)$, т.е. $Y(t_1) \ast_{\underline{}} S(t_1, \varphi^0) = \{\xi \in R^n : \xi + S(t_1, \varphi^0) \subset Y(t_1)\}$. Следовательно, соотношение (12) принимает вид:

$$\inf_{\|\psi\|=1} \{L \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + C(Y(t_1)*S(t_1, \varphi^0), \psi)\} \geq 0. \tag{13}$$

Положим:

$$P(t) = \int_{t_0}^t F(t, \tau) Q(\tau) d\tau, t > t_0.$$

$$p^0 = F(t, t_0)\varphi^0(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} F(t, \tau) A_1(\tau)\varphi^0(\tau - h) d\tau. \text{ Тогда } S(t, \varphi^0) = p^0 + P(t), t > t_0,$$

$C(Y(t_1)*S(t_1, \varphi^0), \psi) = C(Y(t_1)*P(t_1), \psi) - (p^0, \psi)$. Следовательно, условию (13) можно записать так:

$$\inf_{\|\psi\|=1} \{L \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + C(Y(t_1)*P(t_1), \psi) - (p^0, \psi)\} \geq 0. \tag{14}$$

Таким образом, мы получили следующий критерий управляемости ансамбля траекторий системы (11).

Теорема 3. Ансамбль траекторий системы (11) (φ^0, Y) – управляема тогда и только тогда, когда имеет место соотношение (14), где $t_1 > t_0$ и $L > 0$.

Теперь воспользовавшись этим результатом, будем выяснять условия полной Y – управляемости системы (11).

Теорема 4. Для полностью Y – управляемости системы (11) необходимо, чтобы $Y(t_1)*P(t_1) \neq \emptyset$ и для каждого $\psi \in R^n, \|\psi\|=1$, удовлетворяющего условию $c(Y*P(t_1), \psi) < 0$, имело место неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \|B'(t)F'(t_1, t)\psi\| dt \neq 0. \tag{15}$$

Доказательство. Ясно, что выполнение условия (13) при каждой начальной функции $\varphi^0(\cdot) \in C^n(T_0)$, для которой $\varphi^0(t_0) \notin Y(t_0)$, является необходимым для полной Y – управляемости системы (10). А условие (13) имеет эквивалентную форму (14). Если $Y(t_1)*P(t_1) = \emptyset$, то $C(Y(t_1)*P(t_1), \psi) = -\infty$, и ясно, что (14) не выполняется. Следовательно, $Y(t_1)*P(t_1) \neq \emptyset$.

Если допустим, что $\int_{t_0}^{t_1} \|B'(t)F'(t_1, t)\psi^*\| dt = 0$ при некотором векторе $\psi^* \in R^n, \|\psi^*\|=1$, для которого $C(Y*P(t_1), \psi^*) < 0$, то при $(p^0, \psi^*) > 0$ имеем:

$$\inf_{\|\psi\|=1} \{L \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + C(Y(t_1)*P(t_1), \psi) - (p^0, \psi)\} \leq C(Y(t_1)*P(t_1), \psi^*) - (p^0, \psi^*) < 0.$$

А это противоречит тому, что система (11) полностью Y – управляема. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 5. Пусть существует $t_1 > t_0$ такой, что $Y(t_1)*P(t_1) \neq \emptyset$ и

$$\lambda \equiv \inf_{\|\psi\|=1} \int_{t_0}^{t_1} \|B'(t)F'(t_1, t)\psi\| dt > 0. \tag{16}$$

Тогда система (11) является полностью Y – управляемой.

Доказательство. Согласно теореме 3, нам достаточно показать, что соотношения (14) имеет место для каждой начальной функции $\varphi^0(\cdot) \in C^n(T_0), \varphi^0(t_0) \notin Y(t_0)$, и для некоторого t_1

, $t_1 > t_0$.

Имеем:

$$\begin{aligned} & \inf_{\|\psi\|=1} \left\{ L \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + C(Y(t_1)*P(t_1), \psi) + (p^0, \psi) \right\} \geq \\ & \geq L \inf_{\|\psi\|=1} \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + \inf_{\|\psi\|=1} C(Y(t_1)*P(t_1), \psi) + \inf_{\|\psi\|=1} (p^0, \psi) \geq \\ & = L\lambda + \inf_{\|\psi\|=1} C(Y(t_1)*P(t_1), \psi) - \|p^0\|. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку, по условию $\lambda > 0$, то при

$$L \geq \frac{\|p^0\| - \inf_{\|\psi\|=1} C(Y(t_1)*P(t_1), \psi)}{\lambda}$$

из (17) получим (14). А это завершает доказательство теоремы.

Доказанная теорема дает достаточные условия полной управляемости ансамбля траекторий на заданное терминальное множество. Из них условие $Y(t_1)*P(t_1) \neq \emptyset$ является также и необходимым (теорема 4). А условие (16) есть усиление необходимого условия (15) на все $\psi \in R^n$, $\|\psi\| = 1$.

В качестве замечания отметим, что когда система управления (11) стационарна, т.е. $A(t) \equiv A$, $A_1(t) = A$, $B(t) \equiv B$, то условие невырожденности определяющих уравнений [1] системы

$$\dot{x} = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t)$$

является достаточным для выполнения условия (16).

5. Заключение

Здесь для управляемого дифференциального включения с запаздыванием рассматривалась проблема управляемости, как задача о полном погружении ансамбля траекторий на заданное терминальное множество. При изучении задачи управляемости ансамбля траекторий основные условия на правую часть рассмотренных дифференциальных включений даны в виде предположений 1–3. Они охватывают широкий класс дифференциальных включений с запаздыванием (3), а также их линейные модели вида (7) и (11). Среди важных характеристик ансамбля траекторий дифференциальных включений, использованных в исследуемом вопросе, следует отметить свойства, данные в вспомогательных леммах.

Из полученных результатов самым общим является теорема 1. Хотя она представляет собой неявный критерий управляемости для рассмотренных систем, остальные результаты получены опираясь именно на эту теорему. В теореме 2 даны необходимые и достаточные условия (φ^0, Y) -управляемости ансамбля траекторий линейной по состоянию системы (7). А в теореме 3 они уточнены для линейной системы, как по состоянию, так и по управлению. Отметим, что особенность линейной структуры систем, нашли свою выражение в исследовании проблемы управляемости, о чем свидетельствует результаты теорем 4 и 5.

Изученное свойство управляемости ансамбля траекторий дифференциальных включений представляет непосредственный интерес для систем вида

$$\dot{x} = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t) + q(t), \quad (18)$$

когда $q(t)$ – параметр неопределенных внешних воздействий со значениями из $Q(t) \subset R^n$. Теоремы 4 и 5, дают условия управляемости ансамбля траекторий для линейной модели (18) объекта управления с запаздыванием в условиях неточности возмущающих сил.

В случае, когда правые части рассмотренных систем однозначны, мы имеем обычные детерминированные модели систем управления с запаздыванием. Поэтому, из результатов исследования можно получить соответствующие следствия для таких систем.

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. –508 с.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
3. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды математического института АН СССР. – 1985. –169. – с. 194-252.
4. Сатимов Н.Ю. К методам решения игровых задач управления пучками траекторий // Доклады АН СССР, – 1990. Т. 314, №1. –с. 132-134.
5. Плотников А.В. Задача управления пучками траекторий // Сибирский математический журнал. – 1992. –33, №2. – с. 196-199.
6. Отакулов С. Об условиях управляемости дифференциальных включений. Изв. РАН. Техн. кибернет. –1992. -№2. -с. 57–62.
7. Плотников А. В. Управляемые квазидифференциальные уравнения и их некоторые свойства // Дифференциальные уравнения. –1998. –34, №10. – с. 1332-1336.
8. Отакулов С., Собирова Г.Д. О некоторых свойствах множества M-управляемости дифференциальных включений. Узб.матем.журн.-2001, №1.-с. 35–41.
9. Исраилов И., Отакулов С. Об одном свойстве ансамбля траекторий дифференциального включения с запаздыванием. Труды межд. конф. «Современные проблемы математической физики и информационных технологий», Том 2, Ташкент, 2003. –с. 213-215.
10. Отакулов С., Холиярова Ф.Х. К теории управляемых дифференциальных включений с запаздывающим аргументом // Доклады АН РУз. –2005, № 3. – с. 14-17.
11. Plotnikov A.V., Komleva T.A. Piecewise constant controlled linear fuzzy differential inclusions. Universal Journal of Applied Mathematics. 2013, 1(2).– pp. 39-43.
12. Исраилов И, Холиярова Ф.Х. Минимаксная задача управления для дифференциального включения с запаздывающим аргументом. Материалы международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» (DSSCO-2018). Минск, 1-5 октября 2013 г. С. 139-141.
13. Половинкин Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. –М.: Физматлит, 2015. –253 с.
14. Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. – Riga, Lambert Academic Publishing, 2019. –144 p.
15. Отакулов С., Холиярова Ф.Х. О задаче управления ансамблем траекторий системы с запаздыванием в условиях информационных ограничений. Abstracts of the international scientific conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies”, National University of Uzbekistan, Tashkent, November 14-15, 2019. pp. 169-170.
16. Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. About the conditions of optimality in the minimax problem for controlling differential inclusion with delay. *Academica: An International Multidisciplinary Research Journal*, Vol.10, Issue 4 (April 2020). pp. 685–694.

УДК 51-7:519.63:519.614

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ**К.М.Шаимов¹, М.Х.Эшмуродов¹, И.К.Хужаев²**¹Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт²Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий при ТУИТ

Аннотация. Предложен симбиоз методов прямых и обычной прогонки для решения двумерных неоднородных уравнений параболического типа, когда граничные условия по первой координате принадлежат первому роду, а по второй – произвольному роду.

Метод апробирован для задач установления с граничными условиями в виде синусоидальных и разрывных функций.

Ключевые слова: теплопередача, аппроксимация, собственные числа и векторы.

Ikki o'lchovli issiqlik uzatishning chizikli masalalarini yechish uchun differensial-ayirmalar usuli

Аннотация. Биринчи координат чегараларида биринчи жинсли, иккинчисида эса ихтиёрый шартлар берилганида биржинслимас параболик тенгламани ечиш учун тўғри чизиклар ва оддий ҳайдаш усулларининг симбиози таклиф этилган.

Усул синусоидал ва узилишли функция кўринишидаги чегаравий шартларда барқарорлаштириш масаласи учун синовдан ўтказилган.

Калит сўзлар: issiqlik uzatish, approksimatsiya, xos sonlar va vektorlar.

Differential difference method for two-dimensional linear heat transfer problems

Abstract. A symbiosis of direct and ordinary run methods is proposed for solving two-dimensional inhomogeneous parabolic equations, when the boundary conditions for the first coordinate belong to the first genus, and for the second – to an arbitrary genus.

The method has been tested for problems of establishment with boundary conditions in the form of sinusoidal and discontinuous functions.

Keywords: heat transfer, approximation, eigenvalues and vectors.

Введение. Одним из широко распространенных методов решения уравнений в частных производных является конечноразностный метод. В литературе можно найти различные явные и неявные способы аппроксимации уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов линейного и нелинейного характера [1-4]. Одну и ту же схему аппроксимации уравнения можно реализовать для различного рода граничных условий. Для многомерных задач разработаны методы расщепления по физическим и математическим признакам, методы переменных направлений, метод предиктор-корректор и другие, которые обеспечивают разные точности аппроксимации и быстроты сходимости [5-9].

Общим недостатком этих методов, в которых процессы прямой и обратной прогонки осуществляются по отдельным направлениям, является несогласованность результатов по разным направлениям. В самом деле, при аппроксимации уравнений по конкретному направлению (координатной оси) значения искомого соседних слоев берутся из предыдущего приближения или временного слоя. В связи с этим, даже в случае использования метода предиктор-корректор [6, 9] окончательное решение для временного шага представляет не точное решение, какое-то приближение к нему. Т.е. к неувязке конечноразностной аппроксимации добавляются неточности, обусловленные использованием приближенных значений искомого в соседних слоях.

С этой точки зрения отличается метод прямых, основной составляющий дифференциально-разностного метода, который позволяет получить точное решение системы линейных конечноразностных уравнений.

Сущность метода прямых заключается в том, что для фиксированной координаты конечноразностные уравнения представляются в единой матричной форме. Основным элементом данного матричного уравнения является трехдиагональная матрица перехода к конечным разностям для конкретной координаты. Ищутся вспомогательные матрицы, использование которых позволяет перейти к отдельным уравнениям относительно определенной линейной комбинации искомого, а по другой независимой переменной в двухмерной задаче можно использовать простую прогонку или точное решение дифференциального уравнения. Если по одной из независимых переменных использовать простую прогонку, то решение будет точным (в рамках машинных округлений), как и в случае использования метода прямых и точных методов решения по всем независимым переменным.

В работах [10, 11] приведена полная информация о вспомогательных матрицах, которые составляются из собственных чисел и векторов трехдиагональной матрицы, для задачи Дирихле, т.е. на границах заданы значения искомого функции. Многочисленные примеры применения метода прямых для решения многомерных линейных эллиптических, параболических и гиперболических уравнений приведены в работе [11], так что применение метода к многомерным задачам не составляет труда.

В работах [12-14] приведены способы определения собственных векторов трехдиагональных матриц перехода, составленных для смешанных граничных условий первого и второго родов в начале и конце отрезка.

Ниже предлагается численный метод интегрирования двухмерных параболических уравнений, когда на границах области по первой декартовой координате заданы значения искомого функции (граничные условия первого рода), а на границах по второй декартовой координате –

произвольная комбинация из условий первого, второго и третьего родов. В рамках работы ограничивались рассмотрением двухмерного параболического уравнения применительно к задачам теплопередачи [3].

Постановка задачи. Двухмерный процесс теплопередачи описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (1)$$

где $T(x, y, t)$ – температура в точке с декартовыми координатами x, y в момент времени t ; a^2 – коэффициент температуропроводности материала; $f(x, y, t)$ – суммарная интенсивность внутренних и внешних источников тепла в точке (x, y) , приведенная по произведению теплоемкости и плотности материала.

Заданы начальное распределение температуры в расчетной области

$$T(x, y, 0) = T^0(x, y), \quad (2)$$

граничные условия по оси x –

$$T(0, y, t) = \mu_0(y, t), \quad T(l_x, y, t) = \mu_l(y, t) \quad (3)$$

и по оси y –

$$\begin{aligned} \theta_0 \frac{\partial T(x, 0, t)}{\partial y} + \eta_0 T(x, 0, t) &= \varphi(x, t), \\ \theta_l \frac{\partial T(x, l_y, t)}{\partial y} + \eta_l T(x, l_y, t) &= \psi(x, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Функции $T^0(x, y, t)$, $\mu_0(y, t)$, $\mu_l(y, t)$, $\varphi(x, t)$ и $\psi(x, t)$ могут иметь постоянные, переменные значения и разрывы. Значения параметров θ_0 , η_0 , θ_l и η_l принимаются согласно постановке задачи. Например, случай, когда θ_l представляет коэффициент теплопроводности материала, а η_l – коэффициент теплоотдачи, соответствует граничному условию третьего рода при $x = l$.

Требуется разработать численный метод, который обеспечивает согласованность решений по двум координатным направлениям.

Дифференциально-разностный метод для решения задачи. Вводятся равномерные шаги

$$h_x = \frac{l_x}{N_x + 1} \text{ и } h_y = \frac{l_y}{N_y + 1} \text{ по координатам } x \text{ и } y,$$

неравномерный шаг по времени $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, а также сеточные искомая функция $u_{i,j}^n$ и функции $f_{i,j}^n$, $\mu_{0,j}^n$, $\mu_{l,j}^n$...

Сначала для фиксированного значения j ($0 < j < N_y + 1$) уравнение аппроксимируем для внутренних узлов по x со вторым порядком точности:

$$\frac{\partial u_{i,j}^n}{\partial t} = \frac{a^2}{h_x^2} (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + a^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial y^2} + f_{i,j}^n.$$

В частных случаях при $i = 1$ и $i = N_x$ реализуются граничные значения искомой функции $\mu_{0,j}^n$ и $\mu_{l,j}^n$.

Систему конечноразностных уравнений записываем в матричной форме:

$$\frac{\partial U_j^n}{\partial t} = \frac{a^2}{h_x^2} A U_j^n + a^2 \frac{\partial^2 U_j^n}{\partial y^2} + F_j^n, \quad (5)$$

где

$$U_j^n = (u_{1,j}^n, u_{2,j}^n, \dots, u_{N_x-1,j}^n, u_{N_x,j}^n)^T,$$

$$F_j^n = \left(f_{1,j}^n + \frac{a^2}{h_x^2} \mu_{0,j}^n, f_{2,j}^n, \dots, f_{N_x-1,j}^n, f_{N_x,j}^n + \frac{a^2}{h_x^2} \mu_{l,j}^n \right)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{N_x}.$$

Здесь и далее знак $(\dots)^T$ – транспонирование матрицы.

Матрицу A представим в виде [10,11]:

$$A = V \Lambda V^{-1},$$

где элементы диагональной матрицы Λ представляют собой собственных чисел

$$\lambda_s = -2 \left(1 + \cos \frac{\pi s}{N_x + 1} \right)$$

матрицы A , а элементы фундаментальной матрицы V

$$v_{s,p} = (-1)^{s+p} \sqrt{\frac{2}{N_x + 1}} \sin \frac{\pi s p}{N_x + 1}$$

являются элементами s -го собственного вектора A ; $V^{-1} (=V)$ – обратная V матрица.

Умножение обеих сторон уравнения (5) на V^{-1} слева приводит к уравнению

$$\frac{\partial \bar{U}_j^n}{\partial t} = \frac{a^2}{h_x^2} \Lambda \bar{U}_j^n + a^2 \frac{\partial^2 \bar{U}_j^n}{\partial y^2} + \bar{F}_j^n, \tag{6}$$

где введены новая искомая вектор-функция $\bar{U}_j^n = V^{-1} U_j^n$, вектор-функция $\bar{F}_j^n = V^{-1} F_j^n$ и учтено тождество $V^{-1} A U_j^n = \Lambda \bar{U}_j^n$ [11].

Обратный переход к скалярным искомым приводит к автономным уравнениям

$$\frac{\partial \bar{u}_{i,j}^n}{\partial t} = \frac{a^2}{h_x^2} \lambda_i \bar{u}_{i,j}^n + a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j}^n}{\partial y^2} + \bar{f}_{i,j}^n. \tag{7}$$

Согласно введенным заменам и тождеству $V^{-1} = V$, здесь $\bar{u}_{i,j}^n = \sum_{p=1}^{N_x} v_{i,p} u_{p,j}^n$,

$$\bar{f}_{i,j}^n = v_{i,1} \frac{a^2 \mu_{0,j}^n}{h_x^2} + v_{i,N_x} \frac{a^2 \mu_{l,j}^n}{h_x^2} + \sum_{p=1}^{N_x} v_{i,p} u_{p,j}^n.$$

Для новых уравнений (7) составляются начальное условие

$$\bar{u}_{i,j}^0 = \sum_{p=1}^{N_x} v_{i,p} T_{p,j}^0$$

и граничные условия

$$\theta_0 \frac{\partial \bar{u}_{i,0}^n}{\partial y} + \eta_0 \bar{u}_{i,0}^n = \bar{\varphi}_i^n \equiv \sum_{p=1}^{N_x} v_{i,p} \varphi_p^n,$$

$$\theta_l \frac{\partial \bar{u}_{i,N_y+1}^n}{\partial y} + \eta_l \bar{u}_{i,N_y+1}^n = \bar{\psi}_i^n \equiv \sum_{p=1}^{N_x} v_{i,p} \psi_p^n.$$

Для внутренних узлов по j уравнение (7) аппроксимируется неявной схемой, где по координате y обеспечивается второй порядок точности:

$$\frac{\bar{u}_{i,j}^n - \bar{u}_{i,j}^{n-1}}{\tau_n} = \frac{a^2}{h_x^2} \lambda_i \bar{u}_{i,j}^n + \frac{a^2}{h_y^2} (\bar{u}_{i,j+1}^n - 2\bar{u}_{i,j}^n + \bar{u}_{i,j-1}^n) + \bar{f}_{i,j}^n.$$

Отсюда в обычном порядке находим коэффициенты прогоночных коэффициентов

$$\alpha_j = \frac{a_j}{b_j - c_j \alpha_{j-1}}, \quad \beta_{j-1} = \frac{c_j \beta_{j-1} - d_j}{b_j - c_j \alpha_{j-1}}. \tag{8}$$

где

$$a_j = c_j = \sigma_y = \frac{\tau_n a^2}{h_y^2}, \quad \sigma_x = \frac{\tau_n a^2}{h_x^2},$$

$$b_j = 1 + 2\sigma_y - \sigma_x \lambda_i, \quad d_j = -\tau_n \bar{f}_{i,j}^n - \bar{u}_{i,j}^{n-1}.$$

Для третьего рода граничных условий ($\theta_0 \neq 0, \eta_0 \neq 0$), которые в частных случаях: при $\theta_0 = 0, \eta_0 = 1$ представляют условия первого рода, а при $\theta_0 = 1, \eta_0 = 0$ – условия второго рода, при $y = 0$ также обеспечим второй порядок точности аппроксимации

$$\theta_0 \frac{-3\bar{u}_{i,0}^n + 4\bar{u}_{i,1}^n - \bar{u}_{i,2}^n}{2h_y} + \eta_0 \bar{u}_{i,0}^n = \bar{\varphi}_i^n.$$

С учетом $a_1 \bar{u}_{i,2}^n - b_1 \bar{u}_{i,1}^n + c_1 \bar{u}_{i,0}^n = d_1$ получим значения прогоночных коэффициентов при $j = 0$:

$$\alpha_0 = \frac{(4a_1 - b_1)\theta_0}{(3a_1 - c_1)\theta_0 - 2h_y a_1 \eta_0}, \quad \beta_0 = \frac{-\theta_0 d_1 - 2a_1 h_y \bar{\varphi}_i^n}{(3a_1 - c_1)\theta_0 - 2h_y a_1 \eta_0}. \tag{9}$$

После того, как определены по формулам (9) значения α_0 и β_0 , по формулам (8) для $1 \leq j \leq N_y$ вычисляются α_j, β_j . Согласно значениям α_j, β_j и граничным условиям, определяются значения \bar{u}_{i,N_y+1}^n .

При $y = l_y$ условие третьего рода, второе условие из (4) при $\theta_l = 1, \eta_l \neq 0$, также аппроксимируем вторым порядком точности:

$$\frac{\theta_l}{2h_y} (3\bar{u}_{i,N_y+1}^n - 4\bar{u}_{i,N_y}^n + \bar{u}_{i,N_y-1}^n) + \eta_l \bar{u}_{i,N_y+1}^n = \bar{\psi}_i^n.$$

С учетом $\bar{u}_{i,N_y-1}^n = \alpha_{N_y-1} \bar{u}_{i,N_y}^n + \beta_{N_y-1}$ и $\bar{u}_{i,N_y}^n = \alpha_{N_y} \bar{u}_{i,N_y+1}^n + \beta_{N_y}$ находим

$$\bar{u}_{i,N_y+1}^n = \frac{2h_y \bar{\psi}_i^n - \theta_l [\beta_{N_y-1} - (4 - \alpha_{N_y-1}) \beta_{N_y}]}{2h_y \eta_l + \theta_l [3 - (4 - \alpha_{N_y-1}) \alpha_{N_y}]}.$$

При $\theta_l = 0, \eta_l = 1$ оно соответствует первому роду граничных условий, а при $\theta_l = 1, \eta_l = 0$ – для второму роду граничных условий.

Прогоночный процесс проводится для сечений $i = 1..N_x$.

Обратный переход к u_i^n , с учетом тождества $V = V^{-1}$, при $i = 1..N_x$ и $j = 0..N_y + 1$ осуществляется по формуле

$$u_{i,j}^n = \sum_{p=1}^{N_x} v_{i,p} \bar{u}_{p,j}^n.$$

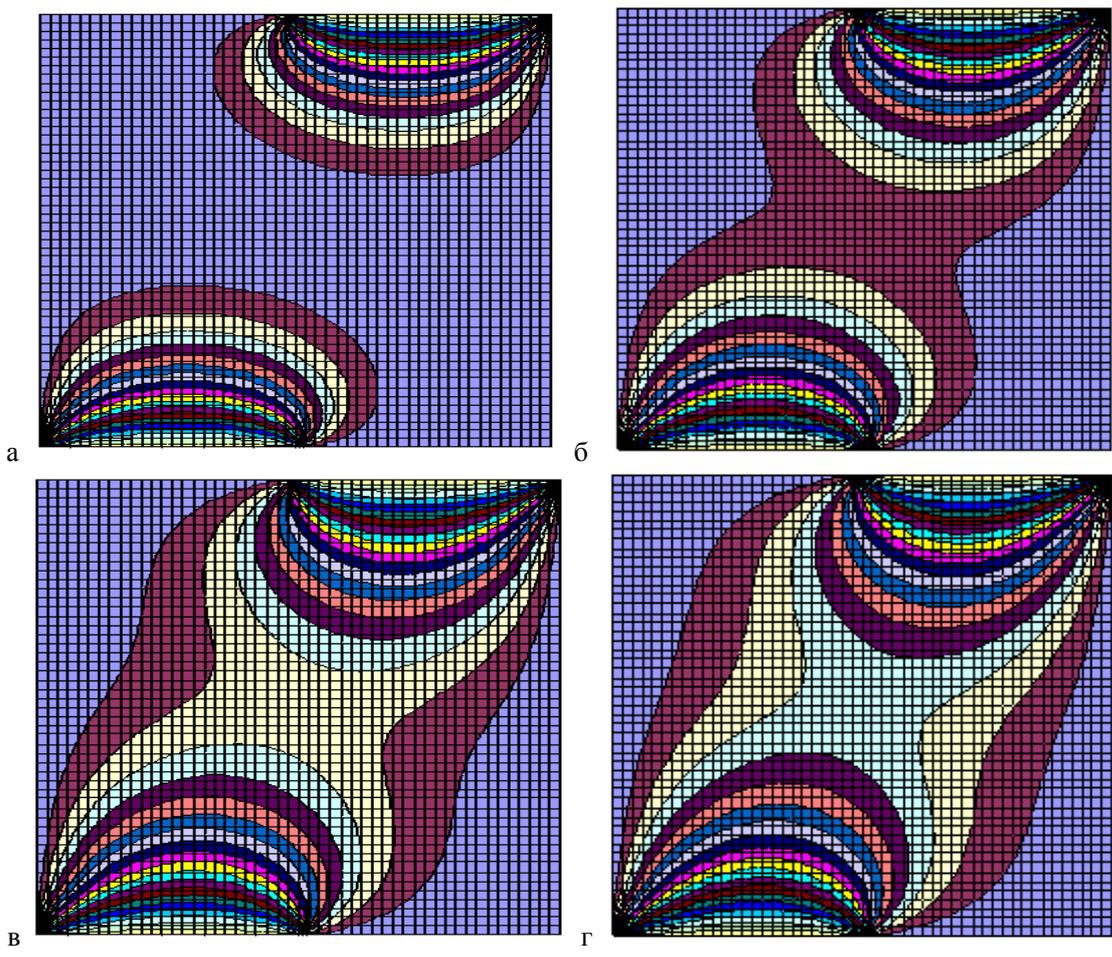
Далее приведем результаты тестовых задач, которые получены по представленному выше алгоритму.

Тестовая задача 1. Применим алгоритм для решения задачи с разрывными граничными условиями в квадратной области $(0 \leq x \leq 1) \cap (0 \leq y \leq 1)$. Уравнение – однородное. Начальное поле температуры – однородное: $T(x, y, 0) = 10$. При $x = 0$ и $x = 1$ задана однородная температура: $T(0, y, t) = T(1, y, t) = 10$, т.е. $\mu_0(y, t) = 10$ и $\mu_l(y, t) = 10$. (Здесь и далее t, τ - в секундах; x, y, h_x, h_y - в метрах; a^2 - $m^2 / сек \dots$)

При $t > 0$ и $\theta_0 = \theta_l = 0$, $\eta_0 = \mu_l = 1$ на границах $y = 0$ и $y = l$ установились разрывные поля температуры:

$$T(x, 0, t) = \varphi(x, t) = \begin{cases} 30 & \text{при } 0 \leq x \leq 0.5, \\ 10 & \text{при } 0.5 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$T(x, 1, t) = \psi(x, t) = \begin{cases} 10 & \text{при } 0 \leq x \leq 0.5, \\ 30 & \text{при } 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$$



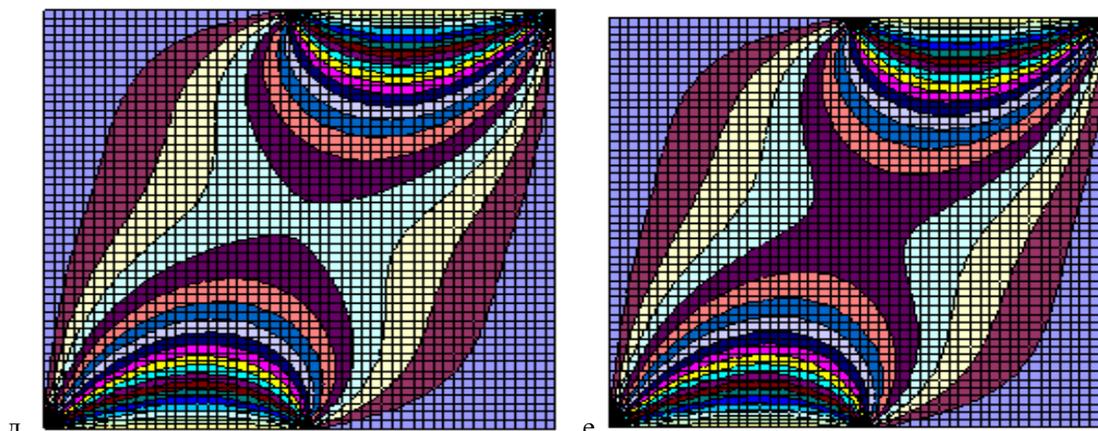


Рис. 1. Поле изотерм, полученные при $\tau = 0.02$, $n = 1000$ (а), $n = 2000$ (б), $n = 3000$ (в), $n = 4000$ (г), $n = 5000$ (д) и $n = 6000$ (е).

$$T(0, y, t) = T(1, y, t) = 10, \quad T(x, 0, t) = T(x, 1, t) = 10,$$

$$T(x, 0, t) = \begin{cases} 30 & \text{при } 0 \leq x \leq 0.5, \\ 10 & \text{при } 0.5 < x \leq 1; \end{cases} \quad T(x, 1, t) = \begin{cases} 10 & \text{при } 0 \leq x \leq 0.5, \\ 30 & \text{при } 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$$

Расчеты проводили для случая $a^2 = 0.001 \text{ m}^2 / \text{сек}$, $h_x = h_y = 0.02$, ($N_x = N_y = 49$). Процесс установления для n -го временного шага считали законченным при выполнении условия

$$E_n = \max_{(0 < i < N_{x+1}) \cap (0 < j < N_{y+1})} |\bar{u}_{i,j}^n - \bar{u}_{i,j}^{n-1}| \leq \varepsilon.$$

Первые результаты решения параболического уравнения (рис. 1) относились к $\tau = 0.02$, $\varepsilon = 0.001$. Ось абсцисс соответствует x , а ось ординат - y . Изотермы построены с интервалом 1.

Максимальное отклонение двух последовательных приближений при $n = 1$ составило 119,282100, что обусловлено наличием разрывов в граничных условиях. Вычисления прекратили при $E_{7065} < 0.001$.

Картина изотерм при $E_{7065} < 0.001$ достаточно близка к результату, которая получена для $n=6000$.

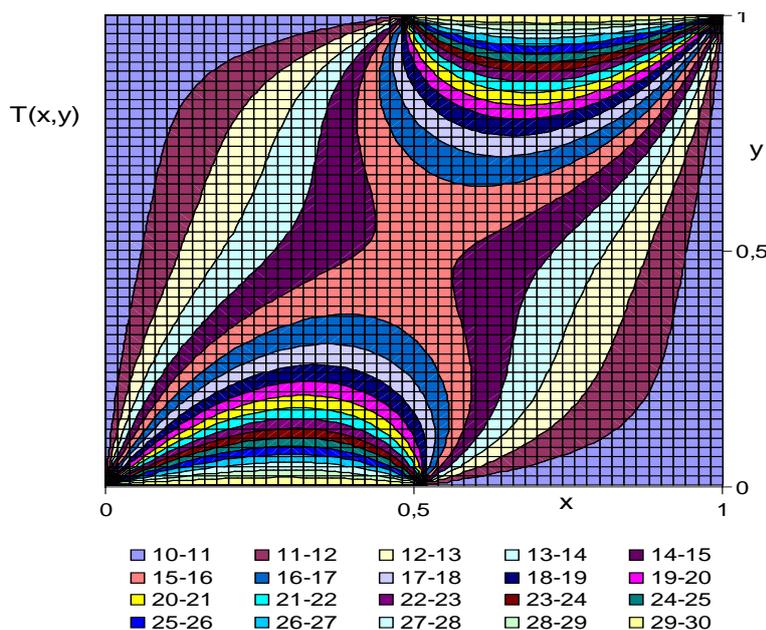


Рис. 2. Поле изотерм, полученное при решении эллиптического уравнения (данные см. рис. 1).

Сравнение ее с рис. 2, где представлено решение эллиптического уравнения при тех же граничных условиях, показывает, что общей зоной двух высокотемпературных областей в первом случае соответствует интервалу 14-15, а во втором случае – интервалу 15-16. В этой разнице и выражается преимущество предлагаемого метода совместного использования методов прямых и обычной прогонки.

Аналогичные расчеты проводились для шага по времени $\tau = 0.2, 1, 5, 25$ и 100 . Эти результаты показали, что увеличение значения шага по времени приводит к уменьшению времени расчета. Для обеспечения точности 0.0001 установления при $\tau = 0.2$ требовалось 1877 , при $\tau = 1$ – 461 шагов, при $\tau = 5$ – 113 , при $\tau = 25$ – 31 , а при $\tau = 100$ – 12 шагов по времени.

Сравнения этих результатов с решением эллиптического уравнения (рис.2) показали, что наилучшее приближение получается при $\tau = 1$. Увеличение или уменьшение шага времени от $\tau = 1$ приводит к увеличению абсолютного значения разностей температур во внутренних узлах расчетной области.

Эти результаты показывают, что метод введения фиктивного времени при решении эллиптического уравнения многократно увеличивает объем вычислений. Разовое применение представленного выше метода позволяет получить точное решение конечноразностных уравнений.

Тестовая задача 2. Рассмотрим одномерную задачу на установления с участием периодических по времени граничных условий.

Для однородного уравнения (1) начальное условие – нулевое. При $x = 0$ и $x = 1$ граничные условия не зависят от продольной координаты:

$$T(0, y, t) = \mu_0(y, t) = 5 \sin \pi t,$$

$$T(1, y, t) = \mu_1(y, t) = 2 \sin 2\pi t.$$

При $y = 0$ и $y = 1$ налагаются условия “не протекания” тепла:

$$\frac{\partial T(x, 0, t)}{\partial y} = \varphi(x, t) = 0, \quad \frac{\partial T(x, 1, t)}{\partial y} = \psi(x, t) = 0.$$

При заданных условиях ожидается решение, которое не зависит от продольной координаты. Т.е. результат должен быть одномерным.

Расчёты по этой задаче вели в квадратной области 1×1 при значениях показателей сеточного метода $\tau = 0.02$, $h_x = h_y = 0.02$, $N_x = N_y = 49$. Максимальное отклонение решений последующих периодов убывало с увеличением времени. Пробные расчёты показали, что после 50-го периода ($t=100$) оно составляло 10^{-5} . В связи с этим необходимые результаты для визуализации сохраняли начиная с $t=100$.

На рис. 3 представлены изотермы в 51-м периоде с интегралом $\Delta T = 0.5$. Левосторонние возмущения температуры происходят в промежутку $[-5, 5]$, а правосторонние – в интервале $[-2; 2]$.

Заметим, что значение шага τ по времени выбирали исходя из характера граничных функций и более четкой визуализации результатов расчета. В ПЭВМ средних мощностей продолжительность расчета составляла не более 5-и минут.

Обсуждение результатов. В данной работе демонстрировали возможности совместного использования метода прямых и конечноразностного метода решения параболического уравнения. Представлены результаты решения задач на установления при граничных условиях с синусоидальными и разрывными функциями.

При аппроксимации уравнения и краевых условий обеспечен второй порядок точности по координатам $O(h_x^2 + h_y^2)$. Представленный материал обеспечивает первый порядок точности по времени $O(\max_n \{\tau_n\})$. Заменяв правую часть конечноразностного уравнения (7)

среднеарифметическим значением выражений для n -го и $n-1$ -го шагов по времени и используя равномерный шаг, можно увеличить его до $O(\tau^2)$.

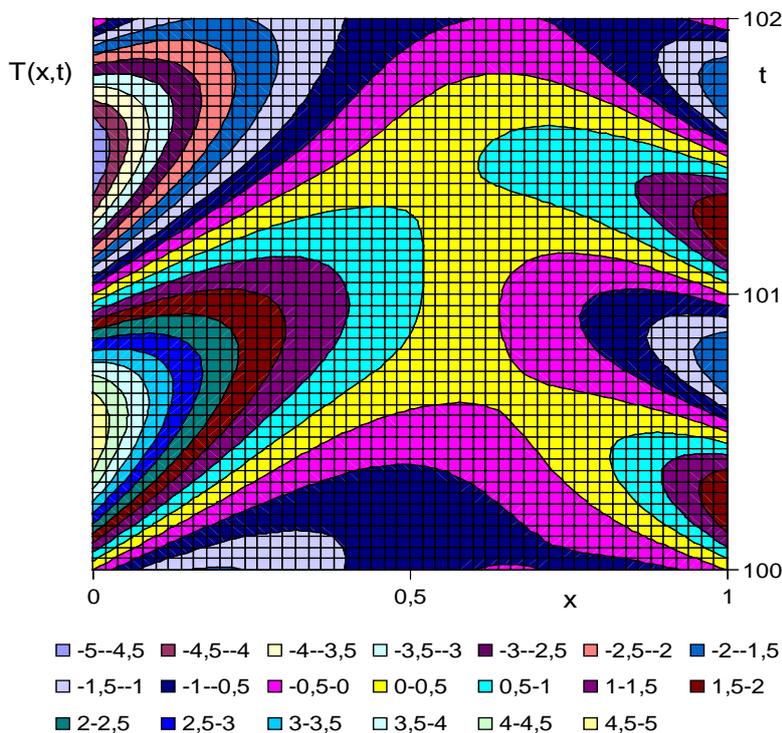


Рис. 3. Изотермы в координатах (x,t) , полученные для $a^2 = 0.1 \text{ m}^2 / \text{sek}$,

$$T(0, y, t) = 5 \sin \pi t, \quad T(1, y, t) = 2 \sin 2\pi t, \quad \frac{\partial T(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T(x, 1, t)}{\partial y} = 0$$

Успехом предложенного способа численного решения параболического уравнения является то, что для фиксированного времени t использовали одни и те же значения сеточных функций или их линейных комбинаций как при аппроксимации по координате x , так и по координате y . Т.е. неувязки, обусловленные несогласованностью используемых в конечноразностных уравнениях сеточных функций из соседних слоев, которые накапливаются по времени, устранены. В конечном итоге точность вычислений оценивается точностью аппроксимации, а значения шагов выбираются в зависимости от характера начальных и граничных условий.

Алгоритм допускает адаптации для уравнений гиперболического типа с соответствующими поправками. В этом случае обеспечивается точность $O(\tau_{n\max} + h_x^2 + h_y^2)$ в рамках машинных округлений.

Круг решаемых задач можно расширить, если одного из условий по координате x заменить условием второго рода. Для таких случаев значения λ_s , $\nu_{s,p}$, $\nu_{s,p}^{-1}$ приведены в работах [13,15].

Литература

1. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. - М.: Наука, 1972. - 678 с.
2. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. - Ч. 1. - 349 с., ч. 2 - 400 с.
3. Цой П.В. Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса: Прямые и обратные задачи нестационарной теплопроводности и термоупругих напряжений. Гидродинамика и теплообмен в каналах сложного профиля / 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Изд-во МЭИ, 2005. - 568 с.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 784 с.

5. Юдаев Б.Н. Теплопередача. Учебник для вузов. – М.: Высшая школа», 1973. – 360 с.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
7. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем: учебное пособие. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
9. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – С. 728 (1-й том 392 с.).
10. Фаддеева В.Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. – Тр. МИ АН СССР, 1949, том 28. – С. 73-103. (Из Общероссийского математического портала Math-Net).
11. Каримбердиева С. Численные методы решения дифференциально-разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. – Ташкент: Фан, 1983. – 112 с.
12. Хужаев И.К., Хужаев Ж.И., Равшанов З.Н. Аналитическое решение задачи о собственных значениях и векторах матрицы перехода из параболического уравнения к конечно-разностным уравнениям при решении задачи Дирихле // Узбекский журнал: Проблемы информатики и энергетики, 2017, №2. – С. 12-19.
13. Каримов И.К., Хужаев И.К., Хужаев Ж.И. Применение метода прямых при решении одномерного уравнения параболического типа при граничных условиях второго и первого родов // Вестник КРАУНЦ, 2018, 1 (21). – С. 78-93.
14. Алиев Ф.А., Хужаев Ж.И., Равшанов З.Н. Дифференциально-разностный метод для решения одномерных уравнений параболического типа при граничных условиях первого и второго родов // Научный вестник Андижанского Государственного университета. – Андижан, 2017. – №4. – С. 5-10.
15. Хужаев И.К., Махкамов М.К. Модификация дифференциально-разностного метода для решения уравнения давления для двухмерных задач гидродинамики // Научный вестник Андижанского Государственного университета. – Андижан, 2018. – №3. – С. 5-11.

УДК: 517 У 697

ЭФЕКТИВНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА СОКРАЩЕННОЙ ДИЗЬЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Э. Урунбаев

Самаркандский государственный университет

Аннотация. В дискретной математике минимизация булевых функций в классе дизьюнктивных нормальных форм является одной из необходимых задач. В настоящей работе изложен эффективный метод синтеза сокращенной дизьюнктивной нормальной формы булевой функции.

Ключевые слова: эффективный метод, синтез, сокращенная, дизьюнктивная нормальная форма, булева функция, элементарная конъюнкция, склеивания, поглощения.

An effective method for synthesizing the abbreviated disjunctive normal form of a Boolean function

Abstract. In discrete mathematics, minimizing Boolean functions in the class of disjunctive normal forms is one of the necessary tasks. This paper presents an effective method for synthesizing the reduced disjunctive normal form of a Boolean function.

Keyword: effective method, synthesis, abbreviated, disjunctive normal form, Boolean function, elementary conjunctions, gluing, absorption.

Буль функцияларини қисқартирилган дизьюнктив нормал шаклини ҳосил қилишни самарали усули

Аннотация. Дискрет математикада Буль функцияларини дизьюнктив нормал шакли кўринишида минималлаштириш асосий масалалардан бири ҳисобланади. Ушбу ишда буль функцияларини қисқартирилган дизьюнктив нормал шаклини ҳосил қилишнинг самарали усули баён этилган.

Ключевые слова: самарали усул, синтез, қисқартирилган дизьюнктив нормал шакл, буль функцияси, элементар конъюнкция, бирлаштириш, ютилиш.

В настоящей работе, основываясь на методе Мак-Класки предлагается алгоритм построения сокращенной дизъюнктивной нормальной формы (д.н.ф) булевых функций, заданных в табличной форме.

Известно, что одной из главных задач дискретной математики является минимизация функций алгебры логики. Обычно для нахождения минимальных д.н.ф. функции f строится сокращенная д.н.ф. для f . Затем из сокращенной д.н.ф. получается совокупность всех тупиковых д.н.ф. и перебором множества всех тупиковых д.н.ф. выделяется минимальная д.н.ф. реализующая функцию f [1].

Введем некоторые определения, необходимые для изложения алгоритма.

Для простоты изложения рассмотрим конъюнкцию

$$\bigcup_{x_i} \sigma_{i_1} x_{i_1} \& x_{i_2} \sigma_{i_2} \& \dots \& x_{i_k} \sigma_{i_k},$$

областью определения которой является $(n - k)$ – мерный подкуб E^{n-k} n – мерного куба E^n .

Наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E^n$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in E^n$, определяющиеся следующим образом:

$$\alpha_j = \begin{cases} \sigma_j, & \text{если } j \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}; \\ 0, & \text{если } j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}; \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} \sigma_j, & \text{если } j \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}; \\ 1, & \text{в противном случае, где } j = \overline{1, k}, k \leq n, \end{cases}$$

являются соответственно нижней и верхней вершинами $(n - k)$ – мерного подкуба куба E^n .

Подкуб E^{n-k} назовем $(n - k)$ – мерным интервалом, соответствующим конъюнкции \bigcup . Каждому набору $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ подкуба E^{n-k} можно сопоставить десятичное число соответственно $A_{\tilde{\alpha}}$ и $A_{\tilde{\beta}}$,

определяемое по следующей формуле:

$$A_{\tilde{\alpha}} = \sum_{i=0}^n \alpha_i 2^{n-i-1};$$

$$A_{\tilde{\beta}} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i 2^{n-i-1}.$$

Нормой $\|\tilde{\alpha}\|$ набора $\tilde{\alpha} \in E^n$ называется число единичных разрядов $\tilde{\alpha}$. Пара номеров наборов $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, (A_{\tilde{\alpha}}, A_{\tilde{\beta}})$ соответствует $(n - k)$ – мерному интервалу N_{\bigcup} конъюнкции \bigcup , если

$$A_{\tilde{\beta}} - A_{\tilde{\alpha}} = 2^k, k = \overline{0, n-1} \tag{1}$$

Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана следующими значениями (таблица 1.):

Таблица 1

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	...	0	$f(0, 0, \dots, 0)$
0	0	...	1	$f(0, 0, \dots, 1)$
...
1	1	...	1	$f(1, 1, \dots, 1)$

Алгоритм построения сокращенной д.н.ф. функции $f(\tilde{x})$ состоит из двух этапов. На первом этапе из заданной таблицы значений функции $f(\tilde{x})$ формируем последовательность номеров A_1, A_2, \dots, A_m в порядке возрастания их нормы $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$ для всех $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ наборов, в которых $f(\tilde{\alpha}) = 1$ (таблица 2).

Таблица 2

$A_{\tilde{\alpha}}$	A_1	A_2	...	A_m
$\ \tilde{\alpha}_A\ $	a_1	a_2	...	a_m

На втором этапе из всех пар (A_i, A_j) таблица 2 удовлетворяющих условию (1), получаем совокупность всех пар, соответствующих максимальным интервалам размерности первой функции $f(x)$, и формируем таблицу 3, где a_i, b_i – нормы наборов $\alpha_{A'_i}, \tilde{\alpha}'_{B_i}$ соответственно. Причем, $0 \leq a'_i \leq a_m, a'_m + 1 = b_i$.

Таблица 3

A'	A'_1	A'_1	...	A'_m
B	B_1	B_2	...	B_m
$\ \tilde{\alpha}_{A'}\ $	a'_1	a'_2	...	a'_m
$\ \tilde{\alpha}_B\ $	b_1	b_2	...	b_m

В таблице 2 фиксируем номера наборов, не образовавших пары в таблице 3. Очевидно, что такие наборы образуют максимальные интервалы в N_f [2].

Множество пар, соответствующих максимальным интервалам функции $f(\tilde{x})$, строим методом индукции по возрастанию размерности интервалов, отвечающих образуемым парам на данном шаге.

Пусть построено множество всех пар (C, D) , соответствующих интервалам размерности $i-1$.

Таблица 4

C	C_1	C_2	...	$C_{m_{i-1}}$
D	D_1	D_2	...	$D_{m_{i-1}}$
$\ \tilde{\alpha}_C\ $	c_1	c_2	...	$c_{m_{i-1}}$
$\ \tilde{\alpha}_D\ $	d_1	d_2	...	$d_{m_{i-1}}$

Здесь (C_j, D_j) ($j=1, m_{i-1}$) – пары номеров, отвечающих интервалам размерности $i-1$ в N_f ; c_j, d_j – нормы наборов $\tilde{\alpha}_{C_j}, \tilde{\alpha}_{D_j}$ соответственно; $c_j = d_j - (i-1)$; $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{m_{i-1}}$

Для всех $i, j, 1 \leq i, j \leq m_{i-1}$, удовлетворяющих $d_j - d_i = 1$ и $c_j - c_i = 1$, проверяем условие

$$D_j - D_i = C_j - C_i = 2^l, \tag{2}$$

где $0 \leq l \leq n$.

При выполнении (2) пара (C_i, D_j) будет соответствовать интервалу размерности $i-1$ в N_f . Из всех таких пар формируем таблицу 5, где c'_i, d'_j ($i=\overline{1, m_i}$) – нормы наборов $\tilde{\alpha}_{c'_i}, \tilde{\alpha}_{D'_i}$ соответственно. Причем $c'_i = d'_i - i, 0 \leq c'_i \leq c_{m_{i-1}}$ $i=\overline{1, m_i}$. Пары (C_i, D_j) , для которых не выполняется условие (2), фиксируется в таблице 4 и они соответствуют максимальному интервалу. Процесс заканчивается на очередном p -м шаге, если все пары (C_p, D_p) соответствуют максимальным интервалам.

Таблица 5

C'	C'_1	C'_2	...	C'_{m_i}
D'	D'_1	D'_2	...	D'_{m_i}
$\ \tilde{\alpha}_{c'}\ $	c'_1	c'_2	...	c'_{m_i}
$\ \tilde{\alpha}_{D'}\ $	d'_1	d'_2	...	d'_{m_i}

Литература

1. Журавлев Ю.И. Алгоритм построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики, «Дискретная математика и математические вопросы кибернетики». М., «Энергия», 1975.
2. Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств. Издательство «Иностранная литература», М., 1962.

УДК.539.3

ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ**Б.Ф.Ялгашев¹, Ф.У.Косимова²**¹Ташкентский областной центр повышения квалификации²Самарканд государственнй университет

E-mail: f_kasimova1986@mail.ru

Аннотация. В работе приведены приближенные уравнения крутильных колебаний круговых цилиндрических слоистых оболочек и стержней, вытекающих из общих уравнений, ранее полученных авторами. Рассмотрен случай нулевого приближения в бесконечных суммах, входящих в структуру уравнений колебания. Выведены также приближенные уравнения колебания трехслойной вязкоупругой оболочки с тонким срединным слоем, трехслойной вязкоупругой оболочки, коэффициенты Пуассона слоев которой постоянны, а также упругой трехслойной оболочки. Для удобства применения при решении задач инженерной практики, полученные уравнения приведены в безразмерных координатах. Для сравнительного анализа получены также, как частный случай, приближенные уравнения однородной круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки и сравнены с известными результатами других авторов.

Ключевые слова: Слоистая оболочка, вязкоупругость, трехслойная оболочка, крутильные колебания, напряжения, деформации, однородность.

Uch qatlamli silindrik qovushoq-elastik qobiq buralma tebranishlari taqribiy tenglamalari

Annotatsiya. Tadqiqot ishida ilgari avtorlar tomonidan ishlab chiqilgan umumiy tenglamalar asosida uch qatlamli silindrik qovushoq-elastik qobiq buralma tebranishlari taqribiy tenglamalari keltirilgan. Tebranish tenglamalari tarkibiga kiruvchi cheksiz yig'indilarda nolinch qoqinlashish bilan chegaralanilgan holi tekshirilgan. Olingan tenglamalarning xususiy holi sifatida o'rt qatlamli yuqqa bo'lgan uch qatlamli qovushoq-elastik qobiqning, uch qatlamli elastic qobiqning, qatlamlari materiallarining Poisson koeffitsiyenlari o'zgarmas bo'lgan uch qatlamli qovushoq-elastik qobiqning tebranishlari taqribiy tenglamalari keltirib chiqarilgan. Olingan tenglamalarni muhandislik amaliyotiga oid amaliy masalalarni yechishda qulaylik uchun, ular o'lgamsiz koordinatalarga o'tkazilgan. Qiyosiy tahlil uchun, xususiy holda, bir jinsli doiraviy silindrik qovushoq-elastik qobiqning ham taqribiy tenglamalari keltirib chiqarilgan va boshqa mualliflarning natijalari bilan taqqoslangan.

Kalit so'zlar: Qatlamli qobiq, qovushoq-elastiklik, uch qatlamli qobiq, buralma tebranishlar, kuchlanishlar, deformatsiyalar, bir jinslilik.

Approximate equations of torsional vibrations of a three-layer cylindrical viscoelastic shell

Abstract. The paper gives approximate equations of torsional vibrations of circular cylindrical layered shells arising from the general equations previously obtained by the authors. The considered case of zero approximation in infinite sums. The conclusions also come close to the equations of vibration of a three-layer viscoelastic shell with a thin middle layer, a three-layer viscoelastic shell, Poisson's ratios of the layers that are constant, as well as an elastic three-layer shell. For ease of use in solving problems of engineering practice, the obtained equations are given in dimensionless coordinates. For comparative analysis, approximate equations of a homogeneous circular cylindrical viscoelastic shell are also obtained, as a special case, and compared with the known results of other authors.

Keywords. Laminate, viscoelasticity, three-layer shell, torsional vibrations, stresses, deformations, homogeneity.

Введение. Прикладные задачи динамики оболочек приводится к интегрированию приближенных уравнений колебания классического, типа Кирхгоффа-Лява и уточненных типа С.П.Тимошенко или других уравнений более высокого порядка по производным [1-4]. Разработаны приближенные уравнения колебания круговых цилиндрических оболочек с

учетом различных реологических, температурных, анизотропных и других свойств материалов [5-6]. В большинстве своем указанные теории разработаны для однородных оболочек [7], и поэтому, применение их для исследования динамики слоистых элементов конструкций сопровождаются с определенными трудностями математического характера и обеспечения выполнения условий контакта между слоями [8-10]. Поэтому, в последнее время стали разрабатывать теории колебания слоистых элементов конструкций [11-12].

Количество работ, посвященных разработке новых теорий колебания конструктивных элементов большое. Несмотря на это и в настоящее время продолжается изучение нестационарных колебаний таких элементов на основе новых теорий и уравнений колебания. Настоящая статья посвящена выводу приближенных уравнений нестационарных крутильных колебаний слоистых круговых цилиндрических вязкоупругих и упругих оболочек, вытекающих из общих уравнений колебания трехслойной вязкоупругой оболочки, как предельные случаи и пригодные для решения прикладных задач.

Полученные в работе [12] уравнения крутильных колебаний трехслойной круговой цилиндрической упругой оболочки легко может быть обобщены на случай вязкоупругой оболочки. В этом случае уравнения крутильных колебаний трехслойной цилиндрической вязкоупругой оболочки имеют вид

$$\begin{cases} \frac{a^2}{r_1^2} \left(1 + \frac{a^2 - r_1^2}{12} \lambda_1 + \frac{r_1^2 (a^2 - r_1^2)}{144} \lambda_1^2 \right) [C_{11}(r_1) v_0^{(0)} + \xi C_{21}(r_1) v_0^{(1)}] = R_{\mu 1}^{-1} [F_{r\theta}^{(1)}(z, t)], \\ \frac{r_2^2}{b^2} \left[1 + \frac{r_2^2 - b^2}{4} \lambda_2 + \frac{r_2^2 (r_2^2 - b^2)}{16} \lambda_2^2 \right] [C_{12}(r_2) v_0^{(0)} + \xi C_{22}(r_2) v_0^{(1)}] = R_{\mu 2}^{-1} [F_{2\theta}^{(2)}(z, t)]. \end{cases} \quad (1)$$

где введены обозначения

$$C_{1i}(r_i) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^n \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}, \quad C_{2i}(r_i) = \frac{1}{2} \lambda_0 - \frac{2}{r_i^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_2(n, r) \lambda_0^{n+1} \frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}; \quad (2)$$

$v_0^{(0)}$, $v_0^{(1)}$ - главные части крутильного перемещения срединного слоя оболочки; a и b - внутренний и внешний радиусы оболочки; r_1 , r_2 - внутренний и внешний радиусы срединного слоя оболочки; ξ - радиус промежуточной [5] поверхности срединного слоя оболочки (Рис.1)

$$\xi = \frac{r_1}{2} \left(\chi - \frac{r_1}{r_2} \right), \quad 2 + \frac{r_1}{r_2} \leq \chi \leq 2 \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2}; \quad (3)$$

дифференциальные операторы λ_m^n в переменных z, t имеют следующие виды

$$\eta_{2,n}(r) = \ln \frac{r}{\xi} + \frac{n^2 + n - 1}{2(n+1)(n+2)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \lambda_m^k(\zeta) = \left[\rho_m R_{\mu m}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right]^k; \quad (4)$$

$m = 0, 1, 2; k = 1, 2, 3, \dots$

$R_{\mu m}$ - вязкоупругие операторы материалов слоев, равные

$$R_{\mu m}(\zeta) = \mu_m \left[\zeta(t) - \int_0^t K_{\mu m}(t - \tau) \zeta(\tau) d\tau \right];$$

μ_m - коэффициенты Ламе материалов слоев; $K_{\mu m}(\tau)$ - ядра интегральных операторов. При этом предполагается, что вязкоупругие операторы $R_{\mu m}$ - обратимы, а их ядра $K_{\mu m}(\tau)$ - произвольные.

Уравнения (1) в соответствии с формулами (2) и (3) для операторов λ_m^n ($m = 0, 1, 2; n = 1, 2, 3, \dots$) являются интегро-дифференциальными уравнениями неограниченно высокого порядка. Данные уравнения содержат в себе главные части $v_0^{(0)}$ и $v_0^{(1)}$ крутильного перемещения v_0 точек некоторой "промежуточной" поверхности срединного слоя трехслойной цилиндрической оболочки.

Уравнения (1) являются общими. Эти уравнения в своих правых частях правильно учитывают внешние усилия, приложенные к поверхностям оболочки. Если вязкоупругие операторы $R_{\mu 0}, R_{\mu 1}, R_{\mu 2}$ известны для соответствующих вязкоупругих сред, то уравнения (1) характеризуются правильным отражением зависимостей от них. Эти уравнения, при значениях постоянного χ , определяемых формулой (3) являются уравнениями относительно главных частей смещения точек соответственно внутренней контактной (с внутренним несущим слоем), срединной или внешней контактной (с внешним несущим слоем) поверхностей срединного слоя.

Нетрудно увидеть, что уравнения (1) из-за бесконечно высокого порядка по производным не пригодны для применения при решении прикладных задач динамики трехслойных оболочек. Применение их в инженерных расчетах также затруднено. Отсюда следует, что необходимо ограничить порядок уравнений в системе (1), т.е. в бесконечных суммах (2), входящих в их структуры, ограничиться нулевым ($n = 0$), первым ($n = 1$), вторым ($n = 2$) и т.д. приближениями. Предположив, что выполнены условия [7], относительно области применимости «усеченных» таким образом уравнений, проанализируем различные приближения уравнений (1). Ниже рассмотрим несколько приближенных уравнений колебания, следующих из (1) при ограничении в них различными приближениями. Так, ограничиваясь в уравнениях (1) нулевым приближением получаем уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{r_1^2} \left(1 + \frac{a^2 - r_1^2}{12} \lambda_1 + \frac{r_1^2 (a^2 - r_1^2)}{144} \lambda_1^2 \right) \times \\ & \times \left[\frac{r_1^2}{4} \lambda_0 v_0^{(0)} + \xi \left(\frac{1}{2} (\lambda_0 - \frac{4}{r_1^2}) + \frac{r_1^2}{8} (\ln \frac{r_1}{\xi} - \frac{1}{4}) \lambda_0^2 \right) v_0^{(1)} \right] = R_{\mu 1}^{-1} [F_{r\theta}^{(1)}(z, t)], \\ & \frac{r_2^2}{b^2} \left[1 + \frac{r_2^2 - b^2}{4} \lambda_2 + \frac{r_2^2 (r_2^2 - b^2)}{16} \lambda_2^2 \right] \times \\ & \times \left[\frac{r_2^2}{4} \lambda_0 v_0^{(0)} + \xi \left(\frac{1}{2} (\lambda_0 - \frac{4}{r_2^2}) + \frac{r_2^2}{8} (\ln \frac{r_2}{\xi} - \frac{1}{4}) \lambda_0^2 \right) v_0^{(1)} \right] = R_{\mu 2}^{-1} [F_{r\theta}^{(2)}(z, t)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Допустим, что срединный слой трехслойной оболочки тонкий. Тогда можно считать, что $\ln \frac{r_i}{\xi} = 0, (i = 1, 2)$. В этом случае уравнения колебания (5) принимают более простой вид

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{r_1^2} \left(1 + \frac{a^2 - r_1^2}{12} \lambda_1 + \frac{r_1^2 (a^2 - r_1^2)}{144} \lambda_1^2 \right) \left[\frac{r_1^2}{4} \lambda_0 v_0^{(0)} + \xi \left(\frac{1}{2} (\lambda_0 - \frac{4}{r_1^2}) - \frac{r_1^2}{32} \lambda_0^2 \right) v_0^{(1)} \right] = R_{\mu 1}^{-1} [F_{r\theta}^{(1)}(z, t)], \\ & \frac{r_2^2}{b^2} \left[1 + \frac{r_2^2 - b^2}{4} \lambda_2 + \frac{r_2^2 (r_2^2 - b^2)}{16} \lambda_2^2 \right] \left[\frac{r_2^2}{4} \lambda_0 v_0^{(0)} + \xi \left(\frac{1}{2} (\lambda_0 - \frac{4}{r_2^2}) - \frac{r_2^2}{32} \lambda_0^2 \right) v_0^{(1)} \right] = R_{\mu 2}^{-1} [F_{r\theta}^{(2)}(z, t)]. \end{aligned} \tag{6}$$

Ограничиваясь первым приближением, из уравнений (1) получим систему уравнений, каждое уравнение которой имеет восьмой порядок. Из-за громоздкости этих уравнений мы их не приводим. При необходимости можно быстро их получить, положив $n = 1$ в общих уравнениях колебания.

Как видно из формулы (4) для интегро-дифференциального оператора λ_0 он имеет второй порядок по производным. Следовательно, в связи с линейностью оператора λ_0^2 , он будет иметь в своем составе четвертые производные по координате, времени и смешанная производная четвертого порядка, т.е.

$$\lambda_0^2(\zeta) = \frac{1}{b_0^4} R_{\mu 0}^{-2} \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial t^4} \right) - 2 \frac{1}{b_0^2} R_{\mu 0}^{-1} \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial t^2 \partial z^2} \right) + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial z^4}. \tag{7}$$

Аналогичные структуры имеют и операторы λ_1^2 и λ_2^2 .

Исходя из видов операторов $\lambda_i, \lambda_i^2 (i = 0, 1, 2)$, определяемых формулами типа (4) и (7) нетрудно видеть, что каждое уравнение системы (5) имеет восьмой порядок по производным.

Ограничиваясь в них производными не выше четвертого порядка, получим следующую систему уравнений, каждое уравнение которой имеет четвертый порядок по производным, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{r_1^2} \left(1 + \frac{a^2 - r_1^2}{12} \lambda_1 \right) \left[\frac{r_1^2}{4} \lambda_0 v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} \left(\lambda_0 - \frac{4}{r_1^2} \right) v_0^{(1)} \right] &= R_{\mu_1}^{-1} [F_{r\theta}^{(1)}(z, t)], \\ \frac{r_2^2}{b^2} \left[1 + \frac{r_2^2 - b^2}{4} \lambda_2 \right] \left[\frac{r_2^2}{4} \lambda_0 v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} \left(\lambda_0 - \frac{4}{r_2^2} \right) v_0^{(1)} \right] &= R_{\mu_2}^{-1} [F_{r\theta}^{(2)}(z, t)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Допустим, что коэффициенты Пуассона материалов слоев не зависят от времени и постоянны. Тогда ядра вязкоупругих операторов удовлетворяют равенствам [10]

$$K_{\lambda_m}(t - \tau) = K_{\mu_m}(t - \tau) = K_m(t - \tau).$$

Равенство ядер вязкоупругих операторов позволяет написать их в следующем виде

$$R_{(\lambda, \mu)_m}(\zeta) = (\lambda_m, \mu_m) M_m(\zeta),$$

где

$$M_m(\zeta) = \left[\zeta(t) - \int_0^t K_m(t - \tau) \zeta(\tau) d\tau \right],$$

С учетом последних выражений уравнения (8) в развернутом виде запишутся как

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{r_1^2} \left(\frac{1}{b_0^2} M_0^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{r_1^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} v_0^{(1)} \right) - \frac{2\xi a^2}{r_1^4} \left[1 + \frac{a^2 - r_1^2}{12} \left(\frac{1}{b_1^2} M_1^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] v_0^{(1)} + \\ + \frac{a^2(a^2 - r_1^2)}{12r_1^2} \left[\frac{1}{b_0^2 b_1^2} M_0^{-1} M_1^{-1} \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) - \left(\frac{1}{b_0^2} M_0^{-1} + \frac{1}{b_1^2} M_1^{-1} \right) \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] \left(\frac{r_1^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} v_0^{(1)} \right) = \\ = \frac{1}{\mu_1} M_1^{-1} [F_{r\theta}^{(1)}(z, t)], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{r_2^2}{b^2} \left(\frac{1}{b_0^2} M_0^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{r_2^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} v_0^{(1)} \right) - \frac{2\xi r_2^2}{b^4} \left[1 + \frac{r_2^2 - b^2}{4} \left(\frac{1}{b_2^2} M_2^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] v_0^{(1)} + \\ + \frac{r_2^2(r_2^2 - b^2)}{4b^2} \left[\frac{1}{b_0^2 b_2^2} M_0^{-1} M_2^{-1} \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) - \left(\frac{1}{b_0^2} M_0^{-1} + \frac{1}{b_2^2} M_2^{-1} \right) \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] \left(\frac{r_2^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} v_0^{(1)} \right) = \\ = \frac{1}{\mu_2} M_2^{-1} [F_{r\theta}^{(2)}(z, t)], \end{aligned}$$

Для круговой цилиндрической упругой трехслойной оболочки уравнения (9) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{r_1^2} \left(\frac{1}{b_0^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{r_1^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} v_0^{(1)} \right) - \frac{2\xi a^2}{r_1^4} \left[1 + \frac{a^2 - r_1^2}{12} \left(\frac{1}{b_1^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] v_0^{(1)} + \\ + \frac{a^2(a^2 - r_1^2)}{12r_1^2} \left[\frac{1}{b_0^2 b_1^2} \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) - \left(\frac{1}{b_0^2} + \frac{1}{b_1^2} \right) \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] \left(\frac{r_1^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} v_0^{(1)} \right) = \frac{1}{\mu_1} [F_{r\theta}^{(1)}(z, t)], \\ \frac{r_2^2}{b^2} \left(\frac{1}{b_0^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{r_2^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} v_0^{(1)} \right) - \frac{2\xi r_2^2}{b^4} \left[1 + \frac{r_2^2 - b^2}{4} \left(\frac{1}{b_2^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] v_0^{(1)} + \\ + \frac{r_2^2(r_2^2 - b^2)}{4b^2} \left[\frac{1}{b_0^2 b_2^2} \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) - \left(\frac{1}{b_0^2} + \frac{1}{b_2^2} \right) \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] \left(\frac{r_2^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} v_0^{(1)} \right) = \frac{1}{\mu_2} [F_{r\theta}^{(2)}(z, t)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично можно вывести и другие приближенные уравнения крутильных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой и упругой трехслойной оболочки, ограничиваясь первым, вторым и другими приближениями в уравнениях (1).

Заметим, что для правильной формулировки граничных условий при решении прикладных задач с привлечением того или иного приближения уравнений (1) следует также

ограничиться тем же приближением в формулах для определения перемещений всех слоев и ненулевых компонент напряжения всех слоев. Например, когда для решения задачи применяются уравнения (5) или (9), следует применять выражения, полученные из формул для перемещений и напряжений нулевым приближением, т.е. при $n = 0$. Для срединного слоя оболочки указанные выражения имеют вид

$$\begin{aligned} v_0(r, z, t) &= r v_0^{(0)} + \xi \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{2} \ln \frac{r}{\xi} \right) \lambda_0 v_0^{(1)} + O(r^3), \\ \tau_{r\theta}^{(0)}(r, z, t) &= R_{\mu 0} \left\{ \frac{r^2}{4} \lambda_0 v_0^{(0)} + \xi \left(\frac{1}{2} \lambda_0 - \frac{2}{r^2} + \frac{r^2}{8} \eta_{2,0}(r) \lambda_0^2 \right) v_0^{(1)} \right\} + O(r^4), \\ \tau_{z\theta}^{(0)}(r, z, t) &= R_{\mu 0} \left[r \frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial z} + \xi \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{2} \ln \frac{r}{\xi} \right) \lambda_0 \frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial z} \right] + O(r^3). \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично, для внутреннего слоя цилиндрической вязкоупругой оболочки получим

$$\begin{aligned} v_1(r, z, t) &= \frac{r}{r_1} \left[1 + \frac{r^2 - r_1^2}{8} \lambda_1 \right] \left[r v_0^{(0)} + \xi \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{2} \ln \frac{r}{\xi} \right) \lambda_0 v_0^{(1)} \right], \\ \tau_{r\theta}^{(1)}(r, z, t) &= \tau_{r\theta}^{(1)} = \frac{r^2}{r_1^2} R_{\mu 0} \left(1 + \frac{r^2 - r_1^2}{24} \lambda_1 \right) \left[\frac{r^2}{4} \lambda_0 v_0^{(0)} + \xi \left(\frac{1}{2} \lambda_0 - \frac{2}{r^2} + \frac{r^2}{8} \eta_{2,0}(r) \lambda_0^2 \right) v_0^{(1)} \right], \\ \lambda_1 \tau_{z\theta}^{(1)} &= \frac{4r}{r_1^2} R_{\mu 0} \left(1 + \frac{3r^2 - 2r_1^2}{24} \lambda_1 \right) \left[r \frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial z} + \xi \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{2} \ln \frac{r}{\xi} \right) \lambda_0 \frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Для внешнего слоя получим

$$\begin{aligned} v_2(r, z, t) &= \frac{r}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{2} [r^2 L(r) - r_2^2 L(r_2)] \lambda_2 \right\} \left[r v_0^{(0)} + \xi \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{2} \ln \frac{r}{\xi} \right) \lambda_0 v_0^{(1)} \right], \\ \tau_{r\theta}^{(2)} &= \frac{r_2^2}{r^2} R_{\mu 0} \left[1 + \frac{r_2^2 - r^2}{4} \lambda_2 \right] \left[\frac{r^2}{4} \lambda_0 v_0^{(0)} + \xi \left(\frac{1}{2} \lambda_0 - \frac{2}{r^2} + \frac{r^2}{8} \eta_{2,0}(r) \lambda_0^2 \right) v_0^{(1)} \right], \\ \tau_{z\theta}^{(2)} &= \frac{r_2^2}{2r} R_{\mu 0} \left[1 + \frac{1}{2} \tilde{L}_1(r) r^2 \lambda_2 \right] \left[r \frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial z} + \xi \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{2} \ln \frac{r}{\xi} \right) \lambda_0 \frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим также, что независимо от вида и порядка приближенных уравнений крутильных колебаний круговой цилиндрической трехслойной вязкоупругой оболочки или уравнений для предельных и частных случаев, крутильные перемещения точек слоев оболочки и напряжения в ее сечениях можно вычислить по формулам (11) - (13).

Теперь переходим к безразмерным координатам в приближенных уравнениях крутильных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой трехслойной оболочки (9) и (10). Положим

$$z = \xi z^*, t = \frac{\xi}{b_0} t^*, r = \xi r^*, v_0^{(0)} = v_0^{(0)*}, v_0^{(1)} = \xi v_0^{(1)*}, v_0 = \xi v_0^*, \quad (14)$$

$$a = \xi a^*, b = \xi b^*, r_1 = \xi r_1^*, r_2 = \xi r_2^*,$$

где ξ определяется по формуле (3).

Подставим (14) в уравнения (9) и (10) и для удобства записи в дальнейшем опускаем «звездочки» над буквами. Получим соответственно

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{r_1^2} \left(M_0^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{r_1^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{1}{2} v_0^{(1)} \right) - \frac{2a^2}{r_1^4} \left[1 + \frac{a^2 - r_1^2}{12} \left(\frac{b_0^2}{b_1^2} M_1^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] v_0^{(1)} + \\ &+ \frac{a^2 (a^2 - r_1^2)}{12 r_1^2} \left[\frac{b_0^2}{b_1^2} M_0^{-1} M_1^{-1} \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) - \left(M_0^{-1} + \frac{b_0^2}{b_1^2} M_1^{-1} \right) \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] \left(\frac{r_1^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{1}{2} v_0^{(1)} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\mu_1} M_1^{-1} [F_{r\theta}^{(1)}(z, t)], \tag{15} \\
 &\frac{r_2^2}{b^2} \left(M_0^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{r_2^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{1}{2} v_0^{(1)} \right) - \frac{2r_2^2}{b^4} \left[1 + \frac{r_2^2 - b^2}{4} \left(\frac{b_0^2}{b_2^2} M_2^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] v_0^{(1)} + \\
 &+ \frac{r_2^2 (r_2^2 - b^2)}{4b^2} \left[\frac{b_0^2}{b_2^2} M_0^{-1} M_2^{-1} \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) - \left(M_0^{-1} + \frac{b_0^2}{b_2^2} M_2^{-1} \right) \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] \left(\frac{r_2^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{1}{2} v_0^{(1)} \right) = \\
 &= \frac{1}{\mu_2} M_2^{-1} [F_{r\theta}^{(2)}(z, t)],
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 &\frac{a^2}{r_1^2} \left(\frac{1}{b_0^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{r_1^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} v_0^{(1)} \right) - \frac{2\xi a^2}{r_1^4} \left[1 + \frac{a^2 - r_1^2}{12} \left(\frac{1}{b_1^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] v_0^{(1)} + \\
 &+ \frac{a^2 (a^2 - r_1^2)}{12r_1^2} \left[\frac{1}{b_0^2 b_1^2} \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) - \left(\frac{1}{b_0^2} + \frac{1}{b_1^2} \right) \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] \left(\frac{r_1^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} v_0^{(1)} \right) = \frac{1}{\mu_1} [F_{r\theta}^{(1)}(z, t)], \\
 &\frac{r_2^2}{b^2} \left(\frac{1}{b_0^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{r_2^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} v_0^{(1)} \right) - \frac{2\xi r_2^2}{b^4} \left[1 + \frac{r_2^2 - b^2}{4} \left(\frac{1}{b_2^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] v_0^{(1)} + \\
 &+ \frac{r_2^2 (r_2^2 - b^2)}{4b^2} \left[\frac{1}{b_0^2 b_2^2} \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) - \left(\frac{1}{b_0^2} + \frac{1}{b_2^2} \right) \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] \left(\frac{r_2^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{\xi}{2} v_0^{(1)} \right) = \frac{1}{\mu_2} [F_{r\theta}^{(2)}(z, t)]. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Функции внешних усилий $F_{r\theta}^{(i)}(z, t)$, так же как и μ_m , ($m = 0, 1, 2$), размерность напряжения. Поэтому правые части уравнений (15) и (16) являются безразмерными величинами.

В случае отсутствия внутреннего и внешнего слоев оболочки, из уравнений (5) следуют приближенные уравнения колебания однородной круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки. Аналогично, переходя к безразмерным переменным в указанных уравнениях будем иметь

$$\begin{aligned}
 &\left(M_0^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{r_1^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{1}{2} v_0^{(1)} \right) + \frac{r_1^2}{8} \left(\ln r_1 - \frac{1}{4} \right) \left(M_0^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 v_0^{(1)} = \\
 &= R_{\mu 0}^{-1} [F_{r\theta}^{(1)}(z, t)], \tag{17} \\
 &\left(M_0^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{r_2^2}{4} v_0^{(0)} + \frac{1}{2} v_0^{(1)} \right) + \frac{r_2^2}{8} \left(\ln r_2 - \frac{1}{4} \right) \left(M_0^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 v_0^{(1)} = \\
 &= R_{\mu 0}^{-1} [F_{r\theta}^{(2)}(z, t)],
 \end{aligned}$$

Полученные уравнения (17) являются уравнениями крутильных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки, и в точности совпадают с уравнениями для такой оболочки, полученными в работе [7]. Следовательно, система уравнений (5) может быть использована как разрешающие уравнения при решении инженерных задач о колебаниях трехслойных цилиндрических оболочек, кругового поперечного сечения.

Следует заметить, что при решении задач о свободных крутильных колебаниях или задач о распространении гармонических крутильных волн в трехслойных цилиндрических вязкоупругих оболочках необходимо положить равными нулю функции внешних воздействий в уравнениях (15), (16) и (17), т.е. интегрировать соответствующие однородные интегро-дифференциальные или дифференциальные уравнения. Если указанные уравнения решены и найдены главные части крутильного перемещения срединного слоя оболочки, то по формулам (11)-(13) легко вычислить перемещения и ненулевые компоненты напряжения в точках всех трех слоев оболочки. При этом полученные результаты позволяют построить графики

зависимостей компонент напряженно-деформированного состояния оболочки от координат и времени.

Литература

1. Филиппов И.Г., Чебан В.Г. Математическая теория упругих и вязкоупругих пластин и стержней.-*Кишинев: Штиинца, 1988.-190 с.*
2. Markus Stefan.The mechanics of cylindrical shells.–Amsterdam:Elsevier”,1988.– 395p.
3. Худойназаров Х.Х., Буркутбоев Ш.М. Математическая модель крутильных колебаний цилиндрического слоя с учетом протекающей жидкости и вращения. *Математическое моделирование и численные методы, 2017, № 4, с. 31–56.*
DOI: <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2017-4-3147>
4. Худойназаров Х.Х., Абдирашидов А., Буркутбоев Ш.М. Моделирование крутильных колебаний вязкоупругого круглого стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью. *Математическое моделирование и численные методы, 2016, №1(9), С.38-51.*
5. Filippov, I. G. & Kudainazarov, K. (1990). Refinement of equations describing longitudinal-radial vibrations of a circular cylindrical viscoelastic shell. *Soviet Applied Mechanics, 26(2), 161–168.* doi:10.1007/bf00887110
6. Filippov, I. G. & Kudainazarov, K. (1990). General transverse vibrations equations for a circular cylindrical viscoelastic shell. *Soviet Applied Mechanics, 26(4), 351–357.* doi:10.1007/bf00887127.
7. Худойназаров Х.Х. Нестационарное взаимодействие круговых цилиндрических упругих и вязкоупругих оболочек и стержней с деформируемой средой. – Ташкент, изд-во имени Абу Али ибн Сина, 2003. – 325 с.
8. Khudoynazarov, Kh.Kh. Filippov, I.G. & Zavyalov ,V.M. 1997. The boundary conditions on an end of cylindrical cover by a longitudinal oscillation. *Teoretycan epodstawy budownictwa, Warszawa, 1998, 49-55 p.*
9. Filippov, I. G. & Kudainazarov, K. (1998). Boundary-value problems of longitudinal vibrations of circular cylindrical shells. *International Applied Mechanics, 34(12), 1204–1210.* doi:10.1007/bf02700874.
10. Худойназаров Х.Х., Ялгашев Б.Я. Взаимодействие цилиндрических слоев и оболочек с вязкой жидкостью. – LAMBERT Academic Publishing -2017. -138 с.
11. Khudoynazarov, X.X., Skripnyak, V.A., Yakhshiboyev, Sh.R. Unsteady transverse vibrations of a three-layer viscoelastic plate. *Uzbek journal “Problems of Mechanics”, 2018, 2, 27-32.*
12. Ялгашев Б.Ф., Бердиев Ш.Д. Уравнения крутильных колебаний трехслойной круговой цилиндрической упругой оболочки // *Проблемы архитектуры и строительства. 2020, №2, С.120-125.*

UDC: 681.306

ALGORITHMS FOR DATA RELIABILITY BASED ON A CRYPTOGRAPHIC DISTRIBUTED DATABASE (BLOCKCHAIN)**A.R.Akhatov¹, F.M.Nazarov², F.F.Meliyev²**¹*Jizzakh branch of National University of Uzbekistan,*²*Samarkand State University**Email: akmalar@rambler.ru, fayzullo-samsu@mail.ru*

Abstract. This research paper presents algorithms for solving the problem of increasing data flow by forming a distributed database. Based on this, methods for optimizing the storage and processing of data in computer networks are presented. A distributed registry and cryptographically sensitive data processed by blockchain technology are considered. In the general case, blockchain is a multifunctional and multi-level information technology designed to reliably record various procedures and operations carried out on the network, a technology for reliable distributed storage of records of all ever completed transactions. The blockchain is a chain of data blocks, the volume of which is constantly growing as new blocks are added with records of the most recent transactions.

Keywords. Distributed Database, Cryptographic Encryption, Network Technologies, Blockchain Technology, Data Security, Algorithm RSA.

Алгоритмы для обеспечения достоверности данных на основе криптографической распределенной базы данных (блокчейн)

Аннотация. В данной исследовательской работе представлены алгоритмы решения проблемы увеличения потока данных путем формирования распределенной базы данных. На основании этого представлены методы оптимизации хранения и обработки данных в компьютерных сетях. Рассматриваются распределенный реестр и криптографически важные данные, обработанные по технологии блокчейн. В общем случае блокчейн - это многофункциональная и многоуровневая информационная технология, предназначенная для надежной записи различных процедур и операций, выполняемых в сети, технология надежного распределенного хранения записей всех когда-либо выполненных транзакций. Блокчейн представляет собой цепочку блоков данных, объем которых постоянно растет по мере добавления новых блоков с записями самых последних транзакций.

Ключевые слова. Распределенная база данных, криптографическое шифрование, сетевые технологии, блокчейн технология, защита информации, алгоритм RSA.

Kriptografik taqsimlangan ma'lumotlar bazasi (blokcheyn) asosida ma'lumotlar ishonchliligini oshirish algoritmlari

Annotatsiya. Ushbu ilmiy ishda taqsimlangan ma'lumotlar bazasini shakllantirish orqali ma'lumotlar oqimini oshirish muammosini hal qilish algoritmlari keltirilgan. Shundan kelib chiqqan holda, kompyuter tarmoqlarida ma'lumotlarni saqlash va qayta ishlashni optimallashtirish usullari keltirilgan. Taqsimlangan reestr va blockchain texnologiyasi tomonidan ishlov berilgan kriptografik ma'lumotlar ko'rib chiqiladi. Umumiy holda, blockchain - bu tarmoqda amalga oshiriladigan turli xil proseduralar va operatsiyalarni ishonchli qayd etish uchun ishlab chiqilgan ko'p funktsiyali va ko'p darajali axborot texnologiyasi, hamda tarmoq ichida amalga oshiriladigan barcha bitimlarning yozuvlarini ishonchli taqsimlangan saqlash texnologiyasi.. Blockchain - bu ma'lumotlar bloklari zanjiri bo'lib, ularning hajmi doimiy ravishda o'sib boradi, chunki yangi bloklar eng so'nggi tranzaksiyalar yozuvlari bilan tarmoqqa qo'shiladi.

Kalit so'zlar. Tarqatilgan ma'lumotlar bazasi, kriptografik shifrlash, tarmoq texnologiyalari, Blockchain texnologiyasi, ma'lumotlar xavfsizligi, RSA algoritmi.

1.Introduction

Based on the above considerations, addressing security issues in network systems through blockchain technology is a priority. The task of algorithmic protection of distributed databases by dynamic creation of cryptographic algorithms was defined. Analysis of the blockchain technology (blockchain or a chain of blocks) shows that important advantages of the potential use of transaction blocks built in accordance with certain rules in electronic document management systems are security by encrypting transactions for subsequent confirmation, the inability to create unauthorized changes due to the

dependence of the current blockchain state from previous transactions, transparency and reliability of procedures through public and distributed looking, as well as the interaction of many users among themselves without the use of "trusted intermediaries"[1,2].

On the other hand, in the conducted studies, it is noted that in blockchain technologies it is rather difficult to achieve system performance. For example, in a Bitcoin system, the time required to add one block is about 10 minutes, this is due to the decentralization of the system: it is necessary that information about a new transaction be distributed to about 80% of the network [2,3]. Along with this, there is also an acute question of the amount of memory for storing information. Using the same bitcoin as an example, it was found that each user stores 80 GB, and about 16.1 million users (according to 2016), i.e. according to these data, the amount of required memory is 1.3 exabytes in total.

Important advantages of the potential use of transaction blocks built according to certain rules in systems by limiting and delaying electronic documents are ensuring security by encrypting transactions for subsequent confirmation, the inability to make unauthorized changes due to the dependence of the current blockchain state on previous transactions, transparency and reliability of procedures due to public and distributed storage, as well as the interaction of a large number of users between without the use of "trusted intermediaries"[4].

Researches show that when using existing algorithms for adding blocks in any system, it is possible to achieve the requirements of decentralization, openness of the entered data, the inability to change the data once entered into the system. However, mathematical-cryptographic information protection must be developed for each designed system separately.

2. Encryption schema

This is the process of encoding a piece of information that only authorized parties can access. This can be used to ensure the confidentiality of blockchain data by encrypting it. There are many encryption schemes that can be used on the blockchain. Symmetric key encryption is used in the Hyperledger matrix for the confidentiality of smart contract and Blockchain for the Smart Home [4, 7]. Although finding and calculating encrypted data is a big problem, there are many existing methods that can be utilized for this purpose. Some of these methods, such as searchable encryption for searching the encrypted data in the cloud, are already used in the allowed blockchain [4], and fully homomorphic encryption and functional encryption can also be used to calculate over encrypted data in the blockchain. Cryptocurrency Monero [5, 8] uses (half) additive homomorphic encryption along with range validation methods, but only supports value transactions.

To ensure the confidentiality and authenticity of data at the same time, authenticated encryption can be used on the blockchain. In authenticated encryption, two peers establish a connection, they both share their public keys and calculate the shared secret, which is used as a symmetric key for the authenticated encryption algorithm. The recently completed CAESAR [1, 4] cryptographic contest has identified a portfolio of six ciphers for authenticated encryption.

When this article was written in June 2019, none of these ciphers has been deployed in any blockchain system. Broadcast encryption can be used on the blockchain to ensure the anonymity of the recipient nodes of the blockchain gives an offer to use blockchain for availability and accountability for IoT. This happens because each user in the group receives an encrypted message, although only users with the correct authority or key can decrypt it.

3. Cryptographic model for data reliability

Studies have shown that using the existing algorithms for adding blocks in any system, it is possible to fulfill the requirements of decentralization, openness of the entered data, and the inability to change the data entered into the system once. However, mathematical and cryptographic information protection should be developed for each designed system separately.

The idea of a peer-to-peer system provides a centralized solution using cryptography, mathematical rules, and general rules for conducting transactions between in the system. According to some experts, this problem can be partially solved by using a digital signature, but this is possible only if there is a trustee who controls double spending, which deprives the advantages of this approach [5]. In the architecture of the system proposed in this study, the electronic document data is represented by a sequence of records that can be supplemented. Records along with supporting information are stored in blocks. The blocks are stored as linked chains. Each user is represented by a node that stores all available data streams and communicates with other nodes.

One of the main problems in such an architecture will obviously be ensuring the reliability of electronic documents, which determines the need for effective encryption algorithms [5,6]. They must guarantee sufficient cryptographic strength for information on the network, as well as enable the implementation of a digital signature.

Encryption is a reversible data transformation that forms ciphertext from plain text. Decryption is the opposite of encryption. And together it is a cipher a cryptographic method used to ensure the confidentiality of data, including an encryption algorithm and a decryption algorithm.

A cipher is a set of reversible mapping functions E_{K_1} of a set of plaintexts M onto a set of ciphertexts C depending on the selected encryption key K_1 from the set K_ϵ , as well as the corresponding inverse decryption functions D_{K_2}, K_D that map the set of ciphertexts to the set of plaintexts:

$$E_{K_1}, k_1 \in K_\epsilon : M \rightarrow C, D_{K_2}, k_2 \in K : C \rightarrow M, \\ \forall k_1 \in K_\epsilon \exists k_2 \in K : \forall m \in M : E_{k_1}(m) = c, c \in C, \\ D_{K_2}(c) = m. \tag{1}$$

We can say that encryption is a reversible function of two arguments: message and key. Reversibility is the main condition for the correctness of encryption, according to which each encrypted message Y and key K corresponds to one original message X . The legal user B (on the receiving side of the communication system) receives the message Y and performs the decryption procedure.

The controller is a one-way function that confirms membership without revealing an individual identity in the base set. It can be used on the blockchain to create other cryptographic primitives, such as commitment, ring signatures, and zero-knowledge evidence. The Merkle tree, used in many cryptocurrencies, is suitable for a more complete class of cryptographic provision, which is a space-time efficient data structure for checking membership in a set. Figure 2 shows how blockchain transactions are represented in the Merkle tree, and the Merkle root is stored in the blockchain block structure. Non-Merkle provisions are classified as RSA provisions and elliptical curve controllers [7, 3].

In system, a controller A is computed by the network overall information commitments (c_1, c_2, \dots, c_n) along with the appropriate membership witnesses for each item in the set. The witness w is computed by the accumulation information with the exception of one. In this way, during Zeroinformation spend transaction, a user proves the knowledge of one information by using that witness. This witness w and controller A are publicly verifiable without any trusted third party. Controller A in Zeroinformation is defined as:

$$A = u^{c_1 c_2 c_3 \dots c_n} \text{ mod } N \tag{2}$$

where the integers A, u and N are known to everyone. The information c is a Pedersen commitment of an information serial number s and the random number z . Zeroinformation uses Random Number Generator

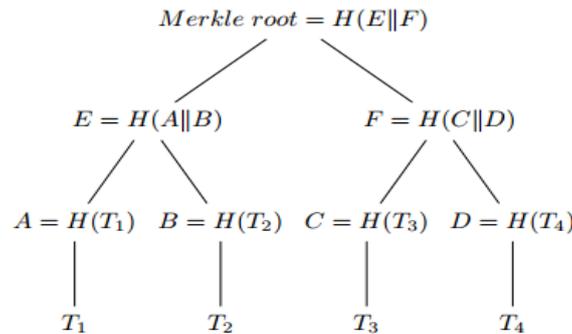


Figure 1: Merkle tree of blockchain transactions.

(RNG) to generate different s and z to find c using Pedersen commitment until c is prime. The witness w of an information c is defined as the accumulation of all information with the exception of c :

$$A = u^{c_1 c_2 c_3 \dots c_n} \text{ mod } N$$

Controllers can also be employed for range proofs in blockchain. Controllers are used in [8] to design a stateless blockchain where to participate in consensus, the node only needs a constant amount of storage.

Oblivious Transfer is a two-party protocol between a sender S and a receiver R . The general type of oblivious transfer is k -out-of- n oblivious transfer $\left(\frac{n}{k}\right) - OT$, where $k < n$, in which S holds n messages and R retrieves simultaneously k of them without letting S know about which k out of n messages R

received. Oblivious transfer is introduced by Rabin [7] in which a sender sends a message to a receiver with probability $\frac{1}{2}$. The protocol is called $\frac{1}{2}$ -OT, and it is as follows:

- Sender S chooses two large primes p, q and computes $N = pq$ and then the sender generates RSA public key (e, N) such that e is relatively prime to $(p-1)(q-1)$;
- S computes cipher text c over message M as $c = E_{(e, N)}(M) = M^e \pmod N$ and sends e, N, c to receiver R;
- R chooses a random $x \in Z_N$ and sends $a = x^2 \pmod N$ to S;
- S computes four square roots of $a \pmod N$ and chooses one of the roots y at random and sends it to R;
- R checks whether $y^2 \equiv a \pmod N$ and if $y \equiv x \pmod N$, then R will be able to factor N and, hence, be able to decrypt c to recover M .

$\frac{1}{2}$ -OT is complete for secure multi-party computation. Oblivious transfer has been realized in secure multiparty computation to create private and verifiable smart contracts on blockchain [8]. Oblivious transfer can also be utilized for the exchange of secrets, private information retrieval, and building protocols for signing contracts. There has been loads of work done in oblivious transfer, and some of these works have been applied in blockchains such as Searchain and APDB (for automated penalization of data breaches using cryptoaugmented smart contracts). We will develop distributed database modeling using this method.

4. Algorithms creating a database architecture based on blockchain technology

We offer a database architecture where the data of electronic documents is represented by a sequence of records that can be supplemented. Records along with supporting information are stored in blocks. Blocks are stored as a singly linked list. Each participant is represented by a node, which stores the entire current data array and contacts other nodes. Nodes can add new entries to the end of the list, and also inform each other about list changes [9,6].

When storing data, especially when solving problems of recording and displaying information, it is advisable to use distributed databases. The distributed database algorithm is as follows:

- Each user's computer performs the function of a server;
- Data on user servers are tied to the main database;
- Data storage is distributed.

The introduction of a system for assessing the rating and creative activity of students in higher education through distributed registry technologies contributes to solving the problems of a large data stream and ensuring information security.

The platform of the system of ratings and assessments of students' creative activity will be posted on the servers of higher educational institutions. Copies of data on all university students will be generated in the main database [10].

The logical scheme of the software package will be executed according to the following schedule.

The advantage of a distributed database is that data is stored in a blockchain, and each copy of the data is stored in the main database. If a certain part of the data chain is damaged, this part of the chain restores its activity using the main database. If the main database is damaged, the main database restores its activity using the data contained in the data chain.

Thanks to this process, it is possible to ensure the security of the database. Secreting data in a database with blockchain technology using a cryptographic method using a dynamic key ensures complete data reliability.

Using cryptographic method with a dynamic key, based on blockchain technology, secretfying data and placing them in a database is implemented by the following algorithm:

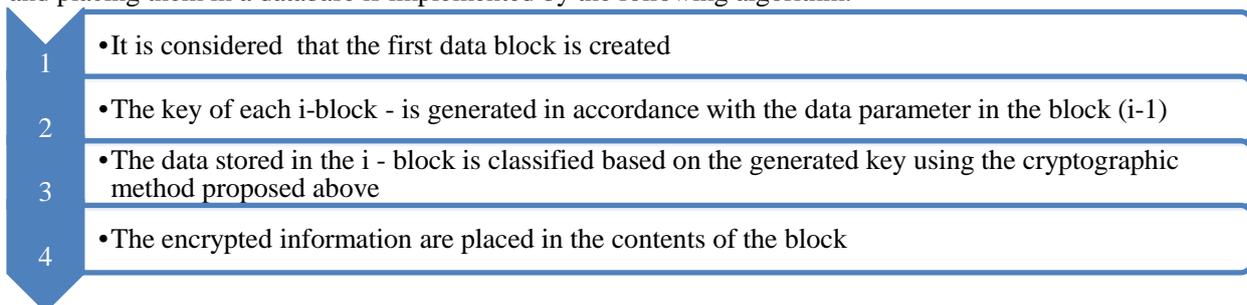


Figure 2: Blockchain-based dynamic key encryption algorithm.

Data security in a database created by the developed algorithm is considered high. In the process of organizing the database, you can choose the cryptographic method, based on the appeal to the knowledge base. When accessing the database from an unauthorized user or system, access to this information will be impossible, since in order to determine the data for the *i*-block, it will be necessary to open the encrypted text of the *i-1* block. The data of each block will depend on the data of the previous block.

Search information becomes unnecessary at the time, for the complete opening of a data block an average of 1000 MB will have to spend several years. Ensuring the reliability of the data of information systems operating on the basis of network technologies is an urgent issue. To solve this problem, it is necessary to introduce blockchain technology in the form of the scheme described above. We use a stochastic model to create blocks.

5. Experimental calculation

The experience of creating database blocks, based on the above models, is obtained. It is clear that, for our cryptographic block model the strong stability (i.e. the fork possibility equals to 0) is guaranteed only if the mean network transit time t_n approaches 0. On the other hand, the perpetual eventual growth of the greatest common prefix is still possible while $0 \leq t_n \leq t_b$, although more or less frequent depending on

dimensions. Clearly, the lower the number *n* of processes and the ratio $r = \frac{t_n}{t_b}$ are, the better the consistency

is. To validate this intuition while refining the characterization of stability, we introduce three indicators, which can be seen as three complementary metrics of stability (next we call the absolute blockchain the most advanced among all locally viewed blockchains according to the order:

- consensus possibility (Security possibility): the possibility that all processes agreed on the absolute blockchain (higher is better);
- stability rate: the mean proportion of processes agreed on the absolute blockchain (higher is better);
- worst process delay: the mean length difference between absolute blockchain and the greatest common prefix (lower is better).

(In each case, upper, middle and bottom values are accordance the consensus possibility (security possibility), the consistency rate and the worst process delay.)

Table 1.

Values of stability indicators for several dimensions assignments.

r/n	2	3	4	6	10	20	40	60	100
0.1	0.913	0.868	0.839	0.803	0.761	0.702	0.657	0.635	0.598
	0.955	0.938	0.930	0.922	0.914	0.909	0.908	0.908	0.907
	0.094	0.143	0.180	0.220	0.271	0.347	0.415	0.442	0.505
0.2	0.837	0.762	0.718	0.660	0.587	0.505	0.455	0.412	0.368
	0.912	0.884	0.870	0.858	0.844	0.832	0.831	0.830	0.832
	0.189	0.279	0.338	0.418	0.533	0.671	0.771	0.853	0.945
0.5	0.686	0.559	0.479	0.391	0.304	0.231	0.180	0.168	0.088
	0.823	0.766	0.735	0.705	0.683	0.663	0.656	0.655	0.646
	0.424	0.614	0.754	0.918	1.080	1.264	1.373	1.406	2.111
0.7	0.602	0.453	0.369	0.280	0.192	0.118	0.073	0.054	0.037
	0.769	0.698	0.665	0.627	0.598	0.579	0.572	0.568	0.559
	0.607	0.895	1.070	1.311	1.617	1.973	2.316	2.500	2.761
0.99	0.515	0.347	0.264	0.173	0.109	0.054	0.026	0.017	0.009
	0.715	0.625	0.586	0.538	0.513	0.484	0.475	0.467	0.463
	0.844	1.238	1.476	1.810	2.169	2.615	3.021	3.279	3.554

To ease the results understanding, we assume a perfect symmetry of the network and a perfect fairness between processes, formally:

$$\forall(i, j) \in \rho^2, \begin{cases} t_{n,i} = t_{n,j} \\ m_i = m_j \end{cases}$$

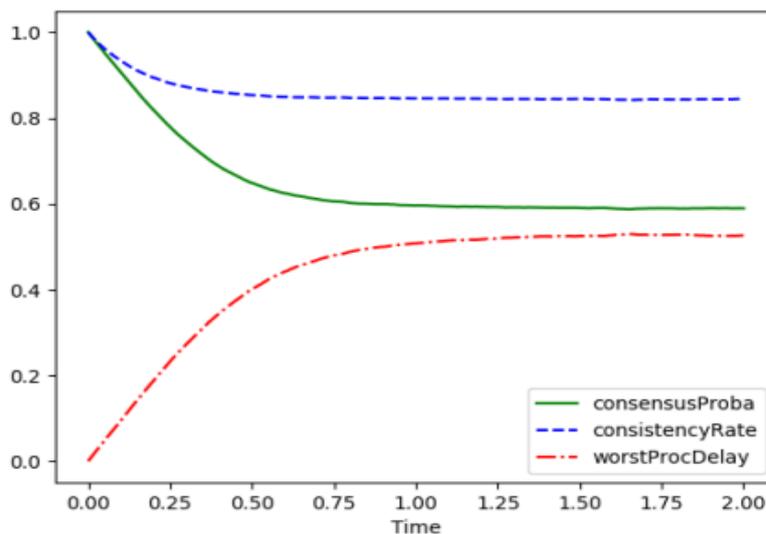


Figure 3. Time develop of the consistency indicators for $n = 10$ and $r = 0.2$

Figure 4 shows the time development of the three indicators for $n = 10$ and $r = 0.2$ estimated running a cryptographic block model (100000 histories performed in 9.5 minutes on a single core of an i7-6700HQ CPU).

6. Conclusion

In conclusion, we note that ensuring the reliability of information in turn leads to the solution of other related problems, namely, optimization of process management by reducing costs, achieving data exchange efficiency and minimizing errors, which in many ways, allows blockchain technology to be made. Algorithms were developed to generate a database in a distributed database by dynamically creating cryptographic methods. The formation of the database information system in a distributed database and the possibility of transferring this data are checked. In practice, blockchain technology requires high-performance servers and supercomputers for cryptographic encryption and storage of this data.

References

1. A. Dorri, M. Steger, S. S. Kanhere and R. Jurdak, Blockchain: A distributed solution to automotive security and privacy, IEEE Communications Magazine , 55 (2017), 119–125.
2. J. A. Garay, A. Kiayias and N. Leonardos, The bitcoin backbone protocol: Analysis and applications, in EUROCRYPT (2), 9057 (2015), 281–310.
3. Mayank R., Danilo G., Katina K. SoK of Used Cryptography in Blockchain. Department of Information Security and Communication Technologies, Norwegian University of Science and Technology. P 54. 2019.
4. Wang L., Shen X., Li J., Shao J., Yang Y. Cryptographic primitives in blokcheyns. Journal of Network and Computer Applications, vol. 127, P. 43 – 58, 2019.
5. A. S. Elmaghraby and M. M. Losavio, Cyber security challenges in smart cities: Safety, security and privacy, Journal of Advanced Research , 5 (2014), 491–497.
6. Akhatov A.R., Nazarov F. M. Methods of Implementation of Blockchain Technologies on the basis of Cryptographic protection for the Data processing System with Constraint and Lagging into Electronic Document Management. Herald of Computer and Information technologies. vol.10. P. 3–13. Moscow.2019.
7. Pierre-Yves Piriou., Jean-Francois Dumas. Simulation of stochastic blockchain models. Chatou, France. P.[1-8]. 2018.
8. Duffield E., Schinzel H., Gutierrez F., Transaction locking and masternode consensus: A mechanism for mitigating double spending attacks. CryptoPapers.info, 2014, [Online; accessed 3-Jun-2019].
9. Pedro Franco. The Blokcheyn. Understanding Bitinformation: Cryptography, Engineering and Economics. John Wiley & Sons, 2014. 288 p.
10. Коблиц. Н. Курс теории чисел и криптографии - М., Научное издательство ТВП, 2001 г., 260 стр.

UDC: 681.14

IMPORTANT FACTORS FOR EVALUATION OF BASED ANALYSIS SYSTEMS BASED ON BIOMETRIC RECOGNITION**I.Q.Ximmatov***Samarkand state university**Email: ximmatov010889@gmail.com*

Abstract. Gait recognition to be the recognition of some salient property, e.g., identity, style of walk, or pathology, based on the coordinated, cyclic motions that result in human locomotion. In the case of biometric gait recognition, the salient property is identity. We make the distinction between gait recognition and what we call quasi gait recognition in which a salient property is recognized based on features acquired while a subject is walking, but the features are not inherently part of the gait. For example, skeletal dimensions may be measured during gait and used to recognize an individual.

Keywords: Gait, biometric systems, gait recognition, identification, important factors, cyclic combination, human perception of gait, frequency entrainment.

Важные факторы для оценки систем основного анализа на основе биометрического признания

Аннотация. Распознавание походки - это признание некоторого характерного свойства, например, индивидуальности, стиля ходьбы или патологии, основанного на скоординированных, циклических движениях, которые приводят к движению человека. В случае биометрического распознавания походки существенным свойством является идентичность. Мы проводим различие между распознаванием походки и тем, что мы называем распознаванием квазигаиты, при котором существенное свойство распознается на основе признаков, приобретенных во время ходьбы субъекта, но эти характеристики не являются неотъемлемой частью походки. Например, размеры скелета могут быть измерены во время походки и использованы для распознавания человека.

Ключевые слова: походка, биометрические системы, распознавание походки, идентификация, важные факторы, циклическая комбинация, восприятие походки человека, частота захвата.

Biometrik tanib olish asosida yurishlarni tahlil qilish tizimlarini baholashning muhim omillari

Annotatsiya. Yurishni tanib olish - bu odamning harakatlanishiga olib keladigan muvofiqlashtirilgan, siklik harakatlarga asoslangan shaxsiy xususiyatlari, yurish uslubi yoki kuzatish kabi ba'zi xarakterli xususiyatlarni tanib olish. Biometrik o'tish joyini tanib olishda identifikatsiyaning muhim xususiyatlarini bilish. Biz yurishni aniqlashni va uning harakatini aniqlash deb atashni ajratamiz, bunda muhim xususiyat ob'ekt yurishi paytida qo'lga kiritilgan belgilar va dastlabki ma'lumotlar asosida tanib olinadi, ammo bu xususiyatlar o'tishning ajralmas qismi emas. Bu jarayonda inson skeletning o'lchami yurish paytida o'lchanishi va odamni tanib olish uchun ishlatilishi haqida aytib o'tiladi.

Kalit so'zlar: Harakatlanish, biometrik tizimlar, o'tish joyini aniqlash, identifikatsiya qilish, muhim omillar, siklik kombinatsiya, shaxsning o'tish joyida tanib olinishi, chastotaga kirish.

Introduction. Nowadays People often feel that they can identify a familiar person from afar simply by recognizing the way the person walks. This common experience, combined with recent interest in biometrics, has led to the development of gait recognition as a form of biometric identification. As a biometric, gait has several attractive properties. Acquisition of images portraying an individual's gait can be done easily in public areas, with simple instrumentation, and does not require the cooperation or even awareness of the individual under observation. In fact, it seems that it is the possibility that a subject may not be aware of the surveillance and identification that raises public concerns about gait biometrics [1].

There are also several confounding properties of gait as a biometric. Unlike finger prints, we do not know the extent to which an individual's gait is unique. Furthermore, there are several factors, other than the individual, that cause variations in gait, including footwear, terrain, fatigue, and injury. This paper gives an overview of the factors that affect both human and machine recognition of gaits, data used in gait and motion analysis, evaluation methods, existing gait and quasi gait recognition systems, and uses of gait analysis beyond biometric identification.

Gait and Gait Recognition. In our country, we have the future with built-in camera and special programs we define gait to be *the coordinated, cyclic combination of movements that result in human*

locomotion. The movements are coordinated in the sense that they must occur with a specific temporal pattern for the gait to occur. The movements in a gait repeat as a walker cycles between steps with alternating feet. It is both the *coordinated* and *cyclic* nature of the motion that makes gait a unique phenomenon.

Examples of motion that are gaits include walking, running, jogging, and climbing stairs. Sitting down, picking up an object, and throwing an object are all coordinated motions, but they are not cyclic. Jumping jacks are coordinated and cyclic, but do not result in locomotion.

Therefore, we define gait recognition to be the recognition of some salient property, e.g., identity, style of walk, or pathology, based on the coordinated, cyclic motions that result in human locomotion. In the case of biometric gait recognition, the salient property is identity. We make the distinction between gait recognition and what we call quasi gait recognition in which a salient property is recognized based on features acquired while a subject is walking, but the features are not inherently part of the gait. For example, skeletal dimensions may be measured during gait and used to recognize an individual. However, skeletal dimensions may be measured other ways, and are therefore not a property of the gait.

Human Perception of Gait. The ability of humans to recognize gaits has long been of interest to psychologists. Researchers [2, 3] showed that humans can quickly (in less than one second) identify that a pattern of moving lights, called a moving light display (MLD), corresponds to a walking human. However, when presented with a static image from the MLD, humans are unable to recognize any structure at all. For example, without knowing that the dots in a single frame of the sequence shown in Fig. 1 are on the joints of a walking figure, it is difficult to recognize them as such. What we cannot show in a print medium is, that within a fraction of a second after the dots move, one can recognize them as being from a human gait.

Researcher's contributions are important because they provide an experimental method that allows one to view motion extracted from other contextual information. With the context removed, the importance of motion becomes obvious. In this area Johansson proposed his own algorithm also suggests a set of gestalt rules that humans use to connect the moving dots and infer structure.

As well as researchers Bertenthal and Pinto [4] identify the following three important properties in the human perception of gaits.

– *Frequency entrainment*. The various components of the gait must share a common frequency.

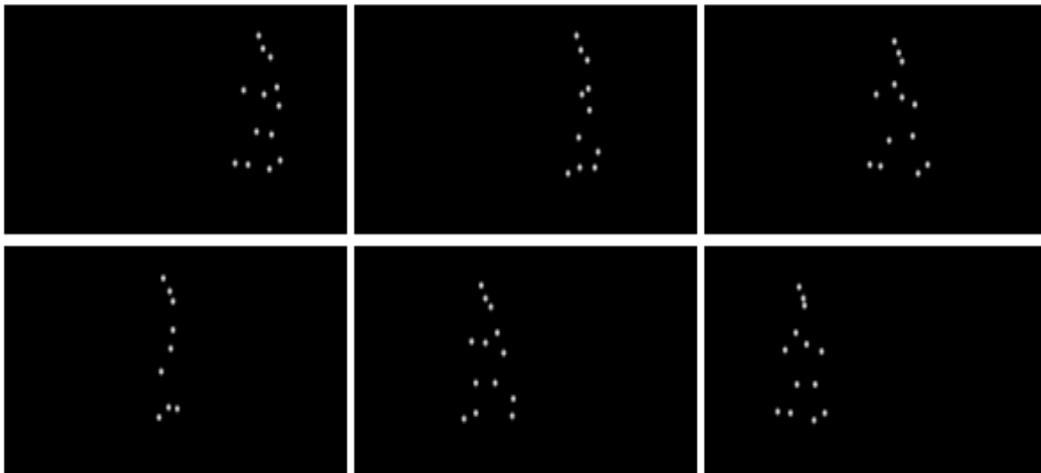


Fig. 1. Frames from a moving light display of a person walking. People can quickly identify that the motion is a gait from the moving sequence, but have difficulty with static frames.

– *Phase locking*. The phase relationships among the components of the gait remain approximately constant. The lock varies for different types of locomotion such as walking versus running.

– *Physical plausibility*. The motion must be physically plausible human motion.

As shown in Fig. 2, there are motions at different frequencies within a gait. However, the gait has a fundamental frequency that corresponds to the complete cycle. Other frequencies are multiples of the fundamental. This is frequency entrainment. It is not possible to walk with component motions at arbitrary frequencies.

When the motions are at entrained frequencies, the phase of the motions must be locked, i.e., the timing patterns of the motions are fixed. In a typical gait, the left arm swings in phase with the right leg and opposite in phase with the left leg, a pattern that is fixed throughout the gait. This is phase locking

To understand physical plausibility, consider the motion of the star of an action movie such as Jackie Chan or Jet Li. On occasion, the actors will use wires to allow them to perform feats that would not

be physically possible otherwise. However, even though the wires are not visible in the movie, viewers know that the wires are there because the motion is not physically plausible without them. Currently, physical plausibility is not employed in machine analysis of gait, other than by the use of exemplars which are real, and therefore physically plausible. It appears that there is a special connection between human gaits and human perception[5]. observed that while humans can easily recognize human motion, they have more difficulty recognizing animal motion. Cohen et al. explain this observation by suggesting that humans rely on the same mechanisms that they use to generate their own gait to perceive the gaits of others. If correct, this may indicate how to improve machine perception of gait.

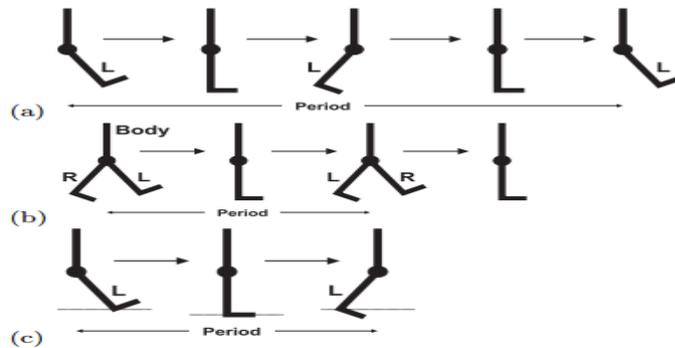
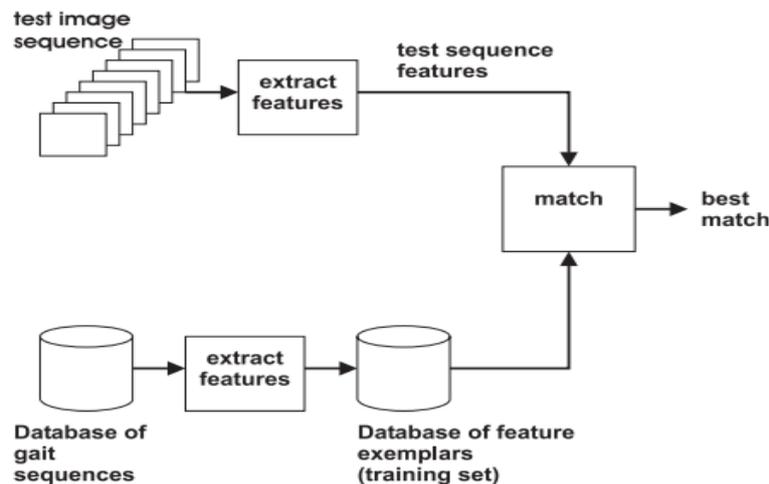


Fig. 2. Stylized body and legs showing sources of different frequencies in a synthesized gait: (a) the oscillation of a swinging limb repeats periodically, e.g left foot fall to left foot fall, (b) the silhouette of a body repeats at twice that frequency, i.e., step to step, and (c) the pendulum motion of limbs has vertical motion at twice the frequency of the limbs horizontal motion.

Important Factors in Evaluation of Gait Analysis Systems. There are many and varied approaches to gait analysis. In order to interpret them in some common context, we suggest the following approach to understanding gait analysis systems.

1. Identify the oscillating signals that the system derives from the cyclic motion
2. Determine how the oscillating signals establish frequency entrainment, phase locking, and physical plausibility.
3. Determine how the oscillating signals translate into features that can be used for recognition.



As a final conclusion, we can describe this process as follows and develop a biometric system structure as a conventional system for testing the walking performance and others. This system can be used in the future as an effective way to identify an individual as an artificial intelligence

References

1. McGrath, B.: The week in walks. The New Yorker June 2 (2003) 35
2. Johansson, G.: Visual perception of biological motion and a model for its analysis. Perception and Psychophysics 14 (1973) 201–211
3. Johansson, G.: Visual motion perception. Scientific American (1975) 76–88

4. Bertenthal, B.I., Pinto, J.: Complementary processes in the perception and production of human movements. In Smith, L.B., Thelen, E., eds.: A Dynamic Systems Approach to Development: Applications. MIT Press, Cambridge, MA (1993) 209–239
5. Cohen, L., Shipley, T.F., Marshark, E., Taht, K., Aster, D.: Detecting animals in point-light displays. In: Twenty Second Annual Meeting of the Cognitive Science Society, Philadelphia, PA (2000) 70
6. Bhanu, B., Han, J.: Bayesian-based performance prediction for gait recognition. In: IEEE Workshop on Motion and Video Computing, Orlando, Florida (2002) 145–150.

UDK 621.376.54

AHOLINING IJTIMOYIY HOLATI VA BANDLIGINI MONITORING QILISH JARAYONINING MATEMATIK MODELLASHTIRISH VA BASHORAT QILISH

M. Q. Nurmamatov

Samarqand davlat univrsiteti

mehridinnur@samdu.uz

Annotatsiya. Mazkur tadqiqot ishida Respublika aholisining ijtimoiy holati va bandligini monitoring qilish asosida uni bashoratlashni avtomatlashtirish mexanzimlari tadqiq etildi. Tadqiqot ishida aholining ijtimoiy holati va bandligini monitoring qilish asosida bashoratlash jarayonlarini matematik modellari ishlab chiqildi. Eksperiment tajribasi Samarqand viloyati misolida amalga oshirilgan va tizimli tahlil qilingan. Matematik modellar asosida yaratilgan axborot tizimi yordamida aholining ijtimoiy holati va bandligini real vaqt kesimida monitoring qilib kelajakdagi holatini bashoratlash imkoniyati yaratiladi.

Kalitli soʻzlar. Raqamli texnologiya, aholining ijtimoiy holati va bandligi, mehnat bozori, bashoratli model, korrelyatsiya, bandlik, matematik modellashtirish.

Математическое моделирование и прогнозирование процесса мониторинга социального статуса и занятости населения

Аннотация. В данном исследовании изучались механизмы автоматизации и его прогнозирования на основе мониторинга социального статуса и занятости населения республики. В ходе исследования разработаны математические модели процессов прогнозирования, основанные на мониторинге социального статуса и занятости населения. Экспериментальное исследование проводилось и систематически анализировалось на примере Самаркандской области. С помощью информационной системы, основанной на математических моделях, можно отслеживать социальный статус и занятость населения в режиме реального времени и прогнозировать будущее.

Ключевые слова. Цифровые технологии, социальный статус и занятость, рынок труда, модель прогнозирования, корреляция, занятость, математическое моделирование.

Mathematical modeling and forecasting of the process of monitoring social status and population employment

Abstract. This study examined the mechanisms of automation and its forecasting based on monitoring the social status and employment of the population of the republic. In the course of the study, mathematical models of forecasting processes based on monitoring the social status and employment of the population were developed. Experimental studies were conducted and systematically analyzed using the example of the Samarkand region. Using an information system based on mathematical models, one can track the social status and employment of the population in real time and predict the future.

Keywords. Digital technologies, social status and employment, labor market, forecasting model, correlation, employment, mathematical modeling.

1. Mavzuning dolzarbligi

Bugungi kunda Respublikamizda aholi turmush darajasini yaxshilashga kata etibor berilmoqda. Aholi turmush darajasini baholash, aholi bandligini monitoring qilish, real vaqt holatida bandlik statistikasini aniqlash bugungi kundagi asosiy vazifalardan biri boʻlib qolmoqda. 2020 yil – “Ilm maʼrifat va raqamli iqtisodiyotni rivojlantirish” yilining davlat dasturida, barcha boshqariladigan sohalarga raqamli texnologiyalarni keng joriy etish vazifasi belgilangan. 2020 yili Prezidentimizning oliy majlisga yoʻllagan murojaatnomasida, yurtimiz “Xalqaro axborot kommunikatsiya texnologiyalarini rivojlantirish indeksi” boʻyicha 2019-yilda 8 pogʻonaga koʻtarilgan boʻlsada, hali juda ham orqadamiz deb takidladilar. Raqamli texnologiyalardan foydalanish nafaqat mahsulot va xizmatlar sifatini oshiradi hamda ortiqcha xarajatlarni

kamaytiradi. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktabrdagi PF-5847-son Farmoni bilan tasdiqlangan O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasiga muvofiq oliy ta'lim sohasida davlat-xususiy sheriklikni rivojlantirish, hududlarda davlat va nodavlat oliy ta'lim muassasalari, shu jumladan nufuzli xorijiy oliy ta'lim muassasalari filiallari faoliyatini tashkil etish asosida oliy ta'lim bilan qamrov darajasini 50 foizdan yuqori bo'lishi ta'minlash rejalashtirilgan. Yuqorida keltirilgan vazifalarni amalga oshirish uchun aholi ijtimoiy holati va bandligini monitoring qilishning avtomatlashtirilgan tizimin ishlab chiqish tadqiqot ishining asosiy maqsadi etib belgilandi.

Bugungi kunda aholi bandligini ta'minlash bo'yicha davlat organlari ishlari samaradorligini oshirish, aholini mehnat faoliyatiga jalb qilish uchun qulay shart-sharoitlar yaratish jarayoni hozirgi kunda hayotga keng tadbir qilinmoqda. Aholini ijtimoiy holatini aniqlash asosida oliy ma'lumotli kadrlarga extiyoji bor hududlarni aniqlash imkoniyati yaratiladi. Aholining ijtimoiy holatidan kelib chiqib hududlardagi iqtisodiy va ijtimoiy holatni yaxshilash uchun markazlashtirilgan axborot tizimini yaratish bugungi globalashuv sharoitida dolzarb masala hisoblanadi. Bundan kelib chiqib aholiga ajratiladigan moddiy yordam va oliy ta'lim muassasalariga qabul kvotalarini hududlar kesimida avtomatlashtirilgan tizimdagi ma'lumotlar asosida belgilash yo'lga quyiladi. Respublikamizda kambag'allikni kamaytirish mexanizmi sifatida aholining ijtimoiy holati va bandligini monitoring qilish tizimi asosiy vosita hisoblanadi. Aholining ijtimoiy holati va bandligini monitoring qilish tizimining strukturasi va vazifalarini oldingi tadqiqot ishlarimizda batafsil keltirilgan. Mazkur tadqiqot ishida aholining ijtimoiy holati va bandligini monitoring qilish jarayonining matematik modellari tadqiq etilgan. Hozirgi kunda Respublikamizdagi hududlarda ijtimoiy holat va kadrlarga bo'lgan talab turlicha bo'lib qolmoqda. Shuning uchun bu jarayonlarni avtomatlashtirilgan tizimlar orqali amalga oshirish, optimal matematik modellarni ishlab chiqish dolzarb hisoblanadi.

2. Hududlarda kasbiy ma'lumotga ega bo'lgan mutaxassislar ehtiyojlarini bashorat qilishning matematik modeli.

Hozirgi kunda Respublika iqtisodiyotida malakali kadrlarning o'qitish darajasi, yo'nalishlari va hajmlari bo'yicha ehtiyojlarini modellashtirish asosda O'zbekiston Respublikasining oliy talim hamda kasb-hunar ta'limi tizimi uchun mutaxassislar tayyorlash bo'yicha davlat buyurtmasini shakllantirishga imkon beradi.

Kadrlar ehtiyojlarini modellashtirishning asosiy sxemasida iqtisodiy faoliyatning har bir turi uchun mehnat resurslari soni modellashtiriladi[3]:

$$L(t_{i+1}) = L(t_i) + S(t_i) - L^-(t_i),$$

Bu yerda: $L(t_{i+1}) - t_{i+1}$ yilda mavjud bo'lgan ish haqi miqdori.

$L(t_i) - t_i$ yilda iqtisodiyotda band bo'lganlarning o'rtacha soni.

$S(t_i) - t_i$ davrida mehnat bozorida qo'shimcha taklif (kasb-hunar ta'limi tizimining bitiruvchilari, qayta o'qitilganlar, ishsizlar, ishdan holi qolgan mehnat qiluvchilar);

$L^-(t_i)$ - mehnat bozoridan mehnat resurslari oqimi.

$$L^-(t_i) = L_{SC}^i(t_i) + L_M^-(t_i),$$

Bu yerda: $L_{SC}^i(t_i)$ - tabiiy yosh bo'yicha pensiya (aylanish darajasi);

$L_M^-(t_i)$ - mehnat muhojirlari.

Mutaxassislarga qo'shimcha ehtiyoj aniqlanadi:

$$\Delta D(t_{i+1}) = L^*(t_{i+1}) - L(t_i) + L^-(t_i) - S(t_i),$$

Bu yerda: $L^*(t_{i+1}) - t_{i+1}$ yildagi xodimlar extiyojining o'rtacha yillik bashorati;

Xodimlar extiyojini bashoratlash kasbiy ta'lim darajasi bo'yicha taqsimlanadi

$$R^e(i+1) = k^e \cdot \Delta D(t_{i+1}), \quad \sum_{n=1}^e k^n = 1,$$

Bu yerda: $R^e(i+1)$ - ma'lumot darajasi bo'yicha mutaxassislarga mo'ljallangan ehtiyojlar; e - ta'lim darajasi, k^e - e tashqi iqtisodiy faoliyat bilan shug'ullanuvchi mutaxassislarning ma'lumoti darajasi. Ta'limning barcha darajalarida ishchilarning umumiy mehnatidan maksimal darajada foydalanish:

$$a_1(1 - a_2) \sum_{i=1}^3 e^{t \cdot k_i} \left(\frac{K(t)}{\sum_{i=1}^3 L_i(t) e^{t \cdot k_i}} \right)^{a_2},$$

Bu ifodada bazi bir cheklovlar mavjud:

$$\sum_{i=1}^3 L_i(t) = L(t)$$

$$\sum_{i=1}^3 L_i(t) w_i(t) \leq \varphi(t) Y(t)$$

$$\sum_{i=1}^3 Q_i(t) \geq \sum_{i=1}^3 Q_i^{ucx}(t)$$

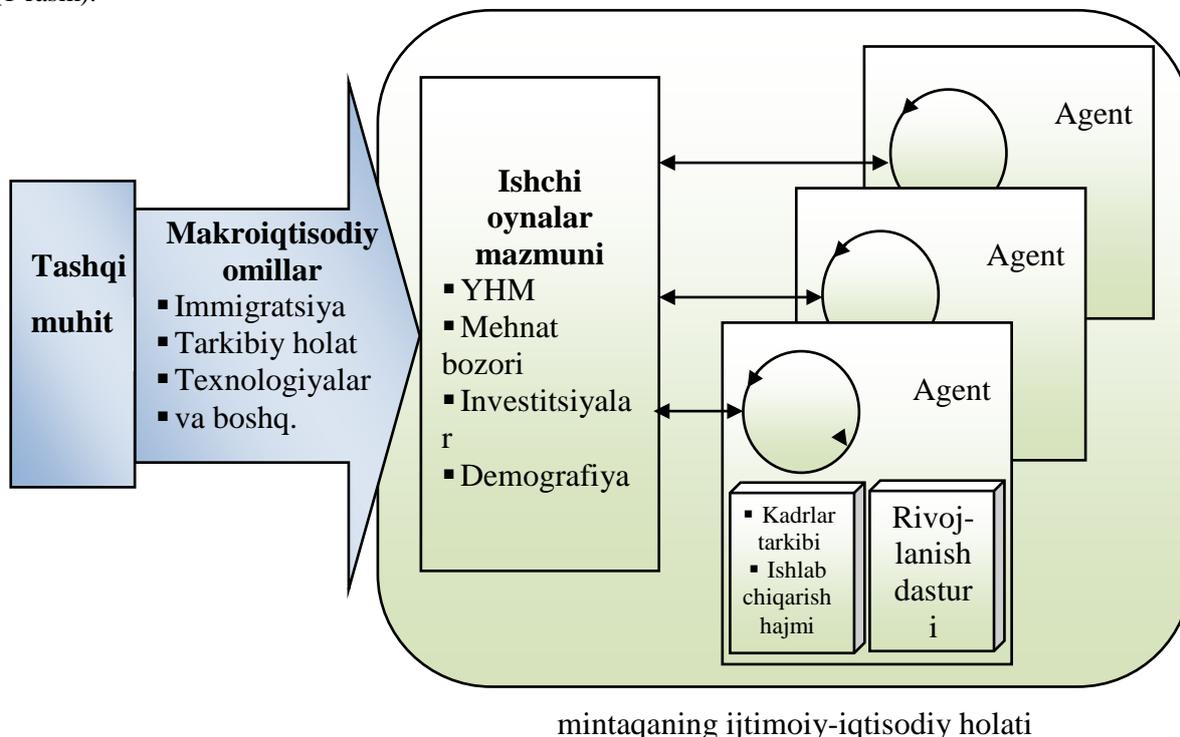
$$K(t) > 0, Y(t) > 0, L(t) > 0, L_i(t) > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, h_i > 0,$$

Bu yerda: $\varphi(t)$ – ishchilarga to'lanadigan ish haqi umumiy ishlab chiqarilgan mahsulotdagi ulushi;
 $w_i(t)$ – i-chi darajali ishchilarni ushlab turish uchun korxonaning xarajatlari;

$Q_i(t)$ – Ta'lim darajasi bo'yicha ishchilarni maqbul taqsimlash bilan barcha ta'lim darajalari ishchilarining ishlaydigan kumulyativ yordami.

3.Kadrlar ehtiyojlarini bashoratli modellashtirish uchun agent texnologiyasi

Ushbu muammoni hal qilishning istiqbolli usuli bu agentlik arxitekturasi yordamida bashoratli modellashtirish texnologiyalarini yaratishdir, bunda agentlar yakka tartibdagi tadbirkorlik sub'ektlarini yoki ularning ayrim sinflarini ifodalaydi va o'rganilayotgan mintaqaning ijtimoiy-iqtisodiy holatini aks ettiradi (1-rasm).



1-rasm. Kadrlarni bashorat qilish uchun agentlik texnologiyasining kontseptual sxemasi

Ushbu yondashuvning afzalliklari quyidagilardir: agentlar haqiqiy dunyoda prototipga ega; ularning xususiyatlarini ishga tushirish uchun ma'lumotlar olish osonroq, shu jumladan ekspert baholaridan foydalangan holda (model tarkibiy qismlari to'liq mavhum ob'ektlar bo'lgan yondashuvlar bilan

taqqoslaganda); makro va mikroiqtisodiy omillarni birlashtirish qulay. Bunday qulayliklar natijasida qo'yilgan masalani hal qilish oson kechadi[4-6].

Bundan tashqari, agent modeli ma'lum darajada real ijtimoiy-iqtisodiy tizimga izomorf bo'lganligi sababli, tizim rivojlanishining turli stsenariylarini shakllantirish va tahlil qilish soddalashtirilgan. Bundan tashqari, agentliklarni modellashtirish uchun ishlab chiqilgan dasturiy vositalarning mavjudligi keyingi ekspert tahlilini o'tkazish uchun tizimning ko'plab alternativ traektoriyalarini yaratishga imkon beradi[7]. Shu bilan birga, modellashtirishda agentlarga asoslangan yondashuvdan foydalanish manbali ma'lumotlarning to'liq emasligi va noaniqligi muammosini tubdan hal qilmaydi. Ularni olishning keng tarqalgan usullari - rasmiy statistika, so'rovlar va ekspert baholariga qo'shimcha ravishda, analogiya usulidan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Yangi tashkil etilgan kadrlar tarkibiga va shu kabi loyihalarning boshqa parametrlariga ko'paytirish, internetda ochiq ma'lumotlar bazalarining ko'payishi bilan ba'zi bir qulayliklar paydo bo'ladi bular: ma'lumotlarni qidirish va sun'iy nazorat usullaridan foydalangan holda avtomatlashtirilgan tahlil asosida bashorat qilinadi va yashirin ma'lumotlarni olish imkonini beradi. Shu bilan birga, ommaviy elektron aloqaning tobora ommalashib borishi, kompyuter texnologiyalarini amaliyotga joriy qilish orqali bashoratni shakllantirishda yanada ishonchli ekspert baholarini olish uchun "ekspert sifatida foydalanuvchi" tushunchasini samarali amalga oshiriladi.

Shunday qilib, biz ko'rsatilgan muammo kontekstida hal qilinishi kerak bo'lgan quyidagi tegishli ilmiy va amaliy muammolarni aniqlashimiz mumkin:

- mintaqaning kadrlar ehtiyojini bashoratli modellashtirish tizimining arxitekturasini rivojlantirish;
- namunaviy agentlarni ishga tushirishda analogiya usulini qo'llashni asoslash va asoslash;
- Modelning tuzilishini va uning alohida tarkibiy qismlarining aniqligini (ma'lumotlar agentlari va ma'lumotlar sahnasini boshlash uchun ishlatiladigan ishonchlilik darajasi) hisobga olgan holda bashoratning ishonchliligini baholash metodologiyasini ishlab chiqish[8].

4. Korrelyatsiya va regression tahlil asosida viloyat iqtisodiyotida band bo'lganlar sonini prognozlash bosqichlari.

Viloyatda ish bilan band aholini bashorat qilish bosqichlari ketma-ketligi 2-rasmda keltirilgan. Statistik bazaning nisbiy cheklovlari (etarli darajada asosli) ishlatilgan regressiya modellari turini oldindan belgilab qo'yilgan. $B(t) = F(\Phi_1, \Phi_2)$, bu yerda $B(t)$ – band axolining soni; Φ_1, Φ_2 - bandlikka ta'sir qiluvchi omillar. Biz statistik tahlil bo'yicha adabiyotlarda keltirilgan ma'lumotlarni hisobga olgan holda, ushbu modelga kiritilgan qo'shimcha omillar umumiy aholi sonidan kamida uch baravar kam bo'lishi kerakligini ko'rishimiz mumkin.

Quyidagi sxemadan xulosa qiladigan bo'lsak vaqt seriyalari dinamikasini tahlil qilish jarayonida iqtisodiyotning barqarorlik ko'rsatkichlar bandlik bilan uzviy bog'liqlikni ko'rsatadi. Biroq, ushbu o'zaro bog'liqliklarning aksariyat aralashuvlar bilvosita (boshqa omillar orqali) sabab-oqibat munosabatlariga to'g'ri keladi[9-11].

Asosiy ko'rsatkichlarni o'rganish oldingi davrlarning o'xshash ko'rsatkichning

5. Eksprement tajribasi

Tadqiqot ishining yuqoridagi bo'limlarida ishlab chiqilgan matematik model asosida taqqiqot eksprementi Samarqand viloyati misolida o'tkazildi.

Noravshan regressiya modelning elementlari sifatida quyidagi ijtimoiy iqtisodiy ko'rsatkichlar tanlandi[9,10].

y – kadrlarga bo'lgan extiyoj % (2) formula asosida.

x_1 – xorijga ishlashga ketuvchi mexnatga layoqatli fuqorolar emegratsiyasi ming kishi misolida

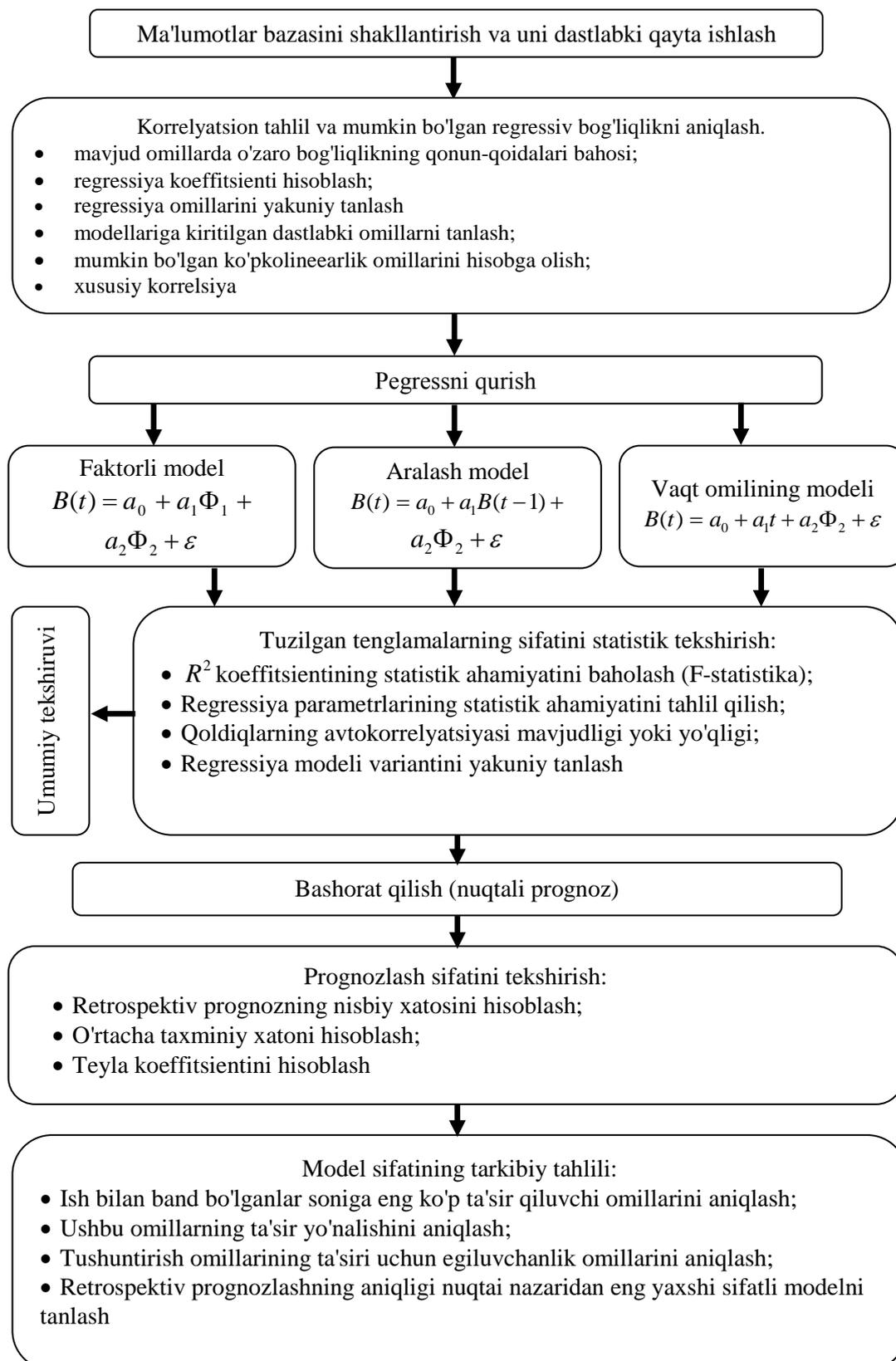
x_2 – yalpi hududiy mahsulot, mlrd. so'm.

x_3 – aholiga ko'rsatiladigan maishiy xizmatlar hajmi, mlrd. so'm.

x_4 – asosiy kapitalga keladigan investitsiyalar, mlrd. so'm.

x_5 – aholi soni, ming kishi.

x_6 – aholining har 1000 kishiga to'g'ri keladigan migratsiya o'sish koeffitsentlari.



2-rasm. O'rganilayotgan hududning band bo'lganlar sonini modellashtirish va prognozlash bosqichlari sxemasi.

Yuqoridagi keltirilgan parametrlar uchun Smarqand viloyati misolida quyidagi jadvalni hosil qilinadi (1-jadval).

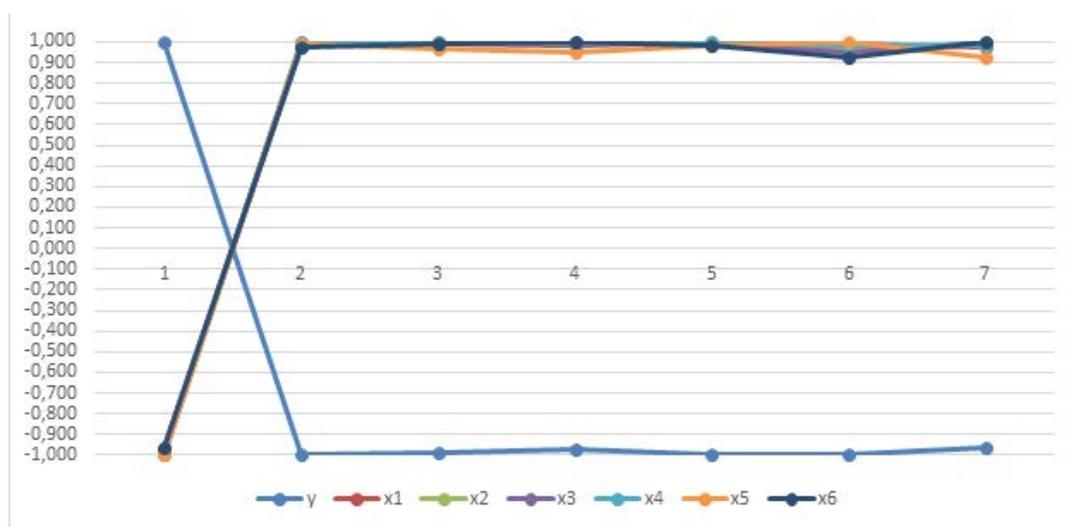
Samarqand viloyatining noravshan regressiya parametrlari

Y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
9	189,2	37594	43,977	9798,6	3878	2,6
9,3	183,7	30600	32,983	7643,2	3798,9	1,9
9,6	179,2	26562	28,325	6125,8	3687,6	1,3

Yuqorida keltirilgan sonli qiymatlar asosida $kor_{\infty}(X,Y)$ elementlardan iborat korrelyatsion matritsa analogi, R – matritsa quyidagi kurinishda shakllantiriladi. Bu koeffitsentlar ikkita faktor orasidagi yaqin bog‘lanish holatini ko‘rsatadi. Korrelyatsiyani hisoblashda standart usul (Pirson) dan foydalanildi.

$$R = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.99834 & -0.98824 & -0.97376 & -0.995 & -0.99527 & -0.96077 \\ -0.99834 & 1.0 & 0.99541 & 0.98526 & 0.9991 & 0.988 & 0.97516 \\ -0.98824 & 0.99541 & 1.0 & 0.9971 & 0.99857 & 0.9687 & 0.99188 \\ -0.97376 & 0.98526 & 0.9971 & 1.0 & 0.9916 & 0.94703 & 0.99868 \\ -0.995 & 0.9991 & 0.99857 & 0.9916 & 1.0 & 0.9806 & 0.98365 \\ -0.99527 & 0.988 & 0.9687 & 0.94703 & 0.9806 & 1.0 & 0.92927 \\ -0.96077 & 0.97516 & 0.99188 & 0.99868 & 0.98365 & 0.92927 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Matritsaning tahlili ba‘zi regressorlar orasida yaqin o‘zaro bog‘lanish mavjud degan xulosa chiqarishga imkon beradi. Manfiy ishora o‘zgaruvchilarning teng qiymatlilikda emasligi natijasidir, ya‘ni bog‘lanish xarakteri to‘g‘ri yoki teskari o‘zgaruvchilardan qaysinisi erksiz ekanligiga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, aholi sonining o‘sishi maishiy xizmatlar hajmining o‘sishiga olib keladi, lekin shu bilan birga aholiga maishiy xizmatlarning kamayishi aholi sonining kamayishidan daloat beradi. Yuqoridagi R matritsaning qiymatlaridan kelib chiqib, korrelyatsion ma‘lumotlarning grafik ko‘rinishi quyidagi 1-rasm holatida tasvirlanadi [12-14].



3-rasm. Korrelyatsion ma‘lumotlarning tizimli tahlili

Yuqoridagi ishlab chiqilgan modellar asosida aholining ijtimoiy holatlarini va bandligini real aniqlash imkoniyati yaratiladi. Bu yaratilgan modellar qism dasturiy funksiyalar yaratiladi va bu funksiyalar rejalashtirilgan axborot tizimi modullari tarkibiga kiritiladi. Matematik modellar asosida ishlab chiqilgan axborot tizimi Respublika aholi ijtimoiy holati va bandligini monitoring qilish, iqtisodiy ko‘rsatkichlarni real baholash imkoniyati yaratiladi.

6. Xulosa

Mintaqalar iqtisodiyotining kadrlar ehtiyojini bashoratlash dolzarb vazifa bo'lib qolmoqda. Ushbu muammoning murakkabligi, ko'p o'lchovli xususiyati uni bashoratli modellashtirish usullari va texnologiyalari ko'rinishida hal qilish uchun etarli ilmiy bazani yaratishni taqozo etadi. Kadrlar ehtiyojlarini modellashtirishda zamonaviy yondashuvlar tahlili tashqi va ichki omillarni hisobga olgan holda etarli darajada bashoratlash samaradorligini ta'minlaydigan universal echimlar yo'qligini namoyon etadi. Ishda ko'rib chiqilayotgan kadrlar ehtiyojini bashorat qilish modellari va yondashuvlarining eng muhim kamchiliklari ularning mintaqa iqtisodiyotining hozirgi tuzilishiga nisbatan izomorfizm darajasining pastligidir. Bu potentsial tarkibiy o'zgarishlarni, xususan, yirik investitsiya loyihalarini amalga oshirish bilan bog'liq holda makroiqtisodiy ko'rsatkichlarning keskin (inqirozli) o'zgarishini modellashtirish qobiliyatini tubdan pasaytiradi. Ko'rib chiqilgan ko'p holatlarda model parametrlarini aniqlash uchun ekspert yondoshuvi faol foydalanilmoqda, bu ko'rib chiqilayotgan hududlardagi iqtisodiy vaziyat o'zgarishiga qarab modelni dinamik qayta qurish imkoniyatini kamaytiradi.

Xodimlar ehtiyojini bashoratli modellashtirishning aniqlangan muammolarini potentsial samarali hal qilish bu o'rganilayotgan tizim uchun izomorf bo'lgan dinamik modellarni qurishni ta'minlaydigan agent yondashuvidan foydalanish hisoblanadi. Agent modellari yaxshi miqyosga ega va turli darajadagi iqtisodiy agentlarning ta'sirini ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda hisobga olinishi mumkin. Shu bilan birga, agentlik arxitekturasi ierarxik ijtimoiy-iqtisodiy tuzilmalarni aks ettiradigan ichki maketlarni qurish qobiliyatini beradi. Shu bilan birga, ko'rib chiqilayotgan amaliy muammo kontekstida agent yondashuvini amalga oshirish uchun bir qator trivial bo'lmagan ilmiy va amaliy muammolarni hal qilish kerak.

Adabiyotlar

1. Мокроносов, А. Г. Башоратирование обеспечения региональной экономики квалифицированными кадрами / А. Г. Мокроносов, А. А. Вершинин, Д. М. Прудников // Известия УрГЕУ. 2012.
2. Мокроносов, А.Г. Башоратирование потребности региональной экономики в подготовке кадров: монография. / А.Г. Мокроносов и др. – Екатеринбург: РГППУ, 2010. – 111с.
3. Васильева, З. А. Проблемы моделирования кадровой потребности региональной экономики / З. А. Васильева, И. В. Филимоненко // Вестник ТГЭУ. 2012. №4 (64). – С.46-57.
4. Васильева, З.А. Разработка методики прогнозирования спроса и предложения на рынке труда и образовательных услуг экономики муниципальных образований Красноярского края / З. А. Васильева, И. В. Филимоненко, Н.В. Разнова // Спрос и предложение на рынке труда и рынке образовательных услуг в регионах России: сб. докл. Всерос. науч.-практ. интернет-конф. С междунар. участием. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2008. – С.54-55.
5. Гуртов, В. А. Математическая модель прогнозирования спроса и предложения на рынке труда в российских регионах / В.А. Гуртов, Е. А. Питухин // Обзорение прикладной и промышленной математики. Т. 11. Вып. 3. М., 2004. – С. 539.
6. Гуртов, В. А. Моделирование потребностей экономики в кадрах с профессиональным образованием / В.А. Гуртов, Е. А. Питухин, Л. М. Серова // Проблемы прогнозирования. 2007.
7. Егорова, Моделирование кадровой потребности предприятий и отраслей экономики /Н.Е. Егорова, Я.В. Ярошенко // Аудит и финансовый анализ. 2011. №1. – С.75-83.
8. Куркина М.В., Пономарев И.В. Система нечетких отношений равенств в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. - Новосибирск: Изд-во Института математики, 2008. - С. 513.
9. Перекаренкова Ю.А., Пономарев И.В., Родионов Е.Д., Родионова Л.В. Региональный рынок труда: анализ, моделирование, башорат // Вестник Алтайской науки. - 2014. - № 1(19). - С. 57-65.
10. <https://mehnat.uz/oz/news/2019-yilda-ozbekistonning-ishsizlik-darajasi-qancha>
11. <http://www.zarnews.uz/uz/post/maishiy-xizmat-servislar-turiko-paymoqda>
12. <https://stat.uz/uz/ochiq-malumatlar>

UDK: 531 O' 65

**O'ZBEKISTONNING BA'ZI SUG'ORILADIGAN MAYDONLARI TUPROQLARINING
RADIATSION AKTIVLIGINI O'RGANISH****G.Ahmedova, R.Eshbo'riyev, S.K.Yuldashev, A.N.Kaxorova, U.X.Yunusova***Samarqand davlat universiteti
r-eshburiyev@mail.ru*

Annotatsiya. Mazkur ishda Samarqand viloyatining ayrim tumanlari tuproqlari va shu tuproqlarda o'sgan paxta chigitining aktivligi gamma spektrometrdagi olingan tajriba natijalari asosida qiyosiy o'rganildi. Shuningdek viloyat tumanlari tuproqlaridagi va paxta chigiti tarkibida mavjud ^{226}Ra , ^{232}Th , ^{40}K va ^{137}Cs radionuklidlar aktivligi ham o'rganildi. Tajriba natijalariga ko'ra tuproqlardagi radioaktivlik paxta o'simligi chigiti tarkibidagi aktivlikdan ancha (4-5 marta) yuqori ekanligi aniqlandi.

Kalit so'zlar: radionuklid, radioaktiv, izotop, element, reaksiya, zanjir, gamma, intensivlik, aktivlik, mutanosib, biologik, texnogen.

Изучение радиационной активности в некоторых посевных полях Узбекистана

Аннотация. В настоящей работе изучены гамма активности изотопов ^{226}Ra , ^{232}Th , ^{40}K и ^{137}Cs в почвах и в семенах хлопчатника в некоторых районах Самаркандской области. Определены, что величины гамма активности данных изотопов в почве в 4-5 раз больше, чем в семенах хлопчатника.

Ключевые слова: радионуклид, изотоп, активность, реакция, гамма, техногенный, радиоактивность, интенсивность.

Study of radiation activity in some crop fields in Uzbekistan

Abstract. In this research work, the radionuclide composition of soils of different regions (on the example of districts of Samarkand region) and the results of the experiment obtained with gamma-spectrometer of ^{40}K , ^{226}Ra , ^{232}Th and ^{137}Cs radionuclides, which can be accumulated in cotton seeds grown in the same soil, were studied. It was found that the values of gamma activity of these isotopes in the soil are 4-5 times more than in cotton seeds.

Keywords: radionuclide; radioactivity; cottonseed; accumulation; contamination; gamma-spectra.

Atrof-muhit namunalari aniqlanishi mumkin bo'lgan radionuklidlarga uran-toriy tabiiy radioaktiv oilalari radionuklidlari (^{226}Ra , ^{222}Rn , ^{214}Rb , ^{214}Bi , ^{228}Ac , ^{212}Rb va b.), Mendeleevning elementlar davriy sistemasining o'rta qismidagi ko'plab kimyoviy elementlarning tabiiy radioaktiv izotoplari (^{40}K , ^{87}Rb , ^{48}Ca , ^{176}Lu , ^{115}In , ^{138}La va b.), kosmogen (^7Be , ^{14}C , ^3H , ^{32}P va b.) va texnogen (^{137}Cs , ^{90}Sr , ^{89}Sr , ^{144}Ce va b.) radionuklidlar kiradi. Tabiiy radionuklidlar Yer qobig'ida mavjud va Yoshi Ernigiga teng bo'lgan dastlabki radioaktiv elementlardir. Koinotdan atmosfera havosiga tushayotgan yuqori energiyali kosmik zarralar (protonlar, neytronlar) atmosferaning yuqori qatlamlarida (~9 km balandlikda) havo tarkibidagi azot, argon, kislorod va boshqa gaz atomlari yadrolari bilan reaksiyaga kirishishidan yangi, nisbatan engil kosmogen radionuklidlar hosil bo'ladi va aerozollar bilan birikib, yer sirtiga tushadi. Texnogen radionuklidlar yadro bo'linishi mahsulotlari bo'lib, atmosferada o'tkazilgan yadroviy qurollar sinovlari, yadroviy qurilmalar portlashlari natijasida hosil bo'ladi va turli iqlim sharoitlari, ta'sirida atrof-muhitga tarqaladi va tabiat namunalari radioaktiv ifloslantiradi [1-2]. Atrof-muhitning radionuklidlar bilan ifloslanishi, ularning asosan oziq-ovqat mahsulotlari orqali insonlar organizmiga tushish xavfini tug'diradi. Radionuklidlarning inson organizmiga kirishi oziq-ovqat zanjiri orqali amalga oshadi[3].

Radioaktivlikni ulchash usuli: tadqiqot uchun olingan tuproq va shu tuproqda o'sgan chigit namunalari xona haroratida quritildi, ortiqcha jinslardan tozalandi va maydalandi. Namunalarda gamma-spektrlarini o'lchashlar Marinelli idishi geometriyasida o'lchami 63x63 mm, energiya bo'yicha ajrata olishi ^{137}Cs radionuklidining 661 KeV energiyali gamma chizig'ida 10% bo'lgan NaI(Tl)-kristalli ssintillatsion gamma-spektrometrida amalga oshirildi. Gamma-spektrometr OMACH to'plamidagi ^{232}Th , ^{226}Ra , ^{40}K , ^{137}Cs etalon radionuklidlar va zichligi 140-840 g/l bo'lgan to'ldiruvchilar yordamida effektivlik bo'yicha darajalandi. O'lchangan spektrlarni qayta ishlash standart spektrometrik qurilma va kompyuter dasturlari paketi asosida bajarildi. Har bir namunani o'lchash vaqti 2 soatdan iborat bo'ldi.

Tekshirilgan namunalarning gamma-spektrlarida tabiiy radioaktiv izotop ^{40}K ning 1460 KeV energiyali fotocho'qqisi yaqqol namoyon bo'lgan. Uran-238 radioaktiv oilasiga tegishli ^{214}Pb (295, 351 KeV), ^{214}Bi (609, 1120, 1764 KeV) va toriy-232 oilasi yemirilish zanjiriga kiradigan ^{228}Ac (911,

968 KeV) radionuklidlarning fotocho‘qqilari sezilarli darajada, ^{208}Tl (2614 KeV) kuchsiz holda hosil bo‘lgan. Namunalarning o‘lchangan gamma-spektrlarini tahlil qilishdan o‘rganilgan hududlar tuproqlari va shu tuproqda o‘sgan paxta chigitining radioaktivligi ^{226}Ra , ^{232}Th , va asosan ^{40}K va qisman ^{137}Cs texnogen radionuklidlar bilan belgilanishini ko‘rish mumkin. Tadqiq etilgan namunalar gamma-spektrlarida aniqlangan radionuklidlarning fondagi gamma-chiziqlaridan farq qiladigan analitik gamma-chiziqlari intensivliklari orqali radionuklidlarning solishtirma aktivliklari aniqlandi. Natijalar jadvalda keltirilgan.

Radionuklidlarning solishtirma aktivliklarini aniqlashda o‘lchash natijalarining nisbiy xatosi tuproqlarda 10-14%, chigitda 12-19% ni tashkil qildi. Namunalar gamma-spektrida aniqlangan radionuklidlarning solishtirma aktivliklari quyidagi jadvalda keltirilgan, Bk/kg larda.

Jadval

T/r	Tekshirilgan namunalar tarkibi:		^{226}Ra	^{232}Th	^{40}K	^{137}Cs
	Viloyat hududlari					
1	Ishtixon tumani	Tuproqda	41	38	621	15
		Chigitda	8	7	304	4
2	Pastdarg‘om tumani	Tuproq‘da	35	40	708	16
		Chigitda	12	9	605	5
3	Jomboy tumani	Tuproq‘da	42	35	797	15
		Chigitda	9	7	407	4

Tuproqlarda aniqlangan radionuklidlarning intensivliklari ularning chigitlardagi intensivligidan 4-5 marta yuqori. Tuproqlarda va chigitlarda eng yuqori aktivlik ^{40}K ga to‘g‘ri keladi. Tuproqlarda $A(^{40}\text{K})=621-797$ Bk/kg, chigitlarda $A(^{40}\text{K})=304-605$ Bk/kg oraliqda o‘zgaradi. Buning sababini kaliy elementining Er qobig‘ida katta miqdorda (2,5%) tarqalganligidir, tuproqlarga kaliyli o‘g‘itlar bilan turlicha ishlov berilishidan, chigitlarda esa kaliyning to‘planishi uning tuproqdagi miqdoriga mutanosibligidan deb qarash mumkin. Kaliy elementi tirik organizmlar hayot faoliyatida zaruriy element hisoblanadi. O‘simliklarda ayniqsa uglevod va oqsillar almashinuvida kaliy yuqori darajada o‘rin tutadi, fermentlar funksiyasini boshqarishda qatnashadi, oziq-ovqat maxsulotlarida kaliyning yetarlicha bo‘lmasligi yosh organizmning o‘sishini keskin sekinlashtiradi. Organizmda asab to‘qimalarining faoliyati undagi kaliy miqdoriga bog‘liqligi aniqlangan. Kaliy tirik organizmlarda modda almashinuviga yetarlicha darajada ta‘sir qiladi [2].

^{226}Ra radionuklidi ^{238}U radioaktiv oilasiga mansub bo‘lib, u minerallar kristall panjarasidan tashqarida joylashganligi sababli tog‘ jinslaridan nisbatan osonroq ajraladi. Turli tuproqlarda aniqlangan ^{226}Ra aktivliklari orasidagi farq ahamiyatli emas-(35-42) Bk/kg, bu esa ^{226}Ra ning tuproqlardan yuvilib chiqishining pastligi bilan tushuntirilishi mumkin. Xuddi shunday, chigitlarda aniqlangan ^{226}Ra aktivliklari farqi ham e‘tiborli emas (8-11) Bk/kg, bu esa ^{226}Ra ning chigitda to‘planishi uning tuproqdagi miqdoriga mutanosibligini ko‘rsatadi. ^{232}Th ning turli tuproqlarda aniqlangan aktivliklari qiymatlari ham bir-biriga yaqin – (35-40) Bk/kg, chigitlarda ham ^{232}Th aktivliklari farqi unchalik darajada katta emas – (7-9) Bk/kg. Bu natijalardan shunday xulosa qilish mumkin, chigitda aniqlangan ^{40}K , ^{232}Th , ^{226}Ra radionuklidlarining miqdori, ularning tuproqdagi miqdoriga deyarli mutanosib, lekin tuproqdagi miqdoridan bir necha marta kichik: ^{226}Ra - 3-5, ^{232}Th - 4-5, ^{40}K - 1,2-2 marta. Turli mikroelementlarning, jumladan radionuklidlarning o‘simliklarda to‘planishi bir necha omillarga bog‘liq: o‘simliklarning o‘zining biologik xususiyatlariga, tuzilishiga, tuproqning kimyoviy tarkibiga, sug‘oradigan suvlardagi elementlar miqdoriga va boshqa faktorlarga bog‘liqligi mutaxassislar tomonidan aniqlangan[2].

Oliming natijalardan shuni xulosa qilish mumkinki, tekshirilgan namunalar gamma-spektrida aniqlangan texnogen radionuklid ^{137}Cs ning uch xil hududdan olingan tuproqlardagi aktivligining farqi ham ahamiyatli darajada emas (15-16) Bk/kg. Jadvaldan ^{137}Cs ning chigitlarda to‘planish miqdori uning tuproqdagi miqdoriga mutanosibligini ko‘rish mumkin, lekin chigitda to‘planishi tuproqdagi miqdoriga nisbatan 3-4 marta kichik.

Tadqiqotlardan aniqlangan natijalar ^{226}Ra , ^{232}Th , ^{40}K tabiiy radionuklidlarning ushbu ishda o‘rganilgan hududlar tuproqlarida qanday miqdorda tarqalganligi hamda paxta o‘simligi chigitda radionuklidlarning to‘planish darajasi to‘g‘risida ma‘lumotga ega bo‘lish imkoniyatini beradi. Xuddi shunday tuproqlarda texnogen ^{137}Cs miqdori va uning o‘simliklarga o‘tishi darajasi haqida ham qimmatli ma‘lumotga ega bo‘lish mumkin.

Adabiyotlar

1. Азимов А.Н., Алибеков А., Базарбаев Н.Н., Муминов И.Т. и др. Радионуклиды в почвах адыров Каратюбинских гор. // Препринт АН РУз Институт Ядерной физики, Р-У-691 Ташкент, 2010. – Стр.4, 13-14.
2. Перцов Л.А. Ионизирующие излучения биосферы. – Москва: Атомиздат, 1973. – Стр.25-27, 211-218.
3. Василенко И.Я. Биологическое действие продуктов ядерного деления. – Москва: Бином, 2011. – С.50-54.

UDK: 523.84

V*V669 Cyg TO‘SILUVCHAN ZICH QO‘SHALOQ O‘ZGARUVCHAN YULDUZINING FOTOMETRIK TADQIQI

F.Xamrakulov, B.Jurayev, T.Alimov, S.Ergashev, A.Kulmuradov

Samarqand davlat universiteti

x-farxodjon@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada V* V669 Cyg to‘siluvchan zich qo‘shaloq o‘zgaruvchan yulduzining 2019 yil avgust oyidagi kuzatuv natijalari IRAF dasturlar paketi yordamida birlamchi qayta ishlandi va VAST dasturi bilan fotometrik tahlil qilindi. Olingan fotometrik tahlil natijalari WinEfk yordamchi dastur yordamida davri, ko‘rinma yulduz kattaligi va tebranish fazasi aniqlandi.

Kalit so‘zlar: evolyutsion bosqichlar, o‘zgaruvchan yulduzlar, zich qo‘shaloq yulduzlar, chastota, yorqinlik egri chizig‘i.

Фотометрические исследования тесно – затменно-переменная звезда V* V669 Cyg

Аннотация. В данной статье на основе программы IRAF проведена первичная обработка данных полученных в августе 2019 года о переменной звезде V* V669 Cyg, а также используя программу VAST проведен фотометрический анализ с применением вспомогательной программы WinEfk. Определены период, звездная величина и фаза.

Ключевые слова: эволюционный этап, переменные звезды, тесные затмение звезды, частота, кривой блеска.

Photometric investigation of V*V669 Cyg eclipsing – binary variable star

Abstract. In this paper, the results of the August 2019 observation of the eclipsing – binary variable star V* V669 Cyg were primary processed using the IRAF software package and analyzed photometrically with the VAST program. The results of the photometric analysis were determined the period, magnitude and phase of the visible star with the help of the WinEfk utility.

Keywords: evolution etap, variable star, eclipsing binary, frequense, light curvy.

Yulduzlarni o‘zgaruvchanligini kuzatish, tahlil etish yulduzlarning evolyutsion nazariyasini kamchiklarini to‘ldirishda va yulduz atmosferasidagi sodir bo‘ladigan jarayonlarni o‘rganishda muhim hisoblanadi. EA – Algol yoki β Persey tipidagi to‘siluvchan sistemalar, sferik yoki ozgina ellipsoid tarkibiy qismlariga ega bo‘lgan ikkilik sistemalaridir. Ularning yorqinlik egri chiziqlari orqali, to‘silishi boshlanishini va tugash vaqtlarini belgilash mumkin. To‘silishlar oralig‘ida yorug‘lik deyarli o‘zgarmaydi yoki akslanish effektlari vujudga keladi. Tarkibiy qismlarning ellipsoidligi yoki fizik o‘zgarishlar tufayli yorqinlik egri chizigidagi o‘zgarishlar yuzaga keladi. V*V669 Cyg yulduzi – EA tipidagi to‘siluvchan-o‘zgaruvchan obyekt bo‘lib koordinatalari: $\alpha_{j2000} = 20^h 17^m 00,33^s$ va $\delta_{j2000} = +39^{\circ} 08' 19,57''$, Mag B=11,77^m, Mag V=11,61^m bo‘lib, spektral sinfi esa B2V temperaturasi taxminan ≈ 21000 K ushbu obyektida ma‘lum davrga ega bir necha hodisalar aniqlangan. V*V669 Cyg zich qo‘shaloq yulduzi birinchi marta Whitney (1952) tomonidan kashf etilgan.

Kirish. XIX asrning oxirlariga kelib koinotda ko‘plab yulduzlar o‘z yorqinliklarini noodatiy ravishda o‘zgartirib turishi ma‘lum bo‘ldi. Shundan so‘ng astronom olimlar nima sababdan yorqinligini o‘zgartirib turishiga qiziqishdi va o‘zgaruvchan yulduzlar fizikasi sohasini yuzaga kelishiga sabab bo‘ldi. Zamonaviy ilm-fannig so‘ngi yutuqlaridan hisoblangan Zaryadli Aloqa Qurilmasi (ZAQ) yani Charge-coupled device (CCD) kameralarning yuzaga kelishi amaliy astronomiyani ko‘plab yutuqlariga sabab bo‘ldi. Astronomlar o‘zgaruvchan yulduzlar o‘rganishda asosan ikki katta guruhga ichki (intrinsic) va tashqi (extrinsic) guruhlariga ajratib o‘rganiladi [1]. O‘z navbatida har bir guruh yulduzlari ham sinflarga

bo'linadi. Ushbu sinf vakillaridan biri to'siluvchan qo'shaloq (Eclipsing binary) yulduzlardir. Koinotda yulduzlar qurollanmagan ko'z bilan qaralganda yakka holda bo'lib ko'riladi. Aslida esa yulduzlarning katta qismi ikkilik yoki ko'p sonli sistemalardan tashkil topgan bo'lib, o'zaro dinamik bog'langandir. Bunday sistemalar dinamik bog'lanishining sababini tushuntirib beruvchi "gravitatsion fragmentatsiya" (qism, bo'lak) nazariyasidir. 1940 yil oxirida K.Veytszeker g'oyasiga ko'ra yulduzlararo moddaning (gaz chang buluti) dastlabki turbulentiida

gravitatsion kollapslanib hosil bo'lgan fragmentlar yani protoyulduzlar o'zaro tasirlashuvi inobatga olinadi. Qo'shaloq sistemalarda yulduzlarning aylanishi va harakatini o'lchash protoyulduz muhitida uyurmali oqimlar mavjudligi taxminiga olib kelingan [2].

O'zaro juda kichik burchak masofada joylashgan qo'shaloq yulduzlarni bevosita ajratib ko'rishning iloji yo'q bo'lib, ularning qo'shaloqligi fotometrik yoki spektral metod yordamida aniqlanib to'siluvchan yoki spektral qo'shaloq yulduzlarga ajratiladi [3].

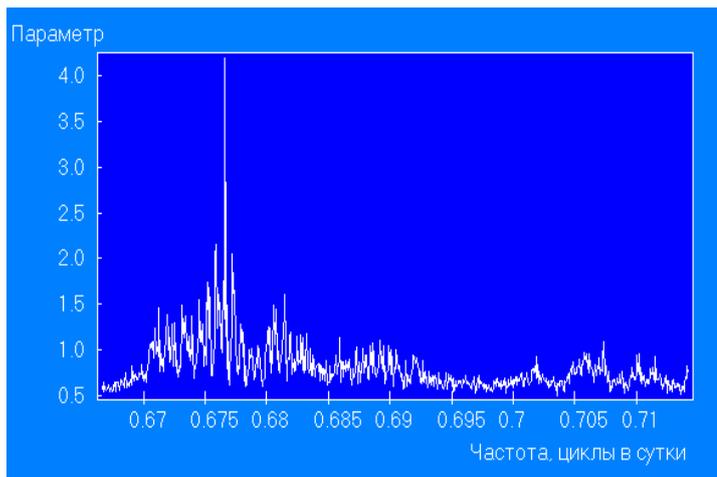
To'siluvchan o'zgaruvchan yulduzlarga binar sistemalar deb ham atalib, komponentlari davriy ravishda bir-birining oldidan kesib o'tib massa markazi atrofida harakatlanadi. Bunday o'zgaruvchilarda yorqinlik o'zgarishlari yulduzlar ichidagi hech qanday fizik o'zgarishlarsiz yuzaga keladi. Boshqa o'zgaruvchan yulduzlarda yorqinlikning o'zgarishi yulduzning ichki o'zgarishlari bilan bog'liq bo'ladi [4]. Binar yulduzlarning yorqinligini o'zgartirib turishi geometrik sabablarga ko'ra vujudga kelib yerdan turib kuzatganda bir birini to'sib o'tish (tutilishlar) va yonma-yon holatdagi vaziyatlarda yorqinlik o'zgarishi yuzaga keladi [5]. O'zgaruvchan yulduzlarning boshqa turlari kabi bu guruh vakillari ham yorqinlik egri chizig'iga ko'ra EA- algol, EB - β Lira va EW - W Ursa Majoris sinflarga bo'linadi [2].

Asosiy qism. Oqqush (Cygnus) yulduz turkumidagi V* V669 Cyg yulduzi kuzatuvlar 2019 yil avgust oyida Samarqand davlat universiteti astronomiya o'quv-ilmii observatoriyasi (uzunlamasi $39^{\circ}40'27''$ va kenglamadasi $66^{\circ}57'51''$ 785 metr dengiz sathidan balandlik) ko'zgusining diametri 480 mm, fokus masofasi 9450 mm, reflektor bo'lgan Cassegrain sistemasida ishlaydigan "Grubb Parsons" teleskopida olib borildi. Kuzatuvda: Quantum Scientific Imaging (QSI) 683ws markali, Zaryad Aloqa Qurilma (ZAQ) dan foydalanildi. ZAQ ning piksel o'lchami $5,4 \times 5,4 \mu\text{m}^2$, ko'rish maydoni $5,5'' \times 5,5''$ (yoy minut), filtr tizimi Johnson-Cousin UBVRI (U-ultrabinafsha, B-ko'k, V-yashil, R-qizil, I-infratqizil). Kuzatuvlarning

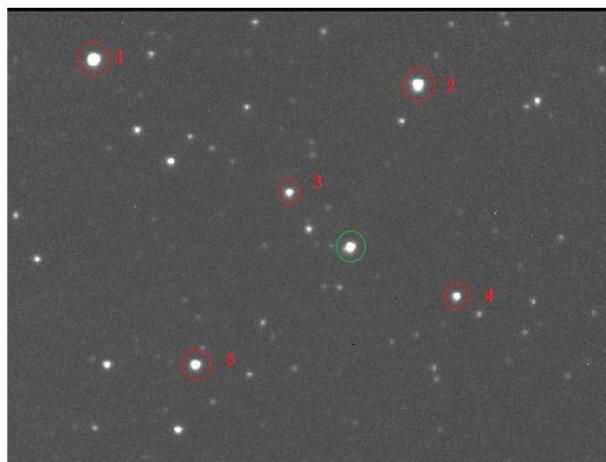
barchasida ZAQ shovqin xatoligini kamaytirish maqsadida -20° C haroratda, R (red) filtrda 60 sekundlik expoziitsiya vaqti bilan o'tkazildi.

Tadqiqot olib borilayotgan yulduz yorqinligini o'zgarishi atrofda yorqinligini o'zgartirmaydigan standart yulduzlarga nisbatan hisoblangan.

Kuzatuvdan olingan tasvirlarning umumiy soni jami 2317 ta bo'lib, kuzatuv vaqti 38,62 soatni tashkil etdi. Ushbu kuzatuv vaqti obyektning o'zgaruvchanlik davrini aniqlash uchun yetarli. Astrotasvirlar Image Reduction Analsys Facility (IRAF) dasturida, yordamchi *bias*, *dark* va *flat* tasvirlar bilan birlamchi qayta ishlanib Variability Search Toolkit astrotasvirlarda o'zgaruvchanlikni qidirish vositasi (VAST) [6] dasturi asosida eng kichik o'rta kvadratik chetlanishlari asosida astrotasvirlar fotometriyasi va WinEfk [7]



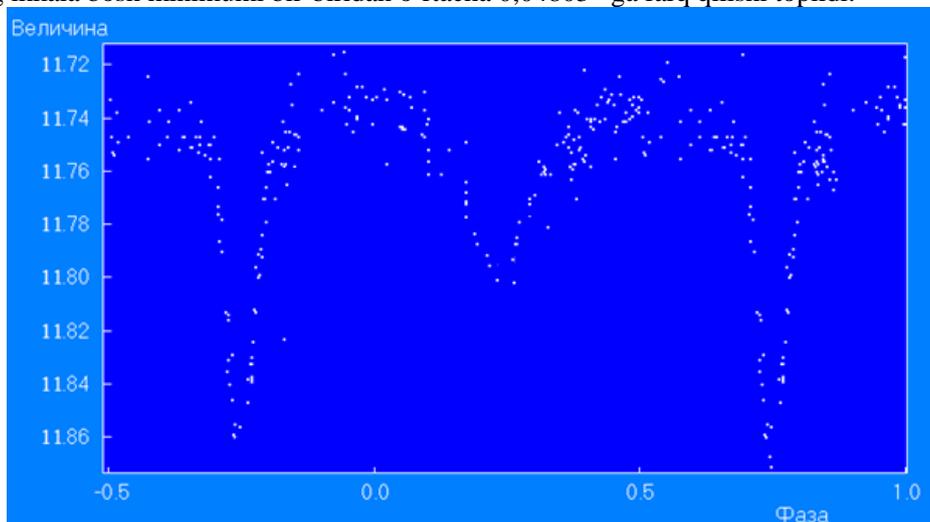
1-rasm. Yashil halqa bilan ajratilgan V* V669 Cyg yulduzi yonidagi qizil halqa belgilangan yordamchi referent yulduzlar tasviri.



2-rasm. obyektning amplitudaviy spektri.

yordamchi dasturida yorqinlik egri chizig'ini, davri hamda takrorlanish chastotasi bir sutkadagi tebranishlar soni 0,6765603 teng ekanligi aniqlandi.

V* V669 Cyg yulduzining o'zgaruvchanlik davri $P=1,4780649 \pm 0,000371$ sutka ekanligi aniqlandi. "L – K period" dasturi asosida Lafler – Kingman metodi [8] bilan yorqinlik egri chizig'ining birinchi va ikkinchi minimumlarini qiymatlari aniqlandi. Tadqiqot natijasiga ko'ra yorqinlik egri chizig'ining ikkala bosh minimumi bir-biridan o'rtacha $0,04803^m$ ga farq qilishi topildi.



3-rasm. V*V669 Cyg yulduzining yorqinlik egri chizigini fazaviy bog'lanishi

1952-yilda esa Whitney tadqiqotlari orqali ushbu tizimning radial tezligini hamda uning o'zgarishini o'rganib qo'shaloq tizim atrofida uchinchi jism borligini, ushbu yulduz spektral sinfi B2 va algol yani EA tipiga mansub to'siluvchan-o'zgaruvchan qo'shaloq tizim ekanligini aniqlagan [9]. Ushbu tizimning orbita qiymaligi $i=54^\circ$ bo'lib ikkala birlamchi va ikkilamchi minimum ham qisman to'silish hisobiga uchli shaklga ega. Uchinchi jism tizimning umumiy ravshanligining 19% kamayishiga hissa qo'shgan [10] degan fikir o'rinli ekanligi yana bir bor tasdiqlandi.

Xulosa. Samarqand o'quv ilmiy observatoriyasida kuzatilgan V*V669 Cyg o'zgaruvchan yulduzining o'zgaruvchanlik davri $P=1,4780649 \pm 0,000371$ sutka ekanligi va yorqinlik egri chizig'ining ikkala bosh minimumi bir-biridan o'rtacha $0,04803^m$ ga farq qilishi aniqlandi.

V*V669 Cyg birlamchi normal B2V sistema bo'lsa, ikkilamchi tabiati unchalik aniq emas. Obyektning amplituda o'zgarishi yulduz atrofidagi katta va issiq boshlang'ich Rosh qobig'i sababi bo'lishi mumkin. Sistemaning ikkinchi komponentasi - qalin disk bilan o'ralgan, temperaturasi nisbatan pastroq yulduz bo'lishi mumkin. Ushbu umumiy sistemaning evolyutsiyasi davomida birlamchi kengayish jarayoni asta-sekin sekinlashadi va akreksiya tufayli diskning zichligi pasayishi bo'lishi mumkin degan umumiy xulosalar kelib chiqadi.

Adabiyotlar

1. "Variable Star Classification and Light Curves" An AAVSO course for the Carolyn Hurless Online Institute for Continuing Education in Astronomy (CHOICE) 2017 y, page 23
2. Josef Kallrath, Eugene F. "Eclipsing binary stars modeling and analysis" Springer Dordrecht Heidelberg London New York 2009, page 113-116
3. M.Mamadazimov "Astronomiya akademik litsey va kollejlari uchun" 2009 yil, 209 page .
4. Hannu Carttunen, Pekka Kroger, Heikki Oja, Markku Pautanen, Kar Johan Donner. Fundamental astronomy. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2017. 308-310 pages.
5. John R. Percy "Understanding Variable Stars" Cambridge University Press The Edinburgh Building, Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York 2007. page 103
6. VAST- *VaST* [Variability Search Toolkit] is a software for *variable star* detection on a series of astronomical images dasturi
7. WinEff – Виталий Горанский, ст.н.с. ГАИШ, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова dasturi
8. L – K Period – Lafler J., Kinman T.D. *Astrophys. Journal, Supplement* 11, 216L (1998). Dasturi

9. M.M.Zakirov "Close Binary System in star-forming regions: KV Cyg, V435 Cyg, V669 Cyg in the OB Association Cyg OB1" *Astronomicheskii Zhurnal*, Vpl 25, #4, 1999, pp 276-290

10. A.Azimov M.Zakirov "An enigmatic close binary V669 Cyg" *Information bulletin variable stars* 1991

УДК: 53 С 149

**ВЫРАЩИВАНИЕ И СТРУКТУРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭПИТАКСИАЛЬНЫХ СЛОЕВ
ТВЕРДОГО РАСТВОРА $Si_{1-x}Ge_x$ ($0 < x < 1$)**

А.С.Саидов¹, А.Ш.Раззоков²

¹Физико-технический институт НПО «Физика–Солнце» АН РУз

²Ургенчский государственный университет

razzokov.a@bk.ru

Аннотация. В статье показан выбор оптимального режима технологического процесса роста эпитаксиальных слоев твердых растворов $Si_{1-x}Ge_x$ из оловянного и галлиевого раствора – расплава на подложку Si<111>, с наименьшими плотностями дислокации, которые достигнуты экспериментально нами. Обнаружена экспоненциальная зависимость между величинами плотности дислокации и толщины плёнки. С плавным переменным составом структуры, избегая от разности параметров решеток Si и Ge получены структурно совершенные эпитаксиальные слои $Si_{1-x}Ge_x$ ($0 < x < 1$).

Ключевые слова: эпитаксия, кристаллизация, раствор-расплав, твердый раствор, гетероструктура, дислокация, подложка.

$Si_{1-x}Ge_x$ ($0 < x < 1$) qattiq aralashma epitaxial qatlamlarini o`stirish va strukturasi o`rganish

Annotatsiya. Ushbu maqolada, $Si_{1-x}Ge_x$ qattiq aralashma epitaxial qatlamlarni qalayli va gallyli eritmadan Si<111> taglikka zichligi etarlicha kam bo`lgan dislokatsiyalar bilan o`stirishning optimal texnologik jarayoni to`g`risida olingan tajribaviy ma`lumotlarimiz beriladi. Epitaxial qatlamlar qalinligi bo`yicha dislokatsiyalar zichligi o`zgarishining bog`lanishi eksponensial ekanligi aniqlandi. Olingan qattiq aralashma epitaxial qatlamlari tarkibini tekis o`zgartira borib, Si va Ge kristall panjaralari doimiylari farqini etarlicha kamaytirib strukturaviy mukammal $Si_{1-x}Ge_x$ ($0 < x < 1$) epitaxial qatlamlarni o`stirish mumkinligi ko`rsatildi.

Kalit so`zlar: epitaksiya, kristallanish, eritilgan-eritma, qattiq aralashma, geterostrukтура, dislokatsiya, taglik.

Growth and structure investigation of epitaxial layers of the solid solutions $Si_{1-x}Ge_x$ ($0 < x < 1$)

Abstract. The article shows the selection of the optimal process regime for the growth of epitaxial layers of $Si_{1-x}Ge_x$ solid solutions from tin and gallium solution - melt on a Si<111> substrate, with the lowest dislocation densities that we experimentally achieved. An exponential relationship was found between the values of the dislocation density and the film thickness. With a smooth variable composition of the structure, avoiding the difference in the parameters of the Si and Ge lattices, structurally perfect epitaxial layers $Si_{1-x}Ge_x$ ($0 < x < 1$) were obtained.

Keywords: epitaxy, crystallization, melt solution, solid solution, heterostructure, dislocation, substrate.

Одним из наиболее широко используемых в полупроводниковом приборостроении способов получения эпитаксиальных слоев является их кристаллизация из растворов-расплавов, называемая жидкофазной эпитаксией (ЖФЭ).

Растворитель может быть расплавом одного из основных компонентов кристаллизующегося соединения и твердого раствора, например, расплав галлия при получении эпитаксиальных слоев $Si_{1-x}Ge_x$. Им может служить также расплав легкоплавкого легирующего элемента, например, расплав олова при получении лепфованных оловом эпитаксиальных слоев $Si_{1-x}Ge_x$.

В настоящее время для создания полупроводниковых приборов, используют гетероструктуры на основе твердых растворов соединений класса $A^{IV}B^{IV}$ [1-4]. Преимущество двухкомпонентных твердых растворов состоит в возможности сохранения кристаллически

совершенной структуры плавно и незначительно изменяя вдоль роста периода кристаллической решетки a пленок при изменении ширины запрещенной зоны E_g [5].

Однако, обычно полупроводники и полученные гетероструктуры на их основе этого класса имеют существенный недостаток, заключающийся в рассогласовании величины параметра решетки 'а' и коэффициентов термического расширения 'α' (КТР) подложки и кристаллизующего слоя ($a_{Si} = 5,4307 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $a_{Ge} = 5,66 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $\alpha_{Si} = 5,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_{Ge} = 6,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$). Из-за этого в пленке образуется множество дефектов.

При выращивании двух и многокомпонентных твердых растворов из жидкой фазы наиболее существенный вклад в дефектообразование вносят следующие факторы: различие периодов решеток Δa и КТР $\Delta \alpha$, сопрягающихся на границе материалов, неоднородность состава вдоль толщины эпитаксиальных слоев dC/dx . А также значительную роль в дефектообразовании двухкомпонентных гетероструктур играет наследование дефектов подложки. На дефектах происходит рассеивание носителей заряда, что значительно ухудшает характеристики полупроводниковых приборов, изготовленных на их основе.

Для получения гетероструктуры, согласованной по периоду кристаллической решетки и КТР, необходим переход к двухкомпонентным плавноизменяющим варизонным составом твердых растворов.

Использование полупроводниковых твердых растворов $Si_{1-x}Ge_x$, выращенных на подложках кремния, позволяет независимо регулировать ширину запрещенной зоны E_g , период решетки a , а также КТР α , что особенно важно для приборов, основанных на излучательной рекомбинации.

В связи с этим исследование твердых растворов $Si_{1-x}Ge_x$, выращенных на подложках кремния (которой является значительно дешевле полупроводниковым материалом чем остальные), является весьма актуальным.

Плавно изменяя состав твердого раствора $Si_{1-x}Ge_x$, можно управлять параметрами твердого раствора, такими как ширина запрещенной зоны, область спектральной фоточувствительности. Например, если синтезировать твердый раствор, состоящий из компонентов кремния и германия, то этот твердый раствор объединяет в себе области спектральной фоточувствительности кремния и германия и имеет более широкую область спектральной фоточувствительности, чем кремний и германий. Это имеет важное значение для создания эффективных солнечных элементов.

Кроме того, для интенсивного развития микроэлектроники необходимы полупроводники со значительно более высокими, чем у кремния Si пробивными электрическими полями, шириной запрещенной зоны, большой подвижностью электронов и устойчивыми к высоким температурам.

Нами были выращены эпитаксиальные пленки твердого раствора $Si_{1-x}Ge_x$ методом жидкофазной эпитаксии во всем интервале концентраций ($0 \leq x \leq 1$).

С целью установления зависимости качества пленок от состава, температуры и начала кристаллизации и скорости принудительного охлаждения были проведены эксперименты с изменением необходимых параметров. Исследования показали, что наиболее качественные эпитаксиальные пленки твердого раствора $Si_{1-x}Ge_x$ получаются при охлаждении раствора-расплава со скоростью 0.5-1.5 град/мин, толщине раствора-расплава, то есть ширина зазора между двумя горизонтально расположенными подложками **0.75 ÷ 1.5 мм**. В качестве подложек были использованы монокристаллические Si (111) с отклонением - **(0°15' ÷ 0°30')** n-типа проводимости.

Эпитаксиальные пленки $Si_{1-x}Ge_x$ выращивались при температуре начала и окончания кристаллизации соответственно в интервале 1050-750 °C. Состав раствора-расплава, состоящего из Si , Ge и Sn , а также Si , Ge и Ga определялся из диаграммы состояния двойного сплава $Sn-Si$, $Sn-Ge$ и $Ga-Si$, $Ga-Ge$.

Были исследованы морфологические поверхности полученных пленок, с помощью атомно-силового микроскопа. Нами подобраны состав травителя (использовались смеси концентрированных плавиковой (HF), азотной (HNO₃) и уксусной (CH₃COOH) кислот в различных соотношениях) для выявления дислокаций поверхности пленок учитывая процентную долю компонентов в пленке.

Полученные экспериментальные данные показали, что дислокация выращенных полупроводниковых твердых растворов $Si_{1-x}Ge_x$ зависит от всех технологических параметров, как температуры роста, скорости принудительного охлаждения, ориентации и чистоты подложек, типа растворителя и особенно толщины пленок которые характеризует степень варизонности (рис.1).

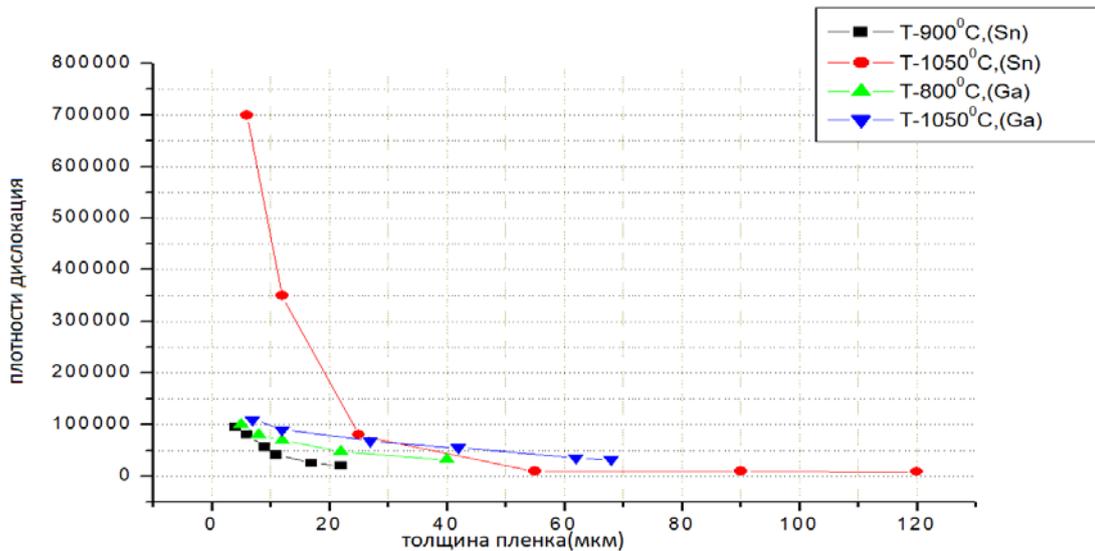


Рис.1. Зависимость плотности дислокаций (N_i) эпитаксиальных слоев твердого раствора $Si_{1-x}Ge_x$ от толщины (d) пленок выращенных из оловянного и галлиевого раствора-расплава при температуре T_{HK} -800⁰C, 900⁰C, 1050⁰C.

Из рисунка 1., видно, что зависимость концентрация дислокаций в пленке от толщины и соответственно от содержания состава твердого раствора является экспоненциальной определяется формулой $N_i = ae^{bd}$. Коэффициент a и степенной коэффициент b зависят от содержания компонентов кремния или германия в твердом растворе, поэтому рассматриваются как некоторые функции, зависящие от состава пленки:

$$a(x, y) = (\psi_{i1}x + \psi_{i2}y) \cdot 10^\gamma$$

$$b(x, y) = (\psi_{i3}x + \psi_{i4}y)$$

$$N_{i0}(x, y) = (\psi_{i5}x + \psi_{i6}y) \cdot 10^\delta; \text{ где } \gamma > 0, \delta > 0.$$

Коэффициенты ψ_{ik} могут быть положительными или отрицательными, которые определяются с помощью эксперимента, i -номер образца. x, y соответственно, содержания кремния и германия в твердом растворе.

Используя теоретические расчеты и экспериментальные данные установлено, что концентрация дислокаций в пленке убывает экспоненциально вдоль направления толщины твердого раствора до определенного и потом остается почти неизменным или имеет незаметный линейный характер до поверхности. Чем больше толщина пленок тем больше выявляется этот характер зависимости дислокаций.

В этом случае функциональная зависимость $N_i = N_i(d)$ может быть представлена из двух аналитических выражений на интервале $(0; d_k]$ $N_i = ae^{bd}$, а на интервале $d > d_k$ или $(d_k ; d]$ $N_i = N_{i0}$ где N_{i0} – определен теоретически по расчету из графика на основе экспериментальных данных.(рис.1).

$$N_i = 113104e^{-0,088d} \text{ при температуры } 900^0\text{C (Sn-растворитель)}$$

$$N_i = 978734e^{-0,088d} \text{ при температуры } 1050^0\text{C (Sn-растворитель)}$$

$$N_i = 110353e^{-0,039d} \text{ при температуры } 800^0\text{C (Ga-растворитель)}$$

$$N_i = 135932e^{-0,023d} \text{ при температуры } 1050^0\text{C (Ga-растворитель)}$$

В нашем варизонном $Si_{1-x}Ge_x$ твердом растворе состав пленок изменится по толщине, поэтому мы можем считать d_i как зависима функция от x , $d_i = f(x)$ (рис.2).

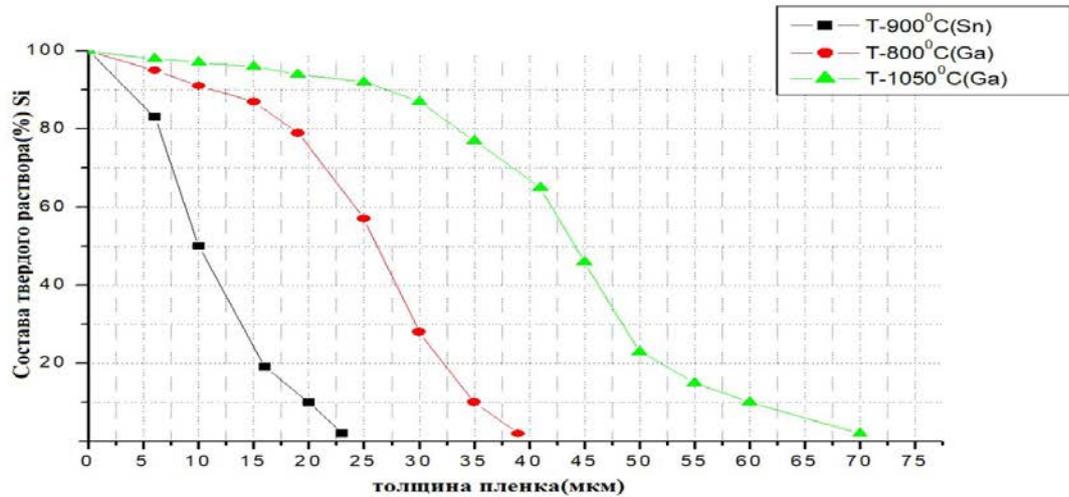


Рис.2. Зависимость состава твердого раствора $Si_{1-x}Ge_x$ от толщины (d) пленок выращенных из галлиевого и оловянного раствора-расплава при температуре $T_{НК}$ -800°C, 900°C, 1050°C.

Тогда, зависимость дислокаций N_i от состава x имеет следующий вид, как сложная функция:

$$N_i = ae^{bf(x)}$$

Для конкретного образца $Si_{1-x}Ge_x$ в этом случае полуэмпирическая формула выражается по следующему:

$$N_i = 113104 e^{-0.088(-0.0674x^2 - 0.0857x + 100.09)}$$

Таким образом, с помощью этой формулы можно определить дислокационную зависимость пленки от состава с точностью 9,8%.

После этих экспериментов и изучения функций (здесь коэффициент) $d_i = f(x)$, то есть зависимость содержания компонентов твердого раствора от толщины пленок. Эксперимент показал, что когда $d < 20$ мкм уравнение имеет почти линейный, с увеличением толщины от 20 мкм проявляется квадратичный характер зависимости, который показывает с увеличением температуры начала кристаллизации твердого раствора, из-за большой растворимости компонентов Si и Ge в растворителя начальной стадии роста содержания Si медленно уменьшается, соответственно Ge медленно увеличивается. В качестве подложек мы использовали кремний, поэтому во время роста при любом насыщении раствора образующийся твердый раствор из жидкого состояния естественно стремится сохранить свою однородность (здесь а также значительное влияние имеет на этот процесс и зазор между подложками, поэтому мы в этом случае толщину раствора – расплава оставили в неизменном положении).

Значение постоянной кристаллической решетки может изменяться плавно в определенном интервале значений в зависимости от состава и подчиняется закону Вегарда, который может быть представлен в первом приближении в виде линейной интерполяции:

$$a_{Si_{1-x}Ge_x} = xa_{Si} + (1-x)a_{Ge}$$

С этим мы имеем возможность избегать резкого несоответствия параметра решетки на структуре «подложка-пленка» во время роста эпитаксиальных слоев на подложку.

В данном случае можно сравнить экспериментальные и теоретические расчеты параметры решетки.

Эксперименты и полуэмпирические теоретические расчёты показали, что при росте эпитаксиальных слоев на подложку кремния доминирующим фактором является температура начала кристаллизации ($T_{НК}$).

С повышением температуры начала кристаллизации ($T_{НК}$) увеличивается концентрация дислокаций в эпитаксиальных слоях твердого раствора. Из графика видно, что наклон при разных температурах $T_{НК}$, почти одинаковый, то есть закономерной зависимости N_d от $T_{НК}$.

Поэтому эксперименты проводились при разных растворителях, с целью уменьшить $T_{нк}$. Оптимальный режим с малыми дислокациями ($9 \cdot 10^4 - 10^5 \text{ cm}^{-2}$) удовлетворяющими требования приборостроения получен в гетерогранице, в нашем случае при режиме $T_{нк} = 900^\circ\text{C}$, из оловянного, $T_{нк} = 800^\circ\text{C}$, из галлиевого растворов-расплавов, принудительным охлаждением, в зазоре между подложками 0,5-1,5 мм, на подложках $\text{Si(KЭФ)} <111>$.

Полученные экспериментальные данные можно применять при получении твёрдых растворов $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$ на подложку кремния с наименьшими дислокациями с заданными электрофизическими параметрами при изготовлении приборов на их основе.

Литература

1. Саидов М.С., Кошчанов Э.А., Саидов А.С., Учет электронной структуры ионов и атомов при оценке обобщенного момента элементов. -Изв.АНУзССР, сер.физ-мат.наук,1981, №3, стр.47
2. Саидов А.С. Жидкофазная эпитаксия метастабильных варизонных твердых растворов $(\text{Si}_2)_{1-x}(\text{GaP})_x$. ДАН УзССР, 1,14,1990 ст. 78-81
3. Саидов А.С., Сапаров Д., Холиков К.Т. Получение $(\text{Si}_2)_{1-x}(\text{GaSb})_x$ на кремниевых подложках методом жидкофазной эпитаксии. Материалы международной конференции «Неравновесные процессы в полупроводниках и в полупроводниковых структурах». Ташкент- 2007 г. стр.130-131.
4. А.С. Саидов, Ш.Н. Усмонов, К.А. Амонов, М.С. Саидов, Б.Р. Кутлимуратов. Photosensitivity of $p\text{Si} - n(\text{Si}_2)_{1-x-y}(\text{Ge}_2)_x(\text{ZnSe})_y$ heterostructures with quantum dots. Applied Solar Energy. <https://link.springer.com/article/10.3103/S0003701X17040132>
5. Саидов А.С., акад.Саидов М.С., Сапаров Д.В. Исследование спектра фотолюминесценции эпитаксиальной пленки $(\text{Si}_2)_{1-x}(\text{ZnS})_x$ ($0 \leq x \leq 0.92$), выращенной на кремниевой подложке. ДАН РУз. 2015 №6. стр.21-25.

УДК 539.194

ПРОЯВЛЕНИЕ АГРЕГАЦИИ МОЛЕКУЛ В СПЕКТРАХ ИК ПОГЛОЩЕНИЯ ГАЗООБРАЗНОГО ПРОПАНОЛА

Л. Мейлиев¹, И Дорошенко², О. Дорошенко², Б. Куйлиев¹

¹Каршинский государственный университет,

²Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,

bahromq@rambler.ru, dori11@univ.kiev.ua

Аннотация. Зарегистрированы спектры ИК поглощения газообразного пропанола при разных значениях давления в газе. Показано, что при низком давлении газа молекулы пропанола не взаимодействуют друг с другом, что проявляется в отсутствии спектральных полос в области колебаний связанных гидроксильных групп. При повышении давления до значений, близких к значениям давления насыщенного пара пропанола, между молекулами формируется водородная связь и образуются агрегаты из двух, трех, четырех и более молекул.

Ключевые слова: пропанол, инфракрасное поглощение, водородная связь, колебательная спектроскопия, агрегация

Газсимон пропанолнинг инфрақизил ютилиш спектрида молекуляр агрегацияларни намён бўлиши

Аннотация. Газсимон пропанолнинг инфрақизил ютилиш спектри ҳар хил газ босимларида қайд этилди. Газ босими паст бўлганда, газ молекулалари бир-бири билан таъсирлашмаслиги кузатилади, бу гидроксил гуруҳлар билан боғлиқ тебраниш областида спектрал чизиқларнинг йўқлигида намён бўлмоқда. Босимнинг ошиши билан, яъни босим тўйинган пропанол буг босимининг қийматларига яқинлашганда, молекулалараро водород боғланиш ҳосил бўлмоқда ва натижада икки, уч, тўрт ва ундан ортиқ молекулалар иштирокида агрегатлар пайдо бўлмоқда.

Калит сўзлар: пропанол, инфрақизил ютилиш, водород боғланиш, тебранма спектроскопия, агрегат.

Manifestation of molecular aggregation in IR absorption spectra of gaseous propanol

Abstract. IR absorption spectra of gaseous propanol were registered at different pressure values. It is shown that at lower gas pressure propanol molecules do not interact. It is indicated by absence of spectral bands in the region of bonded hydroxyl groups vibrations. At increasing of pressure to values close to the value of saturated vapor of propanol, the hydrogen bonding is formed between molecules, and aggregates consisting of two, three, four and more molecules are formed.

Key words: propanol, infrared absorption, hydrogen bond, vibrational spectroscopy, aggregation

Введение

В настоящее время методы колебательной спектроскопии, в частности спектроскопии инфракрасного (ИК) поглощения, являются одними из наиболее информативных методов изучения микроскопического состояния вещества. ИК спектры – это надежный источник информации о колебательно-вращательных энергетических состояниях молекул, о внутри- и межмолекулярных взаимодействиях, о молекулярных релаксационных процессах в веществе. Однако, извлечение этой информации – задача непростая, экспериментальные и теоретические исследования этого вопроса ещё далеки от завершения. В связи с этим сегодня представляет интерес накопление экспериментальных данных, устанавливающих корреляции между формой спектрального контура и параметрами, характеризующими свойства среды, сопоставление этих данных с имеющимися в литературе теориями. Особенно актуальны исследования веществ, находящихся в газообразном состоянии и имеющих сравнительно простое строение молекул.

Данная работа посвящена изучению межмолекулярных взаимодействий в газообразном пропанол, или пропиловом спирте. Пропанол относится к классу веществ, молекулы которых способны формировать агрегаты разного размера в результате возникновения между ними водородной связи. Образование агрегатов отчетливо проявляется в спектрах ИК поглощения посредством смещения спектральных полос, соответствующих валентным колебаниям функциональной группы молекул одноатомных спиртов – гидроксильной группы ОН [1]. Исследования межмолекулярных взаимодействий в пропанол важны ввиду его широкого применения в различных отраслях химической промышленности. Для фундаментальной науки молекула пропанола представляет интерес как достаточно простой модельный объект для исследований межмолекулярных взаимодействий в системах с межмолекулярной водородной связью.

Экспериментальная часть

Для приготовления образцов для спектроскопических исследований использовался жидкий нормальный пропанол (структурная формула - $\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-CH}_2\text{-OH}$) со степенью чистоты > 99,9% производства Fluka. Для удаления примесей (в основном, кислорода и азота, содержащихся в атмосфере) были проведены несколько циклов замораживания, откачки и размораживания жидкого образца. Газообразная фаза была получена путем естественного испарения с поверхности жидкого спирта с применением стандартной вакуумной технологии.

Для регистрации спектров ИК поглощения пропанола использовался Фурье-спектрометр IFS 120 производства Bruker. Спектры регистрировались в интервале частот от 650 до 4000 cm^{-1} с разрешением 1 cm^{-1} , при комнатной температуре для разных значений давления в кювете. С целью улучшения соотношения сигнал-шум каждый спектр записывался как усреднение 128 интерферограмм.

Результаты и обсуждение

На рис. 1 приведен зарегистрированный спектр ИК поглощения пропанола при давлении 1 мм. рт. ст. Как видно из рис. 1, спектр состоит из достаточно большого числа полос. В низкочастотной его части самая интенсивная полоса (1058 cm^{-1}) соответствует валентным колебаниям С–О связи. Полосы 975 cm^{-1} и 889 cm^{-1} относятся, соответственно, к валентным и деформационным скелетным колебаниям С–С–С–О [2]. Кроме того, можно выделить ещё три полосы средней интенсивности – деформационных колебаний (ν_9) CH_2 группы на 1218 cm^{-1} , деформационных ОН колебаний на 1385 cm^{-1} и колебаний ν_3 метильной и метиленовой групп на 1465 cm^{-1} [2].

Ряд интенсивных полос поглощения в области 2800 – 3000 cm^{-1} принадлежит симметричным и антисимметричным валентным колебаниям метильной и метиленовой групп. Полоса с максимумом около 3680 cm^{-1} относится к валентным колебаниям гидроксильной группы. Именно по положению этой полосы можно сделать вывод о том, что в данном образце молекулы спирта находятся в мономерном состоянии, т.е. между ними не образуется водородная связь, поскольку

при формировании водородной связи полоса валентных колебаний гидроксильной группы смещается в сторону более низких частот, и чем больше молекул в кластере, тем больше величина смещения [1]. В частности, согласно результатам квантово-химических расчетов, выполненных в работе [3], полоса валентных колебаний гидроксильной группы для димера пропанола смещена в низкочастотную сторону на 140 см^{-1} . В спектрах ИК поглощения кластеров пропанола в матричной изоляции [3, 4] полоса на частоте 3660 см^{-1} была отнесена к колебаниям несвязанных молекул, а полоса на 3521 см^{-1} – колебаниям димера. Полосы кластеров большего размера – тримера, тетрамера, пентамера и т.д. – были зарегистрированы, соответственно, на частотах 3445 см^{-1} , 3375 см^{-1} и 3265 см^{-1} .

Как известно, при повышении давления в газе вероятность агрегации молекул возрастает. На рис. 2 представлен спектр ИК поглощения газообразного пропанола при давлении 15 мм. рт. ст., которое соответствует давлению насыщенного пара пропанола при температуре 20°C .

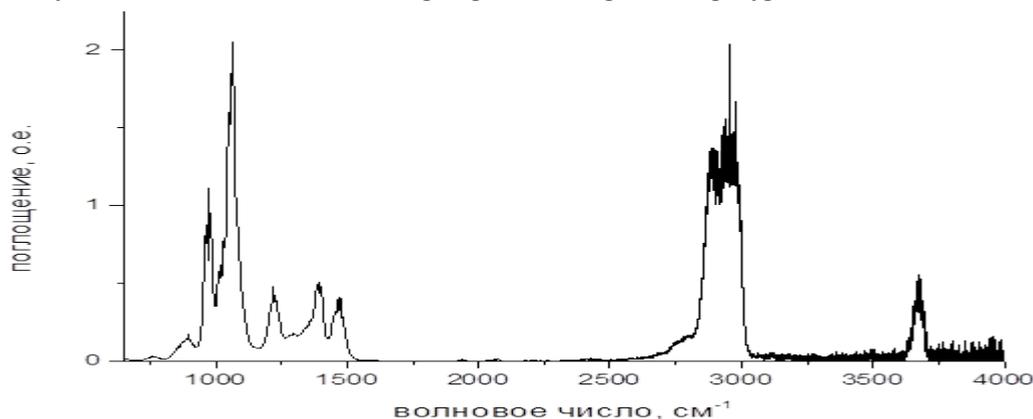


Рис. 1. Спектр ИК поглощения газообразного пропанола при давлении 1 мм. рт. ст.

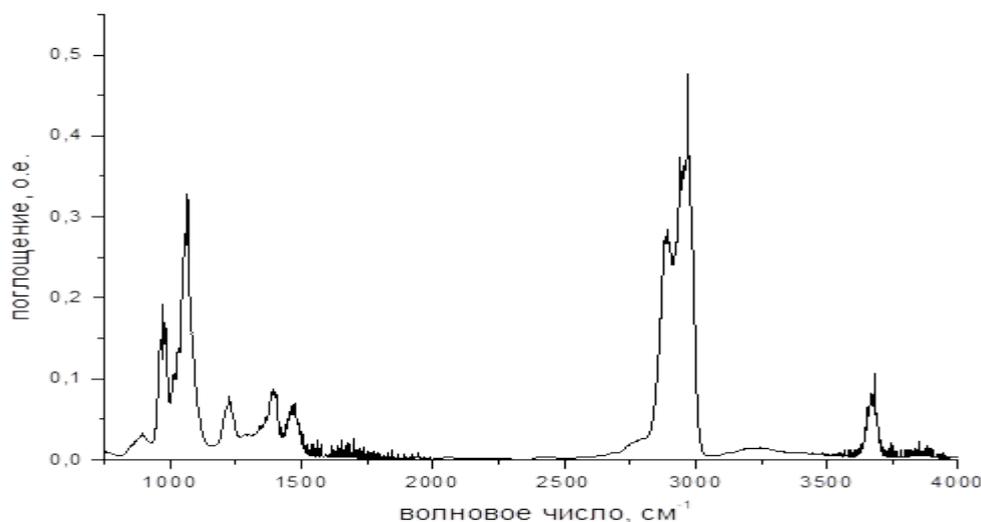


Рис. 2. Спектр ИК поглощения газообразного пропанола при давлении 15 мм. рт. ст.

Как видно из рис. 2, спектр при более высоком давлении содержит такие же спектральные полосы и практически не отличается от спектра на рис. 1, за исключением области валентных колебаний ОН группы (от 3000 см^{-1} до 4000 см^{-1}). В этой области наблюдается несколько широких полос, которых нет в спектре пропанола при более низком давлении. На рис. 3 подробнее показана область валентных колебаний гидроксильной группы. Как видно, интенсивная полоса поглощения в диапазоне $3600 - 3700\text{ см}^{-1}$ имеет сложную структуру. Это связано, во-первых, с проявлением вращательной структуры колебательной полосы валентных колебаний несвязанной ОН группы, где можно различить Р- и R-ветви этой полосы [2]. Во-вторых, известно, что молекула пропанола может пребывать в пяти различных конформациях [5] и что частоты валентных ОН колебаний различных конформеров молекулы пропанола отличаются друг от друга на несколько десятков волновых чисел [5, 6]. В работе [6] приведены следующие значения частот валентных ОН колебаний конформеров пропанола: для конформера Gg это 3656 см^{-1} , для Tg – 3659 см^{-1} , Gg' - 3668 см^{-1} , Tt – 3677 см^{-1} и Gt – 3682 см^{-1} .

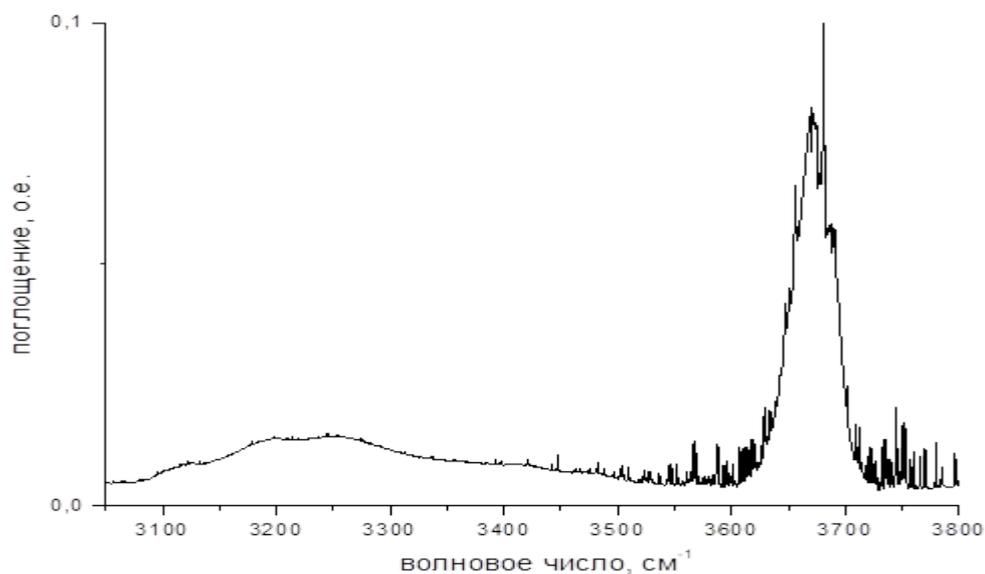


Рис. 3. Спектр ИК поглощения газообразного пропанола при давлении 15 мм. рт. ст. в спектральной области валентных колебаний гидроксильной группы

Кроме того, в диапазоне волновых чисел $3640 - 3650 \text{ см}^{-1}$ расположены валентные ОН колебания несвязанных гидроксильных групп незамкнутых кластеров, состоящих из нескольких молекул [1]. О присутствии таких кластеров в исследуемом образце свидетельствует наличие нескольких широких полос в диапазоне волновых чисел от 3100 см^{-1} до 3600 см^{-1} . Как видно из рис. 3, в этом диапазоне можно выделить полосы с максимумами около 3125 см^{-1} , 3200 см^{-1} , 3250 см^{-1} , 3410 см^{-1} , 3480 см^{-1} , 3525 см^{-1} . В работах [3, 4] были зарегистрированы полосы ИК поглощения кластеров пропанола разного размера с частотами 3178 см^{-1} , 3264 см^{-1} , 3376 см^{-1} , 3444 см^{-1} и 3521 см^{-1} . Отнесение этих полос к кластерам, состоящим из определенного числа молекул, основывается на общепринятом принципе – чем больше молекул в кластере, тем ниже частота валентного ОН колебания. Это связано с тем, что частота валентных ОН колебаний в водородно-связанных кластерах зависит от силы межмолекулярного взаимодействия (водородной связи между молекулами). А, как показывают результаты многочисленных квантово-химических расчетов (например, в [1, 7]), сила водородной связи в небольших (т.е. насчитывающих до 6-8 молекул) кластерах одноатомных спиртов возрастает с увеличением числа молекул в кластере. На этом основании, а также используя результаты квантово-химических расчетов, зарегистрированные в работах [3, 4] полосы ИК поглощения в спектральном интервале от 3100 см^{-1} до 3700 см^{-1} были отнесены к мономерам, димерам, тримерам, тетрамерам и пентамерам пропанола, а также к кластерам большего размера. Таким образом, мы можем сделать вывод, что в нашем образце при давлении 15 мм. рт. ст. происходит агрегация молекул пропанола, причем образуются не только димеры, как можно было бы предположить из общих соображений, но и агрегаты, состоящие из трех, четырех, пяти и больше молекул пропанола.

Заключение

Анализ зарегистрированных спектров ИК поглощения газообразного пропанола при разных давлениях показал, что при небольших значениях давления паров пропанола его молекулы пребывают в мономерной форме, то есть между ними не формируется водородная связь. При повышении давления до значений, близких к значению давления насыщенного пара пропанола, наблюдается агрегация молекул пропилового спирта. В исследуемом образце при давлении 15 мм. рт. ст. спектроскопическими методами были обнаружены водородно-связанные агрегаты, состоящие из двух, трех, четырех и более молекул пропанола.

Литература

1. И. Дорошенко, Г. Пицевич, В. Шаблинскас. Кластерная структура жидких спиртов: исследование методами колебательной спектроскопии. – LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken, Germany. - 2012. – 288 с.
2. E.K. Plyler. Infrared spectra of methanol, ethanol and n-propanol. Journal of Research of the National Bureau of Standards. 1952. V. 48, N. 4. p. 281-286.

3. I.Yu. Doroshenko, V. Balevicius, G.A. Pitsevich, K. Aidas, V. Sablinskas, V.E. Pogorelov. FTIR/PCA Study of Propanol in Argon Matrix: the Initial Stage of Clustering and Conformational Transitions. *Физика низких температур*. 2014. Т. 40, N 12. p. 1384-1390.

4. V. Balevicius, V. Sablinskas, I. Doroshenko, V. Pogorelov. Propanol clustering in argon matrix: 2D FTIR correlation spectroscopy. 2011. *Ukrainian Journal of Physics*. V.56, N 8. p. 855-860.

5. Л. Мейлиев, Б. Куйлиев, И. Дорошенко, Е. Васкивский. Квантово-химическое моделирование конформационного разнообразия димеров пропанола. *Узбекский физический журнал*. 2020. (в печати).

6. Y, Yu, W. Fan, Y. Wang, X. Zhou, J. Sun, S. Liu. Probe of Alcohol Structures in the Gas and Liquid States Using C-H Stretching Raman Spectroscopy. *Sensors (Basel)*. 2018. V.18. p. 2061-2077.

7. P. Golub, I. Doroshenko, V. Pogorelov. Quantum-chemical modeling of energy parameters and vibrational spectra of chain and cyclic clusters of monohydric alcohols. *Phys. Lett. A*. 2014. V. 378. p. 1937-1944.

УДК: 539 Ш 264

О ВЫЧИСЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОЧАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР В ПОТЕНЦИАЛЕ САКСОНА-ВУДСА. ПРОГРАММНЫЙ ПАКЕТ

И.А.Шаронов, А.К.Иванов

Самаркандский государственный университет

jsharonov@gmail.com

Аннотация. Сделана адаптация программ CALDNU и MATREL ОИЯИ (Дубна) для расчета характеристик одночастичных состояний деформированных атомных ядер и расчета одночастичных матричных элементов спин-мультипольных и мультиполь-мультипольных операторов под современные персональные компьютеры. Сделан перевод с Fortran-CERN на Fortran PowerStation version 4.0. Внесены дополнения в программу расчета матричных элементов для расчета матричных элементов оператора j^2 .

Ключевые слова. Потенциал Саксона-Вудса, деформированные атомные ядра, одночастичные энергии, одночастичные волновые функции, спин-мультипольные операторы, мультиполь-мультипольные операторы, одночастичные матричные элементы.

About calculation of characteristics of the single-particle states of the deformed nuclei in the Woods-Saxon potential. Software package

Abstract. Adaptation of CALDNU and MATREL programs of JINR (Dubna) for calculation of characteristics of the single-particle states in the deformed nuclei and calculation of the single-particle matrix elements of the spin-multipole and multipole-multipole operators for the modern personal computers is made. Translation from Fortran-CERN to Fortran PowerStation version 4.0 is made. Additions are made to the program MATREL for calculation of matrix elements of the j^2 operator.

Keywords. Saxon-Woods potential, the deformed nuclei, the single-particle energies, single-particle wave functions, a spin-multipole operators, a multipole-multipole operators, the single-particle matrix elements.

Saxon-Vudsning potentsialida deformatsiyalangan yadroning yangi tartibdagi davlatlarining tadqiqotlarini kalkulyatsiya qilish to'g'risida. Dastur paketi

Annotasiya. JINR (Dubna)ning CALDNU va MATREL dasturlari zamonaviy shaxsiy kompyuterlar uchun spin-multipole va multipole-multipole operatorlarining bitta zarrali matritsali elementlarini deformatsiyalangan atom yadrolarining xususiyatlarini hisoblash va moslashtirish uchun moslangan. Fortran-CERN-dan Fortran PowerStation 4.0 versiyasiga tarjima qilingan. Matritsaning elementlarini hisoblash dasturiga operator matritsasi elementlarini hisoblash uchun qo'shimchalar kiritildi.

Kalit so'zlar. Sakson-Vuds potentsiali, deformatsiyalangan atom yadrolari, bitta zarrachali energiya, bitta zarrali to'lqin funktsiyalari, spin-multipol operatorlari, multipole-multipole operatorlari, bitta zarrali matritsa elementlari.

В теории атомного ядра для описания возбужденных состояний атомных ядер широко используются различные полумикроскопические модели, основанные на выборе эффективного

ядерного взаимодействия. В них взаимодействие между нуклонами разделяют на две части: среднее поле ядра и остаточные взаимодействия, под которыми понимают ту часть ядерных сил, которая не включена в среднее поле. Это могут быть взаимодействия, приводящие к парным корреляциям сверхпроводящего типа, мультиполь-мультипольные взаимодействия, ответственные за коллективные свойства ядер и другие виды остаточных взаимодействий. Важность среднего поля заключается в том, что оно не только определяет многие свойства ядра, но и управляет остаточными взаимодействиями, зависящими от одночастичного базиса (энергий одночастичных состояний и их волновых функций). Для описания среднего поля традиционно использовались различные потенциалы, например гармонический потенциал, потенциалы Нильссона и Саксона-Вудса. Потенциал Нильссона широко использовался при расчетах характеристик низколежащих состояний деформированных ядер вплоть до 70-х годов прошлого столетия. Потенциал Нильссона неплохо описывал одночастичные состояния деформированных ядер, но у него были очень серьезные недостатки. Он является бесконечным по глубине, поэтому его собственные волновые функции имеют неправильное поведение на границе ядра. Спин-орбитальный член не зависит от радиуса ядра и параметров деформации. Для получения правильного порядка одночастичных уровней при равновесных деформациях приходится использовать параметры потенциала Нильссона различными для разных оболочек, а в отдельных случаях допускать сдвиги некоторых подоболочек. Конечный потенциал Саксона-Вудса с размытым краем оказался более реалистичным для описания одночастичных состояний атомных ядер, в особенности, деформированных.

В 1966 году была решена задача о численном нахождении характеристик одночастичных состояний в деформированном потенциале Саксона-Вудса [1]. После этого всё больше исследователей стало использовать этот более реалистичный потенциал, хорошо зарекомендовавший себя при определении различных характеристик деформированных атомных ядер. В частности, использование одночастичных энергий и волновых функций потенциала Саксона-Вудса позволило лучше описать интенсивность электромагнитных переходов между одноквазичастичными состояниями в нечетных ядрах с $A=150-190$ по сравнению с расчетами, использующими потенциал Нильссона [2].

Учеными Объединенного Института Ядерных Исследований (ОИЯИ, Дубна) в свое время были разработаны компьютерные программы для вычисления характеристик одночастичных состояний деформированных ядер в потенциале Саксона-Вудса (программа CALDNU) [3] и вычисления одночастичных матричных элементов с волновыми функциями деформированного ядра в потенциале Саксона-Вудса (программа MATREL) [4]. Эти программы позволили успешно выполнять расчеты различных характеристик возбужденных состояний деформированных атомных ядер. Программы были написаны для базовой (в то время) ЭВМ ОИЯИ CDC-6500 с операционной системой NOS/BE на алгоритмических языках Fortran CERN и Fortran-IV.

Задача исследования деформированных ядер в рамках различных ядерных моделей с использованием одночастичного базиса по-прежнему остается актуальной, поэтому мы поставили перед собой целью адаптировать эти программы для современных персональных компьютеров с операционной системой Windows и дать возможность нашим специалистам использовать в научно-образовательных целях этот программный пакет. Учитывая широкую номенклатуру используемых нашими учеными персональных компьютеров и версий Windows нами было принято решение для адаптации программ использовать язык Fortran PowerStation version 4.0 в среде Microsoft Developer Studio. Этот пакет успешно работает как на старых персональных компьютерах с ОС Windows-2000, так и на современных компьютерах с ОС Windows XP и Windows-7 и 8.

Вычисление характеристик одночастичных состояний деформированных ядер в потенциале Саксона-Вудса

Метод вычислений, использованный авторами программы CALDNU [3], основан на приближенном методе решения уравнения Шредингера с анизотропным потенциалом Саксона-Вудса [5]. Приведем основные положения используемого метода, изложенные в работах [3, 5].

Средний радиус ядра зависит от параметров квадрупольной β_{20} и гексадекапольной деформации β_{40} и угла Θ относительно оси симметрии

$$R(\beta_{20}, \Theta) = R_0 \left(1 + \beta_0 + \frac{\beta_{20}}{\sqrt{2\pi}} P_2(x) + \frac{\beta_{40}}{\sqrt{2\pi}} P_4(x) \right), \quad (1)$$

где $x = \cos \Theta$, R_0 - радиус равновеликого сферического ядра $R_0 = r_0 A^{1/3}$, β_0 - постоянная, введенная для сохранения объема ядра, $P_m(x)$ - нормированные полиномы Лежандра.

Ядерный потенциал состоит из потенциала Саксона-Вудса $V_{ws}(\vec{r})$ и спин-орбитальной части ядерного взаимодействия $V_{s.o.}(\vec{r})$

$$V(\vec{r}) = V_{ws}(\vec{r}) + V_{s.o.}(\vec{r}) \quad (2)$$

$$V_{ws}(\beta_{V_0}, \vec{r}) = -\frac{V_0}{1 + \exp[\alpha(r - R(\beta_{V_0}, \Theta))]}, \quad V_{s.o.}(\vec{r}) = -\kappa [\vec{p}\sigma] \text{grad} V(\vec{r}),$$

где α - параметр диффузности потенциала Саксона-Вудса, V_0 - глубина потенциала, κ - константа спин-орбитального взаимодействия, σ - матрицы Паули, \vec{p} - импульс нуклона.

В случае протонной системы добавляется кулоновское взаимодействие

$$V_c(\vec{r}) = \frac{3(Z-1)e^2}{4\pi R_0^3} \int \frac{n(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (3)$$

где $n(\vec{r}')$ - плотность распределения заряда в ядре.

Волновые функции представляются в виде суперпозиции собственных функций φ_{nlj}^Ω уравнения Шредингера со сферически симметричным потенциалом

$$\varphi = \sum_{nlj} a_{nlj}^\Omega \varphi_{nlj}^\Omega, \quad (4)$$

где (nlj) - набор квантовых чисел n , l и j , соответствующих волновой функции сферического ядра. Решение уравнения Шредингера

$$\left(\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) - E \right) \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (5)$$

с определенными таким образом потенциалом и волновыми функциями дает одночастичные энергии E и волновые функции, показанные в программе CALDNU в виде коэффициентов a_{nlj}^Ω разложения (4) по сферическому базису.

Информация одного варианта входных данных состоит из следующих параметров: A - атомный вес; Z - заряд; r_0 - константа для вычисления радиуса ядра $R = r_0 A^{1/3}$; V_0 - глубина потенциальной ямы; κ - константа спин-орбитального взаимодействия; α - параметр диффузности. Подробное описание пакетов входных данных с указанием формата ввода для программ CALDNU и MATREL будут предоставлено пользователям этих программ вместе с тестовыми пакетами в инструкции пользователю. С расширенным описанием пакетов входных данных можно ознакомиться в работах авторов программ [3, 4].

Выходными данными программы являются текстовый файл для распечатки результатов расчетов и бинарный файл, содержащий данные об энергиях и волновых функциях одночастичных состояний.

Текстовый файл содержит следующую информацию:

- использованные значения параметра Саксона-Вудса;
- параметры базисного сферического ядра;
- параметры развязывания для состояний с $K=1/2$;
- для каждого одночастичного состояния асимптотическое квантовое число, энергия уровня и компоненты волновой функции.

Информация в этом файле (заголовки, обозначения, форматы) представлена авторами [3] в виде, допускающем понятное восприятие информации.

Бинарный файл содержит ту же информацию в бесформатном виде для использования её другими программами, использующими данные об волновых функциях и энергиях одночастичных состояний для расчетов характеристик нечетных деформированных ядер. В настоящей работе под такими программами мы понимаем, например, расчет матричных элементов одночастичных операторов, вычисление характеристик квазичастичных состояний и т.п.

Вычисление одночастичных матричных элементов с волновыми функциями деформированного ядра в потенциале Саксона-Вудса

Вычисление одночастичных матричных элементов с волновыми функциями деформированного ядра в потенциале Саксона-Вудса предлагается выполнять с помощью программы MATREL [4]. Эта программа предназначена для вычисления матричных элементов

различных операторов, включающих зависимости от операторов орбитального момента \hat{l} , спина \hat{s} и изоспина \hat{r} .

$$\hat{F}(L\mu) = \hat{r}_j F_L(r) Y_{\lambda\mu} \quad (6)$$

$$\hat{F}_s(L\lambda\mu) = \hat{r}_j \sqrt{\lambda(2\lambda+1)} F_L(r) (Y_L \hat{s})_{\lambda\mu} \quad \text{и} \quad \hat{F}_l(L\lambda\mu) = \hat{r}_j \sqrt{\lambda(2\lambda+1)} F_L(r) (Y_L \hat{l})_{\lambda\mu}, \quad (7)$$

где $j=1, 2, 3$.

$$(Y_L \hat{s})_{\lambda\mu} = \sum_m (L \ 1 \ m \ \mu - m | \lambda\mu) Y_{Lm} \hat{s}_{\mu-m} \quad \text{и} \quad (Y_L \hat{l})_{\lambda\mu} = \sum_m (L \ 1 \ m \ \mu - m | \lambda\mu) Y_{Lm} \hat{l}_{\mu-m} \quad (8)$$

Радиальная зависимость функции $F_L(r)$ для мультипольных сил имеет вид $F_L(r) = r^L$.

Для программы MATREL полагается, что одночастичные волновые функции, рассчитанные по программе CALDNU, записаны на диске в бинарном файле так, что в двух соседних зонах записи находятся волновые функции обеих четностей. Данные, вводимые пользователем состоят из: номера зоны записи в бинарном файле CALDNU, начиная с которого будут прочитаны две зоны, в которых будут находиться волновые функции двух четностей; число, задающее константу нормировки матричных элементов и определяющее режим расчета; E_{\min} и E_{\max} - числа, определяющие энергетический диапазон отбираемых для счета волновых функций; ρ_{\min} и ρ_{\max} - целые числа, задающие диапазон отбора волновых функций по асимптотическим квантовым числам; число, задающее номер зоны, начиная с которой будут записываться в выходной файл вычисленные матричные элементы; $(L\lambda\mu)$ - число, задающее значение мультипольностей и определяющее режим счета (при $(L\lambda\mu) > 0$ вычисляются мультиполь-мультипольные матричные элементы, при $(L\lambda\mu) < 0$ - спин-мультипольные матричные элементы, при $(L\lambda\mu) = -20$ - матричные элементы оператора j^2).

Выходными данными программы являются текстовый файл для распечатки результатов расчетов и бинарный файл, содержащий данные о параметрах потенциала Саксона-Вудса, одночастичных энергиях, одночастичных матричных элементах выбранных операторов l_z и s_z , s_+ и j_+ , j^2 , $F(\lambda\mu)$ ($\lambda\mu=20, 21, 22$ и т.д.) и индексах состояний и матричных элементов. Информация в этом файле (заголовки, обозначения, форматы) представлена авторами [4] в виде, допускающем понятное восприятие информации.

Бинарный файл содержит ту же информацию в бесформатном виде для использования её другими программами, использующими данные об энергиях одночастичных состояний и матричных элементах для расчетов характеристик нечетных деформированных ядер (квазичастичная, вращательная, квазичастично-фононная модели и т.п.).

Мы не ввели изменений в сами алгоритмы вычислений одночастичных характеристик в программах CALDNU и MATREL, а также в вид и способы организации входной и выходной информации, воспринимая программы по принципу "AS IS". Исключением является только добавление нами в программу MATREL подпрограммы вычисления одночастичных матричных элементов оператора j^2 и включение результата этих расчетов в файлы результатов (матричные элементы оператора j^2 используются при вычислениях в рамках модифицированной вращательной модели [6]). Также рассмотренные программы при их адаптации под Fortran PowerStation version 4.0 переведены в двойную точность (REAL*8).

Адаптированные версии рассмотренных программ, контрольные пакеты входных и выходных данных, дополнительная сопроводительная документация (инструкция пользователя) будут размещены на сервере ядерно-физической лаборатории СамГУ.

Мы считаем своим долгом высказать благодарность авторам программ CALDNU и MATREL Ивановой С.П., Шириковой Н.А., Малову Л.А., Нестеренко В.О., предоставившим нам возможность свободного пользования этими программами и дополнения их нашими модулями.

Мы считаем, что любой пользователь адаптированных нами указанных программ должен при опубликовании результатов своих расчетов или ином их публичном использовании ссылаться в обязательном порядке на авторов исходных программ [3, 4], а не только на настоящую работу.

References

1. Nemirovskij P.E., Chepurnov V.A. Yadernaja fizika, № 3, s. 998 (1966).
2. Gareev F.A., Ivanova S.P., Chernej M.I. Yadernaja fizika, № 91, s. 308 (1969).
3. Ivanova S.P., Shirikova N.A. Vychislenie odnochastichnykh sostojanij deformirovannykh yader v potentsiale Saksona-Vudsa (programma na Fortrane). Soobshhenie OIYaI, R4-9081 (Dubna, 1975).
4. Malov L.A., Nesterenko V.O., Shirikova N.Ju. Vychislenie odnochastichnykh matrichnykh ehlementov s volnovymi funktsijami deformirovannogo yadra v potentsiale Saksona-Vudsa. Soobshhenie OIYaI, R4-83-811 (Dubna, 1983).
5. Gareev F., Ivanova S.P., Solov'ev V.G., Fedotov S.I. Odnoshastichnye ehnergii i volnovye funktsii potentsiala Saksona-Vudsa i nerotacionnye sostojaniya nechetnykh yader v oblasti $150 < A < 190$. Fizika ehlementarnykh chastic i atomnogo yadra (EChAYa), t. 4, vyp. 2, s. 357 (1973).
6. Sharonov I.A., Alikov B.A., Karadzhev D., Kvasil Ja., Muminov T.M. Ob uchete chlena ot-dachi v gamiltoniane nechetnykh deformirovannykh yader. Bolgarskij fizicheskij zhurnal, t. 13, s. 318 (1986).

UDK: 538 S 28

**SAMARQAND VILOYATI TUPROQLARIDA TABIIY VA TEXNOGEN
RADIONUKLIDLARNING MIGRATSIYA XUSUSIYATLARI**

R.M.Eshbo'riyev, E.A.Umirzaqov, L.T.Nurmurodov, R.Sayfinov, A.N.Kaxorova, U.X.Yunusova
Samarqand davlat universiteti

Annotatsiya. Ushbu ishda gamma spektrometriya usuli yordamida tuproq qatlamlarida tabiiy radionuklidlar ^{226}Ra , ^{232}Th , ^{40}K va texnogen radionuklid ^{137}Cs ning solishtirma aktivligi o'rganildi. Olingan natijalarda tabiiy radionuklidlar ^{226}Ra va ^{232}Th hamda texnogen radionuklid ^{137}Cs asosan tuproqning 1-2 sm li yuza qismida solishtirma aktivligi yuqori bo'lishi va 15-20 sm li pastki qatlamda aktivlik bu radionuklidlar uchun 20-30% kam bo'lishi va radionuklidlar gorizontallik migratsiyaga uchrashi kuzatildi. ^{40}K izotopining solishtirma aktivligi tuproq qatlamining 10-15 sm li qismida maksimal qiymatga erishishi va bu radionuklid asosan vertikal migratsiya natijasida tuproqda qayta taqsimlanishi aniqlandi.

Kalit so'zlar: Radionuklid, aktivlik, izotop, texnogen, migratsiya, gorizontallik, vertikal, radiatsiya, funksional, spektr, intensivlik, fon, komponent.

Особенности миграции природных и техногенных радионуклидов в почвах Самаркандской области

Аннотация. В данной работе гамма спектрометрическим методом была изучена сравнительная активность техногенного радионуклида ^{137}Cs и естественных радионуклидов ^{226}Ra , ^{232}Th , ^{40}K в разных слоях почвы. Из полученных результатов определено то, что сравнительная активность естественных радионуклидов ^{226}Ra и ^{232}Th , а также техногенного радионуклида ^{137}Cs повышена на глубине 1-2 см, а на глубине 15-20 см активность этих радионуклидов понижается на 20-30 %. На опыте наблюдалось то, что сравнительная активность изотопа ^{40}K достигает максимального значения на глубине 10-15 см.

Ключевые слова: Радионуклид, активность, изотоп, техноген, миграция, горизонтальная, вертикальная, радиация, функционал, спектр, интенсивность, фон, компонента.

Migration characteristics of natural and technogen radionuclides in the soils of Samarkand region

Abstract. In this work the comparative activity of natural radionuclides ^{226}Ra , ^{232}Th , ^{40}K and technogenic radionuclide ^{137}Cs in soil layers was studied by gamma spectrometric method. From the results obtained, it was determined that the comparative activity of natural radionuclides ^{226}Ra and ^{232}Th and of technogenic radionuclide ^{137}Cs are high at a depth of 1-2 cm, and at a depth of 15-20 cm the activity of radionuclides decreases by 20-30 %. The experiment showed that the comparative activity of the ^{40}K isotope reaches its maximum value at a depth of 10-15 cm. It was also observed that horizontal migration is high on the soil surface.

Key words: radionuclide, activity, isotope, technogen, migration, horizontal, vertical, radiation, functional, spectr, intensity, fon, component.

Yer mintaqasida tabiiy fonning xolatini tabiiy va kosmogen radionuklidlar belgilaydi. Biosfera doimo radiatsion fon ta'sirida bo'lib keldi. Shu sababli butun tirik organizmlar ham minglab yillar davomida kuchli radiatsiya ta'sirida rivojlandi.

Radionuklidlarning tirik organizmlarga ta'siri quyidagi faktorlar orqali belgilanadi: 1.Radionuklidlar miqdori 2.Nurlanish darajasi. 3.Radionuklidlarning yarim yemirilish davri. 4. Radioaktiv elementlarning kimyoviy tarkibi.

Tabiiy radioaktiv izotoplar asosan toriy-232, radiy-226 va kaliy-40 Yer qa'rida katta miqdorda mavjud bo'lib, bu izotoplar avval suv havzalariga tushib, keyin yuvilib tuproqlarga singib ketadi. Migratsiya jarayonida Yer qa'rida bo'lgan tabiiy radionuklidlar inson faoliyati ta'sirida biosferaga tarqalib ulguradi. Bunday tarqalish texnogen migratsiya deyiladi. Migratsiya - so'zi atrof-muhit komponentalarida kimyoviy elementlarning harakatini (ko'chishi) anglatadi. Ammo hamma elementlarning ham ko'chish tezligi (migratsiya intensivligi) bir xil emas. Umuman olganda radionuklidlarning migratsiyasini hosil qiluvchi omillar boshqa kimyoviy elementlarnikidan farq qilmaydi. Migratsiya tezligi har bir radionuklidning fizik-kimyoviy xususiyatlariga bog'liq.

Hosil bo'lish mexanizmiga bog'liq holda migratsiya tabiiy va texnogen (yoki antropogen) ko'rinishlarga ajratiladi. Tabiiy migratsiya - tabiiy jarayonlar (daryo suvlarining ko'tarilishi, kuchli shamollar, jala-yomg'irlar, tuproqlarning ko'chishi, yomg'inlar va h.k.) tufayli sodir bo'lsa, texnogen migratsiya to'g'ridan-to'g'ri inson faoliyati (yadro portlashlari, yadroviy qurilmalarda falokat sodir bo'lishi uran, ko'mir, neft, rudalarni qazib olish va h.) bilan bog'liq.

Radionuklidlarning atrof-muhitga tarqalish yo'nalishi ham bir-biridan farq qiladi. Vertikal migratsiya - vulqonlar otilishi, yomg'irlar ta'sirida, yerga ishlov berish, o'rmonlar-daraxtlar ta'sirida sodir bo'lsa, gorizontal migratsiya - daryolar quyilishi, radioaktiv chang zarralarini va aerezollarni shamol ta'sirida ko'chishi, tuproqdagi ba'zi tirik mikroorganizmlarni harakati tufayli sodir bo'ladi.

Yadro portlashlari, o'rmon yomg'inlari neftni qazib olish, qayta ishlash, mineral o'g'itlar ishlab chiqarish, suv toshqinlari ta'sirida ham radionuklidlar migratsiyasi ro'y beradi. Tabiiy radioaktivlikning eng muhim manbalaridan biri bu radon-222 gazidan iborat. Ma'lumotlarga ko'ra tabiiy radioaktivlikning 50 % aynan shu radon-222 hissasiga to'g'ri keladi. Tabiiy radioaktiv elementlardan kaliy-40 va rubidiy-87 lar ham asosan tog' jinslari va vulqon qoldiqlarida ko'p miqdorda uchraydi. Inson qishloq xo'jalik faoliyati davomida tarkibida radioaktiv elementlar ko'p bo'lgan tuproqqa ishlov beradi. Gap faqat uran izotoplarini qazib olishda emas (Samarqand viloyati hududida ham uran qazib olinadi) balki litosfera tarkibida ham radon-222 gazi ko'plab uchrashi radioaktiv fonga ta'sir ko'rsatadi.

Antropogen faoliyat ta'sirida tabiiy radionuklidlarning gorizontal migratsiyalari ko'proq kuzatiladi. Radionuklidlar neft tarkibida ham mavjud. Neft konlari tarkibida uran bo'lgan slans loyqalari yaqinida mavjud bo'lsa, undan pastroqda qum-shag'al qatlamlarida uning yemirilishidan hosil bo'lgan elementlar to'planadi. Ko'mir ham radioaktiv elementlarga boy, uning tarkibida asosan kaliy-40, poloniy-210, rubidiy-210, vismut-218 hamda uran, toriy va radiy izotoplari mavjud bo'ladi. Umuman tabiiy radionuklidlar Yer qa'rida tekis taqsimlanmagan. Ularning miqdori qum-shag'alli tuproqlarga nisbatan adsorbsiya tufayli loyqa tuproqlarda kattaroq bo'ladi. Tog' jinslarida og'ir radioaktiv elementlarning miqdori ancha yuqori. [1] da keltirilishicha Yer sayyorasining turli mintaqalarida yer sirtida gamma nurlanishlar dozasi taxminan 0,26 mGr/yil dan 11,5 mGr/yil gacha oraliqda o'zgarib turadi. Tabiiy radionuklidlarning tuproqdagi migratsiyasi ularning ekosistemalaridagi migratsiyasining muhim zvenosi hisoblanadi. Tuproqning muhim xususiyatlaridan biri shundaki, juda katta organik birikmalar va oziqavor moddalarni o'zida to'plash imkoniyatini beradigan absorpsion sig'imining yuqoriligidir. Absorpsion mexanizm tuproq tarkibidagi radionuklidlarning holatiga bog'liq. Kolloid holati esa qattiq va suyuq holatlar o'rtasidagi ion almashinuv jarayoniga bog'liq bo'lib oddiy mexanik yutilishga mos keladi. Loyqa tuproqlar, jumladan qumli tuproqlar ham kolloid holatida, yuqori molekulyar moddalar almashinuv sig'imiga ega bo'ladi. Radionuklidlarning migratsiyasi tuproqda mavjud moddalar bilan kimyoviy reaksiyaga kirishish natijasida erimaydigan birikmalarni hosil qilishi mumkin.

Tuproq ekosistemaning almashinuv jarayonlarining boshlang'ich asosini tashkil etadi. Uning funksional holati biologik strukturalarda radiatsion energiyaning samarali almashinuvini aniqlaydi. Biosferada bo'ladigan jarayonlar biologik substratlardan tortib organik birikmalargacha, biologik moddalarning qayta sintez bo'lishi ham tuproqda kechadi. Uzoq yillar davomida hosil bo'lgan Yer sirti 2-3 sm li unumdor tuproq qatlamiga ega. Normal sharoitda bu qatlam 150-200 yillar mobaynida shakllanadi. Atrof-muhitning radioaktiv ifloslanishlari, radionuklidlarning biologik zanjir bo'yicha ko'chishi va oxir oqibatda inson organizmga tushishi ham aynan tuproq orqali sodir bo'ladi. Tuproqning sirtida to'planib qolgan radionuklidlar turli omillar ta'sirida istalgan yo'nalish bo'yicha migratsiyaga uchraydi. Yangi tushgan radionuklidlarning gorizontal ko'chishi kuchli shamollar va qorlarning erishi tufayli sodir bo'ladi.

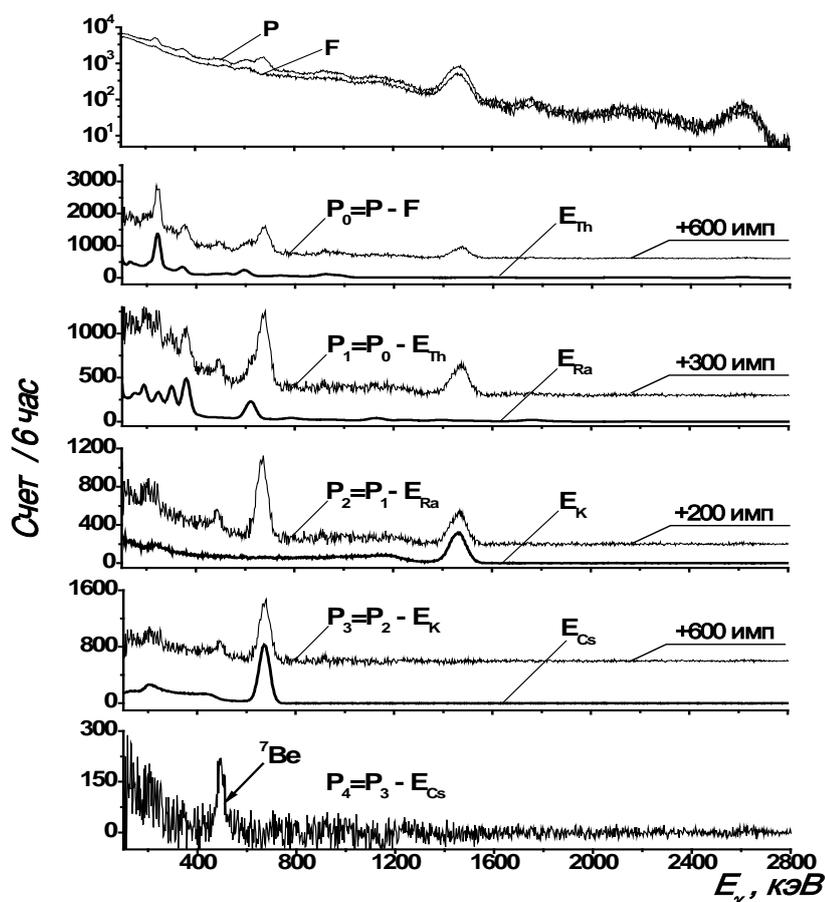
Masalan erigan qor suvlari tufayli migratsiyaga uchragan stronsiy-90 izotopi to'liq kation formada bo'lishi aniqlangan[2].

Gamma spektrlarni o'lchash va qayta ishlash metodikasi.

Namunalarning gamma-spektrlari o'lchami 63x63 mm bo'lgan NaI(Tl) - ssintillyatsion gamma spektrometrdagi o'lchandi. Detektorning energiya bo'yicha ajrata olish qobiliyati Cs^{137} ning 661 keV energiyali gamma-chizig'ida 10% tashkil qildi.

Gamma-spektrometrik ma'lumotlarni qayd qilish va qayta ishlash kompyuter dasturida amalga oshirildi. Tuproqning ichki qatlamlaridan olingan namunalarni o'lchash davomiyligi $t = 2$ soat, sirt qismidagisini esa - 6 soat.

Spektrlarni qayta ishlashda tuproqlar spektri-P alohida tashkil etuvchilarga ajratildi: - fon (F), Th^{232} , Ra^{226} va K^{40} , hamda Cs^{137} - spektrlarining intensivligi bilan normallashtirilgan. Quyidagi 1-rasmda o'rganilayotgan tabiiy radionuklidlar Th^{232} , Ra^{226} , K^{40} va texnogen radionuklid Cs^{137} larning gamma spektrlarining Be^7 radionuklidi fonidagi intensivligi keltirilgan.



1-rasm. Namuna tarkibidagi tabiiy va texnogen radionuklidlarning gamma spektrlari

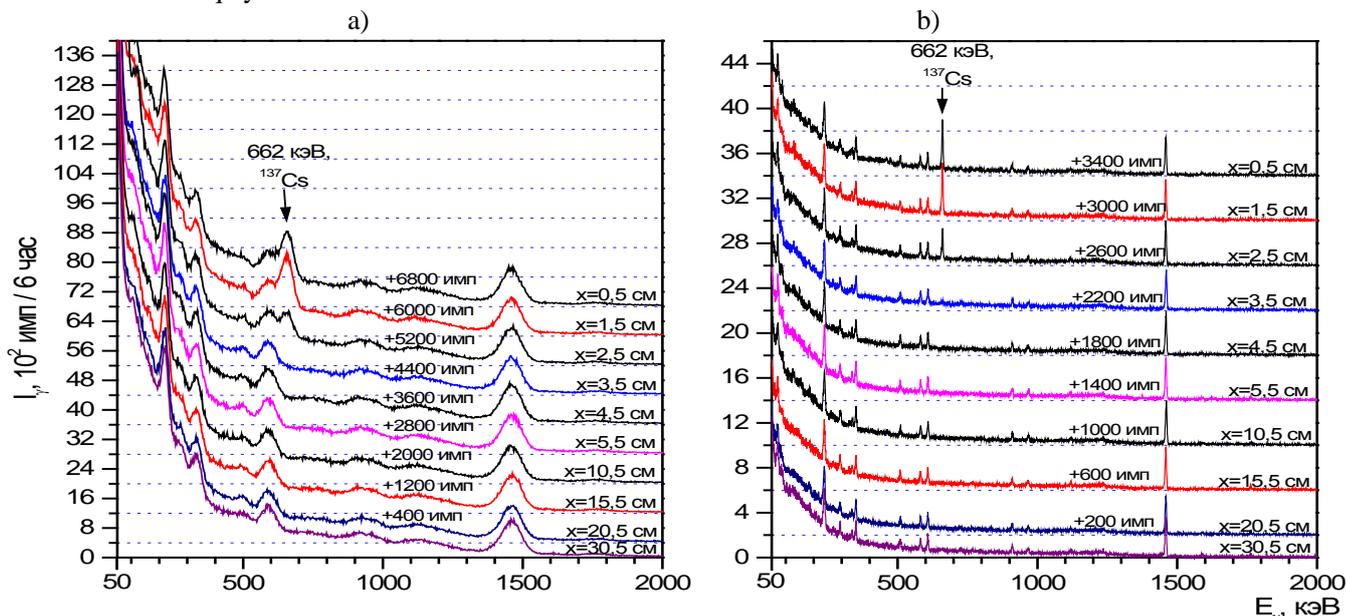
Be^7 ning nurlanish faolligi detektorning aniqlash samaradorligini, kvantning o'tish vaqtini va o'lchash davomiyligini hisobga olgan holda, spektrdagi 478 keV energiyali intensivligi bilan aniqlandi. Minimal aniqlash mumkin bo'lgan holatlar K^{40} uchun ~ 20 Bk/kg, qolgan radionuklidlar uchun $\sim 3-5$ Bk/kg ga teng. Tuproqlar gamma-spektrlarida identifikatsiya qilingan radionuklidlar aktivligini aniqlashdagi xatoliklar 10-15% tashkil etdi.

Olingan natijalar va ularning muhokamasi

Tajribada olingan tabiiy radionuklidlar Ra-226, Th-232, K-40 izotoplarining solishtirma aktivligining tuproqda tarqalish darajasi 1-jadvalda keltirilgan. Tajriba natijalariga ko'ra radionuklidlar solishtirma aktivligining eng katta miqdori Ra^{226} uchun $(41,92 \pm 5,7)$ Bk/kg tuproqning 2-4 sm li qatlamiga to'g'ri kelsa, Th^{232} $(56,166 \pm 6,15)$ Bk/kg va K^{40} uchun $(838,38 \pm 82)$ Bk/kg 10-15 sm li qatlamga to'g'ri

keladi. Xuddi shuningdek kaliy-40 radionuklidi tuproqning keltirilgan chuqurlik qismlarida tekis taqsimlanmagan.

Masalan 10-20 sm gacha qismida $838,38 \pm 82$ Bk/kg dan $803,786 \pm 80$ Bk/kg atrofida bo'lishi fikrimizni tasdiqlaydi.

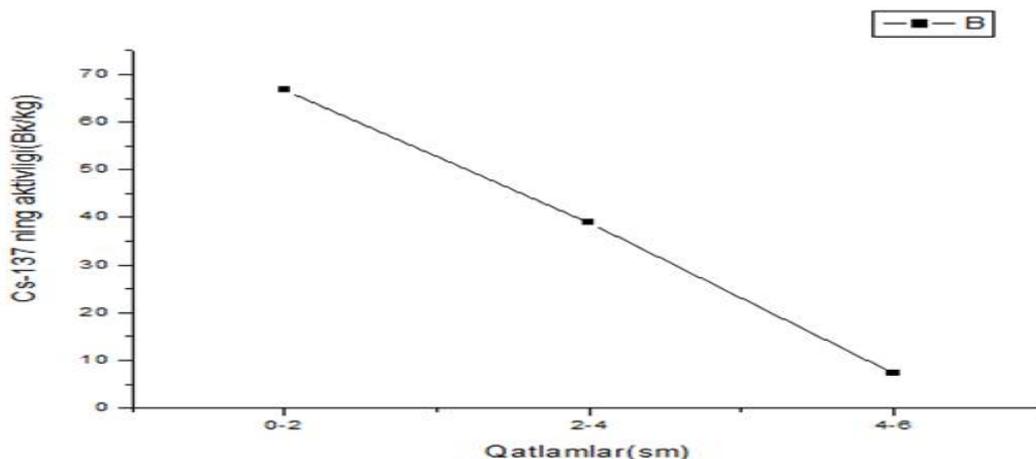


2-rasm. Tuproq namunasining ssintilyatsion (a) va yarim o'tkazgichli (b) gamma spektrlari

Ammo Ra-226 izotopi uchun tajriba natijalariga ko'ra yer sirtidan tuproqning (2-4)sm li qismida $41,92 \pm 5,7$ Bk/kg bo'lsa, (8-10) sm li qismida aktivlik $32,31 \pm 3,3$ Bk/kg ni tashkil qiladi, bu esa Ra²²⁶ uchun aktivlikning yerning yuza qismida 17 % ga yuqori ekanligini ko'rsatadi. Bu ma'lumotlardan sug'oriladigan yoki ishlov beriladigan maydonlar tuproqlarida Ra-226 radionuklidining gorizontali migratsiyasi ancha yuqori ekanligini ko'rish mumkin.

1-jadval

№	Tuproq qatlami (sm)	Ra-226 Bk/kg	Th-232 Bk/kg	K-40 Bk/kg	Cs-137 Bk/kg	Umumiy massa
1	0-2	$38.39 \pm 5,0$	$52.938 \pm 5,1$	661.08 ± 66	$66.725 \pm 9,52$	1430 g
2	2-4	$41.92 \pm 5,7$	$52.872 \pm 5,1$	707.93 ± 69	$38.946 \pm 3,9$	1170 g
3	4-6	$34.692 \pm 5,5$	$55.064 \pm 5,5$	658.42 ± 64	7.2342 ± 2	1580 g
4	6-10	$32.317 \pm 3,3$	$50.655 \pm 5,1$	705.57 ± 71	$< 1,472$	1410 g
5	10-15	$34.932 \pm 7,8$	$56.166 \pm 6,1$	838.38 ± 82	$< 1,676$	1605 g
6	15-20	$37.863 \pm 5,1$	$55.484 \pm 5,3$	803.78 ± 80	$< 1,1$	1330 g
7	20-30	$35.866 \pm 1,7$	$53.302 \pm 8,05$	654.43 ± 83	$< 1,413$	1425 g



3-rasm. Cs-137 radionuklidi solishtirma aktivligining tuproq qatlamlaridagi miqdori

Tabiiy toriy (Th-232) izotopi uchun olingan natijalar ham Ra-226 ga o'xshab, solishtirma aktivlikning eng kam miqdori tuproqning 5-10 sm qismiga to'g'ri kelsa, (10-20) sm li chuqur qismida toriyning aktivligi 11% ga yuqori bo'ladi. Jadvaldan toriy-232 izotopining solishtirma aktivligini 6-20 sm li qatlamlarda notekis taqsimlanganligini ko'rish mumkin. Bu esa bu qatlamlarda toriy izotopi bilan tezda reaksiyaga kirishadigan sulfat, nitrat, karbonat va ishqoriy metallar miqdorining yuqoriligi bilan tushuniladi. Bundan tashqari Th-232 radionuklidi solishtirma aktivligining 10-20 sm li qatlamda yuqori bo'lishi asosan qum-shag'alli tuproqlarga xos bo'lib, bunda asosan vertikal migratsiya asosiy rolni o'ynaydi. Ammo yarim yemirilish davri ($T_{1/2} = 10^9$ yil) juda katta bo'lgan K-40 elementi uchun yuqorida keltirilgan umumiy qonuniyatlar o'rinni bo'lmaydi. Tajriba natijalariga ko'ra K-40 izotopining eng katta solishtirma aktivligi (10-15) sm li qatlamga (838,38±82 Bk/kg) to'g'ri kelsa aktivlikning eng kam miqdori (654,43±83) tuproqning (20-30) sm li qatlamiga to'g'ri keladi, ya'ni nisbatan yuqori qatlamda K-40 radionuklidining solishtirma aktivligi pastki qatlamlarga qaraganda 33% katta. Bu esa Kaliy-40 izotopi tuproqning namlik qismida ko'p miqdorda erishi va o'simlik ildizlari orqali so'rilishini ko'rsatadi. Ehtimol tuproqning 10-15 sm chuqur qismida K-40 ning miqdorining eng katta (838,38±82 Bk/kg) bo'lishi tuproqning bu qismida kaliy elementiga kimyoviy xususiyatlari yaqin bo'lgan elementlarning mavjudligi, yoki kaliyli mineral o'g'itlarda radionuklidlarning yetarli darajada bo'lishi bilan tushuntiriladi. Bu esa tuproqning bunday qatlamida K-40 elementi vertikal migratsiya tufayli taqsimlanishini ko'rsatadi. Bundan tashqari Kaliy-40 radionuklidining tuproqni namli qismida ko'proq to'planishi va tekis taqsimlanishi diffuziyadan ham bog'liq. Diffuziya tufayli K-40 izotopi tuproq zarralari bilan o'zaro ta'sirda tekis taqsimlanadi. Kaliy-40 izotopi kimyoviy element sifatida seziy-137 ning xususiyatlarini eslatadi.

Texnogen seziy-137 va stronsiy-90 izotoplarining tuproqdagi migratsiyasi ancha murakkab [2]. Radionuklidlarning tuproq tizimidagi vertikal migratsiyasi tarkibida radionuklidlar bo'lgan zarralarni mexanik uzatilishi hamda ularning ishlov beriladigan qishloq-xo'jalik tuproqlarida ekinlar ekiladigan qatlam chegarasida xususiy ko'chishi natijasida ro'y beradi.

Seziy-137 texnogen izotopining solishtirma aktivligi yerning 1-3 sm li qatlam qismida eng katta bo'ladi (66,725 Bk/kg). 3-rasmdan ko'rinishicha seziy-137 izotopining yer yuzasi qismida tarqalishi (asosan gorizontal migratsiya hisobidan) balandlik ortishi bilan monoton kamayib 15-20 sm chuqurlikda keskin (1,0 Bk/kg gacha) kamayadi. Seziy-137 ning solishtirma aktivligi yerning (1-2) sm li yuzasida (66,72 ± 9,5) Bk/kg ni tashkil qiladi. Seziy-137 radionuklidi gorizontal migratsiya tufayli yerning ustki qismida qayta taqsimlanadi. Bunday taqsimlanish radionuklidning asosan o'simliklarning ildiz qismi sohasida to'planishini tasdiqlaydi va asta-sekinlik bilan Yerning chuqurroq qatlamiga kirib borib ekosistemaning migratsiya zanjiriga qo'shilib ketadi.

Radionuklidlarning gorizontal migratsiyasiga asosiy sabab kuchli shamollar va tuproq eroziyasi ta'sirida bo'lsa, sug'oriladigan yerlarning qayta ishlov berilishi natijasida ham migratsiya jarayoni tezlashadi va aktivlik yuzasi qismiga qaraganda (15-20) sm li chuqurlikda 60-70 % ga kamayadi. Seziy-137 radionuklidining (15-20) sm li chuqur qatlamda keskin kamayishi, bu qatlamda radionuklidlarning nam tuproqda boshqa kimyoviy elementlar bilan ion almashinuvi yuqoriligi bilan tushuntiriladi. Bunday fikrlarni seziy-137 elementining 662 keV energiyali ssintilyatsion gamma spektrlari tahlili ham tasdiqlaydi. 2-rasmda seziy-137 izotopining turli tuproq qatlamlarida (0,5-30,5 sm) li 662 keV energiyali gamma spektrlari ko'rsatilgan. Spektrlardan ko'rinishicha Yer sirtidan turli chuqurliklarda gamma spektrlar intensivligi bir xil emas. Aktivlik 0,2-0,5 sm li chuqurlikda katta. Bu esa bunday qatlamda haqiqatdan ham seziy-137 ning aktivligi yuqoriligini, qolaversa bu qatlamda deyarli yilning barcha fasllarida radionuklidlarning gorizontal migratsiyasi yuqori ekanligini ko'rsatadi.

Jadvaldan ko'rinishicha Yerning yuzasi qatlami (1-3 sm) uzoq yillar, balki yuzlab yillar davomida shakllanib, kuchli shamollar va yomg'ir suvlari orqali migratsiyaga uchraydi. Bunday qatlamda [2] da keltirilishicha aktivlik stronsiy-90 va seziy-137 radionuklidlari uchun ham juda yuqori (70-80 Bk/kg). Ammo solishtirma aktivlik past qatlamlarda nihoyatda kichik (1,4 Bk/kg). Tajriba natijalariga ko'ra 30-40 sm li qatlamda stronsiy-90 uchun solishtirma aktivligi 1,2 Bk/kg ni tashkil etsa, seziy-137 izotopi uchun bunday chuqurlikda, namunalar olingan hududda solishtirma aktivlik 1,0 Bk/kgni tashkil etadi. Seziy ham tuproqda kuchli to'planuvchi elementlar guruhiga mansub. Bu esa muhitning dastlabki ifloslanish holatidan, migratsiya jarayonining baholash vaqtidan bog'liq. Izotopning (tuproq-suv-o'simlikda) gorizontal migratsiya bo'yicha o'tkazilgan tahlillardan uning asosan tuproqning noorganik fazasida kuchli to'planishi aniqlangan va shu bilan birgalikda stronsiy-90 radionuklidining biomassada to'planish koeffitsienti (8000-9000) saqlangan holda [2] Cs¹³⁷ ning tuproqdagi migratsiyasi ko'p jihatdan tuproq tarkibi va uning o'simlik bilan ion almashinuv xususiyatlariga bog'liq. Stronsiyga qaraganda tuproqda

to'planish koeffitsienti kichik bo'lishiga qaramasdan muhitning (tuproq, suv, havo) radioaktivlik holatini asosan seziiy -137 belgilaydi.

Bo'linish mahsulotlarining ishlov berilmaydigan cho'l tuproqlaridagi (qum-shag'alli) vertikal migratsiyasi juda kichik bo'ladi. Ba'zi bir ma'lumotlarga ko'ra [3-5] radionuklidlarning asosiy parchalari tuproqning gorizontaal yupqa sirt qatlamida (3 sm gacha) to'plansa ularning vertikal ko'chishi bir yil davomida bor yo'g'i 3-4 mm ni tashkil qiladi. Umuman kattaligi va xarakteri tuproqning radiatsion sig'imiga bog'liq bo'lgan tuproq radioaktivligini stronsiy-90 izotopi bilan birgalikda seziiy-137 izotopi ko'proq belgilaydi. Yerning radiatsion sig'imi tuproqning yumshoqligi, eritmasi miqdoridan, kation tarkibidan, kimyoviy yutish qobiliyati va biologik holatidan bog'liq.

Shunday qilib, ishlov beriladigan tuproqlarda tabiiy Ra-226, Th-232 va K-40 elementlarining Yerning turli qalinlikdagi ichki qatlamlarida solishtirma aktivligi taqsimotini o'rganish va texnogen radionuklid seziiy-137 elementining asosan yerning sirt qismida (2-3 sm li) solishtirma aktivligi yuqoriligi bu radionuklidlarning asosan gorizontaal migratsiya ta'sirida yer yuzasida qayta taqsimlanishini ko'rsatadi.

Olingan natijalardan shunday xulosa qilish mumkin tabiiy radionuklidlar toriy-232, radiy-226 izotoplari qum-shag'alli tuproqlarda gorizontaal migratsiyaga uchrasa, texnogen seziiy-137 radionuklidi ham tuproqning ishlov beriladigan yuza qismida (1-2 sm) gorizontaal migratsiya xususiyatiga ega bo'ladi. Tabiiy kaliy-40 izotopi esa tuproqda ham gorizontaal ham vertikal migratsiya orqali atrof-muhitga tarqaladi.

Adabiyotlar

1. Гайдамак М.А. Миграция радионуклидов в различных средах. Материалы VIII международной конференции «Инновационные технологии и машиностроении». Юргинский технологический институт.
2. Пивоворов И.П. Михалев В.П. Радиационная экология, учеб.пособие.Москва, Академия, 2004, с.53-61 .
3. Барсуков О.А., Языкеев Д.В. Горизонтальное и вертикальное миграция K^{40} , Cs^{137} , Ra^{226} , Th^{232} va Am^{241} на обрабатываемых склоновых ландшафтах Пензенской области различной степени крутизны. Известия ПГПУ им. Белинского В.Г. 2012, №29.с. 369-374.
4. Крячюнас В.В., Шахова Э.Б. Основные закономерности миграции Th^{232} и Ra^{226} в почвах города Архангельска, ж.Экология человека, 2013, Т8, с.23-27.
5. Смирнов С.Н. Герасимов Д.Н. Радиационная экология. Физика ионизирующих излучений, Москва, изд.МЭИ,2006. с.202-205.

УДК: 537 Э 984

ЛАЗЕРНАЯ ФОТОИОНИЗАЦИОННАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ РИДБЕРГОВСКИХ И АВТОИОНИЗАЦИОННЫХ СОСТОЯНИЙ АТОМОВ РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н.Б. Эшкабилов¹, Ш.Р. Хайдаров¹, А.С. Курбаниязов²

¹Самаркандский государственный университет

²Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий

Аннотация. Проведено систематические исследования ридберговских и автоионизационных состояние атомов редкоземельных элементов. Определены точные значения ионизационных потенциалов всех лантаноидов и исследована связи между потенциалом ионизации атомов и числом потерянных валентных электронов при лазерной многоступенчатой фотоионизации. Установлено физические механизмы образования пиковых и гладких, ассиметричных автоионизационных резонансов в околопороговых и дальних автоионизационных спектров атомов редкоземельных элементов

Ключевые слова: спектры, редкоземельные элементы (РЗЭ) фотоионизация, ридберговские атомы, спектрометр, ионы, стробируемый импульсный интегратор, околопороговые автоионизационные состояния, европий, автоионизация.

Laser photoionization spectroscopy of Rydberg and autoionization states of rare-earth atoms

Abstract. Systematic studies of Rydberg and autoionization states of rare-earth atoms are carried out. The exact values of the ionization potentials of all lanthanides were determined, and the relationships between the ionization potential of atoms and the number of lost valence electrons during multistage laser photoionization were investigated. The physical mechanisms of the formation of spike and smooth,

asymmetric autoionization resonances in near-threshold and long-range autoionization spectra of rare-earth atoms are established.

Keywords: spectra, rare-earth elements (REE) photoionization, Rydberg atoms, spectrometer, ions, gated pulse integrator, near-threshold autoionization states, europium, autoionization.

Nodir-yer elementlari atomlarining ridberg va avtoionizatsion holatlarining lazerli fotoionizatsion spektroskopiyasi

Annotatsiya. Nodir-yer elementlari atomlarining ridberg va avtoionizatsion spektrlari tizimli ravishda tadqiq qilingan. Ko'p pag'analni lazer fotoionizatsion metod bilan barcha lantanoidlarning ionlanish potensialining yangi qiymatlari belgilanib, ularning yo'qotilgan valent elektronlar soniga bog'liqligi o'rganilgan. Nodir-yer element atomlarining ionlanish chegarasi atrofidagi va uzoq avtoionizatsion spektrlaridagi pichkovoy va silliq assimetrik avtoionizatsion rezonanslarning hosil bo'lish fizikaviy mexanizmlariga aniqlik kiritilgan.

Kalit so'zlar: spektrlar, kamyob elementlar (REE) fotoionizatsiyasi, Rydberg atomlari, spektrometr, ionlar, darvoza zarbasi integratori, eng yaqin avtonom holatlar, evropiy, avtoionizatsiya.

Введение.

Спектры поглощения атомов редкоземельных элементов (РЗЭ), принадлежащих к группе лантаноидов, изучены частично [1]. К этому есть много причин, наиболее важной из которых является та, что спектры поглощения РЗЭ имеют очень сложную структуру. Спектры поглощения этих элементов формируются путем накладки двух спектров; т.е. спектров валентных $6s^2$ -электронов и спектров 4f-электронов, возбуждаемых из внутренней подоболочки атома. Другая причина сложности спектра состоит в том, что исследуемые элементы при нагревании испаряются в виде молекул, т.е. очень трудно преобразуются в виде атомов. Поэтому, на фоне атомных спектров проявляются и молекулярные спектры, что существенно затрудняет идентификацию наблюдаемых спектров. Кроме того, существуют технические трудности, связанные с размещением каждый раз исследуемого элемента в глубоковакуумной камере (10^{-6} мм.рт.ст.) и записью спектра на протяжении всего эксперимента, обеспечение его синхронной работы с возбуждающим источником света.

Целью настоящей работы является проведение систематических исследований ридберговских и автоионизационных спектров РЗЭ, определение на их основе точные значения ионизационные потенциалы всех лантаноидов и установление связи между потенциалом ионизации атомов и числом потерянных электронов при лазерной многоступенчатой фотоионизации, а также изучения механизмов образования пиковых и гладких, ассиметричных автоионизационных резонансов лантаноидов.

§1. Лазерный фотоионизационный спектрометр

Изучение ридберговских и автоионизационных состояний атомов редкоземельных элементов проводилось на лазерном фотоионизационном спектрометре. Полное описание лазерного фотоионизационного спектрометра (ЛаФОС) и методики проведения эксперимента приведена в работе [2]. Атомы редкоземельных элементов ступенчато возбуждаются в высоколежащие ридберговские состояния излучением двух или трех лазеров на красителях с плавно перестраиваемой частотой излучения. Ридберговские атомы эффективно ионизовались импульсным электрическим полем. Описываемый спектрометр может работать в режиме нерезонансной фотоионизации возбужденных атомов, а также в режиме резонансной фотоионизации возбужденных атомов через автоионизационное состояние. (рис 1)

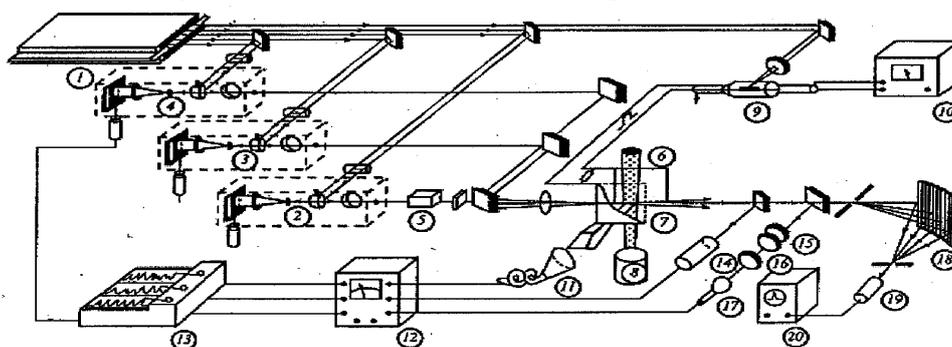


Рис.1. Принципиальная схема экспериментальной установки.

1 – азотный лазер, 2 – 4 – лазеры на красителях, 5 – кристалл KDP, 6 – атомный пучок, 7 – электроды, 8 – атомизатор, 9 – ГИН, 10 – источник питания, 11 – ВЭУ, 12 – строб-интегратор, 13 – самописец, 14 – лампа ЛСП, 15 – интерферометр Фабри-Перо, 16 – линза, 17 – ФЭУ, 18 – монохроматор, 19 – фотокатод, 20 – осциллограф.

Накачка лазеров на красителях осуществлялась импульсным азотным лазером с поперечным разрядом. Частота излучения лазера на красителях первой ступени возбуждения при необходимости удваивалась с помощью нелинейных кристаллов KDP или ниобата лития. Лазерные лучи пересекают атомный пучок в вакууме между двумя электродами, на которые после лазерного возбуждения подается электрическое поле от генератора импульсного напряжения (ГИН). Питание ГИНа осуществлялось от высоковольтного источника постоянного напряжения. В качестве коммутатора использовался газонаполненный разрядник, который запускался от излучения азотного лазера. Такая схема позволяет формировать на согласованной нагрузке одиночный прямоугольный импульс электрического поля. Ионы, появившиеся в результате автоионизации ридберговских атомов импульсным электрическим полем, приобретают в электрическом поле импульс в направлении вектора напряженности поля. Величина скорости, соответствующая этому импульсу, на два порядка больше скорости атома в пучке, поэтому движение иона происходит в направлении, перпендикулярном к направлению движения атомного пучка. Достигнув электрода с нулевым потенциалом, ионы вытягиваются через щель в этом электроде электрическим полем катода вторично-электронного умножителя (ВЭУ). Ионный сигнал от ВЭУ поступает на стробируемый импульсный интегратор, и от него - на самопишущий прибор.

Стробируемый импульсный интегратор, разработанный нами, позволяет с помощью самопишущего прибора осуществлять непрерывную запись усредненных значений амплитуды импульсов фотоионного сигнала.

Калибровка длины волны излучения лазера на красителях и настройка на возбуждаемый период осуществлялись с помощью монохроматора и лампы с полым катодом. Одновременно со спектром ионного сигнала записывался опорный спектр от эталона Фабри-Перо. Развертка самопишущего прибора осуществляется синхронно с поворотом решетки лазера на красителе, используемого на последней ступени возбуждения. Измерение значений энергии ридберговских или автоионизационных состояний производилось сопоставлением фотоионных спектров с опорным спектром.

В трехступенчатой схеме возбуждения атомов для насыщения выбранных переходов требуется излучение высокой мощности. В этом случае простой азотный лазер накачки заменялся двухобъемным азотным лазером[3]. При этом суммарная энергия генерации увеличивалась в два раза, т.е. составляла 20 мДж. Строго одинаково изготовленные лазерные камеры и электрические отводы обеспечивали синхронную работу двух генерирующих камер в пределах не хуже 1-2 нс. Исследования данного лазера показали, что он позволяет получать двухчастотную генерацию путем заправки двух активных объемов различными рабочими газами.

В целом, созданный в данной работе высокочувствительный селективный лазерный фотоионизационный спектрометр имеет следующие характеристики: область перестройки - 390-700 нм; ширина линии излучения - $0,01\text{см}^2$; разрешающая способность -10^{12} ; селективность на трех ступенях - 10^{15} ; чувствительность - один атом.

§2. Изучение влияния потерянных s-электронов на потенциалы ионизации атомов редкоземельных элементов при фотоионизации лазерным излучением

Ионизационный потенциал атома представляет собой наименьшую энергию, необходимую для удаления электрона от свободного атома. Он является одной из главных характеристик атома, от которого в значительной степени зависит физико-химическая природа вещества. Наименьшее значение потенциала ионизации в Периодической системе элементов принадлежит атому цезия, оно составляет 3,894 эВ, а наибольшее значение принадлежит атому гелия (27,587 эВ). По мере повышения уровня ионизации в атомах потенциал ионизации также увеличивается. Инертные газы и цветные металлы имеют более высокий потенциал ионизации, чем другие, в то время как щелочноземельные металлы имеют более низкий потенциал ионизации. Помимо первого потенциала ионизации существуют также второй, третий и, далее, n -ый потенциал ионизации. Эти потенциалы генерируются путем удаления одного, второго, третьего и n -ого электрона из атома.

Ионизационный потенциал атомов определяется экспериментально. Определение ионизационного потенциала атома в основном осуществляется спектроскопическими методами [4].

Здесь большим преимуществом обладают лазерно-спектроскопические методы. Лазер может ионизировать нейтральные атомы различными способами [5]: методом селективной ступенчатой фотоионизации, методом многофотонного поглощения, методом сходимости ридберговских серий и другими методами.

Измерение предела сходимости ридберговской серии является простым и точным методом определения величины потенциала ионизации в атомах [6]. Преимущество этого метода заключается в том, что, во-первых, он точно измеряет значения энергии квантовых состояний вплоть до максимально возможных значений главного квантового числа ($n=70\div 100$). Известно, что все очень тонкие спектроскопические эффекты проявляются при высоких значениях главного квантового числа и изменяют положения высоковозбуждённых ридберговских состояний атомов. Эти изменения отражаются в спектрах ридберговских серий. В некоторых случаях дискретные и глубокие спектры (например, автоионизационные состояния, лежащие вблизи границы ионизации) изменяют структуры высоколежащих ридберговских состояний, тем самым изменяя значения границы предела ионизации. Поэтому в атомной спектроскопии важно каждый раз измерять это значение с высокой точностью для атомов каждого элемента.

Во-вторых, метод измерения предела сходимости ридберговской серии основан на формуле Ридберга-Ритца [7], которая очень точно отражает расположение высоколежащих ридберговских состояний, когда $n \rightarrow \infty$. В этом случае значение потенциала ионизации выбирается так, что при очень высоких значениях главного квантового числа ($n=100$) величина квантового дефекта уровней должна иметь постоянное значение с очень высокой точностью ($\pm 0,001$). В этом случае график зависимости квантового дефекта от главного квантового числа должен отображать идеальную прямую линию ввиду высокой чувствительности этой зависимости. Изменение величины принятого потенциала ионизации на $\pm 0,1 \text{ см}^{-1}$ приводит к изменению квантового дефекта на ± 1 . В результате зависимость быстро отклоняется от прямой линии. В нашем случае изменение квантового дефекта не превысило $\pm 0,02$.

Целью настоящей работы является проведение систематических исследований ридберговских спектров, определение на их основе ионизационных потенциалов всех лантаноидов и установление связи между потенциалом ионизации атомов и числом потерянных электронов при лазерной многоступенчатой фотоионизации. Спектры элементов лантаноидов с f-оптическими электронами очень сложны [8]. Это связано с тем, что электронные конфигурации, содержащие f-электроны, дают чрезвычайно большое число термов и уровней. Так, например, конфигурация f^7 даёт 119 термов мультиплетности: 2, 4, 6, 8 и 327 уровней. Для конфигурации группы f^k число термов может увеличиться до нескольких тысяч.

По своему характеру спектры лантаноидов можно разбить на две группы. Спектры первой группы элементов (La, Eu, Tu, Yb) беднее линиями. Спектры второй группы элементов (Ce, Pr, Nd, Pm, Sm, Gd, Tb, Dy, Ho, Er) очень богаты линиями, причем группа интенсивных линий в этих спектрах очень мала. Подобное различие в виде спектров обусловлено изменением прочности связи электронов $4f$, $5d$, $6s$, определяющих положение низких термов при переходе от одного элемента к другому. Значительно большая сложность спектров Ce, Pr, Nd, Pm, Tb связана с тем, что большое число уровней конфигурации $4f^{k-1}5d$ и $4f^k$ расположено сравнительно близко к основному состоянию. У гадолиния и самария основные термы лежат на большом расстоянии от остальных термов основной конфигурации. У элементов Dy, Ho, Er уровни конфигурации $4f^{k-1}5d$ лежат значительно выше уровней конфигурации $4f^k$. Это приводит к упрощению спектров Gd, Sm, Dy, Ho, Er.

Из-за сложности спектров пределы ионизации, измеренные разными методами, дали разные результаты. Поэтому, методом селективной ступенчатой лазерной фотоионизации были экспериментально прописаны все спектры ридберговских состояний лантаноидов. Описание экспериментальной установки и методика проведения эксперимента приведены в работе [2]. На основании спектров были построены графики зависимости главного квантового числа от квантовых дефектов для состояний атомов. Из графиков были найдены новые и более точные значения ионизационных потенциалов редкоземельных элементов (РЗЭ). Эти данные приведены в Таблице 1, и для сравнения приведены данные, полученные другими методами.

Таблица 1.

Z	Элемент	Конфигурация	$E_{i1}, \text{ см}^{-1}$	$E_{i2}, \text{ см}^{-1}$	$E_{i3}, \text{ см}^{-1}$
58	Ce	$4f^2 6s^2$	43876,2	44158,49	44672,591
59	Pr	$4f^3 6s^2$	43311,6	43739,09	-----
60	Nd	$4f^4 6s^2$	44279,5	44271,41	44562,255

61	Pm	$4f^3 6s^2$	-----	44795,67	45022,310
62	Sm	$4f^6 6s^2$	45005,4	45416,71	45519,224
63	Eu	$4f^7 6s^2$	45811,9	45731,27	45734,734
64	Gd	$4f^7 5d 6s^2$	50328,6	49530,11	49604,793
65	Tb	$4f^9 6s^2$	47102,4	47199,18	47295,646
66	Dy	$4f^{10} 6s^2$	47586,3	47804,10	47901,364
67	Ho	$4f^{11} 6s^2$	48312,2	48538,05	48567,572
68	Er	$4f^{12} 6s^2$	47828,3	49207,49	49262,010
69	Tm	$4f^{13} 6s^2$	49280,0	49876,92	49879,826
70	Yb	$4f^{14} 6s^2$	50086,6	51248,05	50441,022

Примечания:

E_{i1} -Электронная бомбардировка,

E_{i2} -Спектроскопический метод экстраполяции,

E_{i3} -Подгонка сходимости ридберговской серии.

Ионизация атомов группы лантанидов соответствует отрыву одного из $6s$ -электронов. Как видно из таблицы, потенциалы ионизации лантаноидов близки друг к другу и лежат около 6 эВ. Но наблюдается небольшое повышение его значения с увеличением атомного номера (Z). Нами более тщательно была исследована эта зависимость. Полученные результаты приведены на рис.2.

Как видно, зависимость состоит из двух прямых линий: при малых значениях Z зависимость от E_i близка к квадратичной, а при больших значениях ($Z > 65$) зависимость приобретает вид, близкий к кубической. Это обстоятельство, по-видимому, связано с порядком заполнения электронных оболочек атома, т.е. сначала электронные оболочки заполняются по принципу Паули (квадратичная часть зависимости), далее, преждевременно уровням $5p$, электронами начинают заполняться $5d$ - уровни. За счет этого процесса величина потенциала ионизации резко возрастает, и зависимость переходит от квадратичной к кубической. Тем самым возникает равновесие сил между валентным электроном и атомным остовом и образует стабильная атомная система.

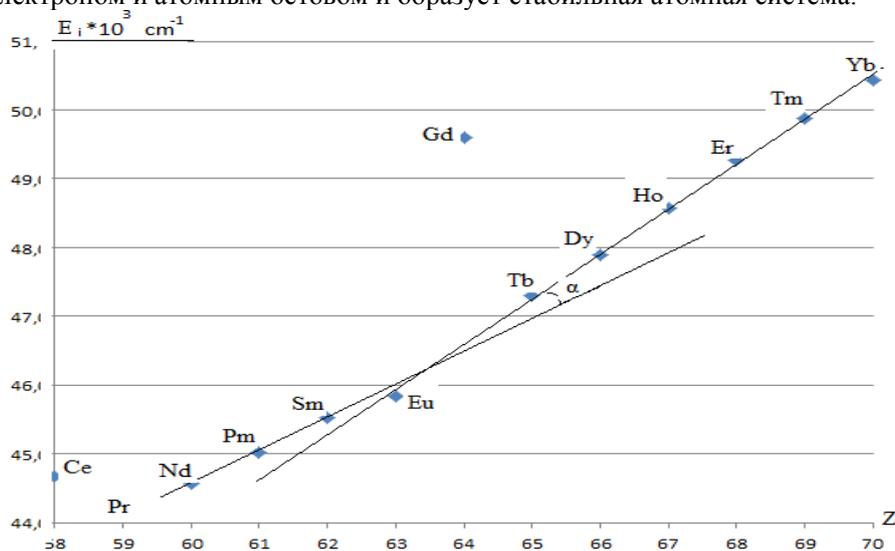


Рис.2. Зависимость значения ионизационных потенциалов лантаноидов, измеренная методом подгонки сходимости ридберговской серии, от атомного номера (Z).

Как отмечалось выше, для редкоземельных элементов ионизация заключалась в потере одного s -электрона из конфигурации $4f^N 6s^2$ ($N=2-14$). Были изучены изменения ионизационных потенциалов (E_i) от количества потерянных s -электронов (N). Эта зависимость приведена на рис. 2.

Из графика видно, что при $N < 8$ крутизна зависимости близка к квадратичному закону, а при $N > 8$ зависимость резко возрастает и становится близкой к кубической. Такое поведение зависимости качественно может быть объяснено на основе принципа Паули и правила Хунда [7,9]. Численная согласованность результатов эксперимента объясняется методом Хартри-Фока [8,10].

Таким образом, во-первых, метод измерения предела сходимости ридберговской серии очень удобен, и может быть использован для изучения очень тонких спектроскопических эффектов,

связанных с потенциалами ионизации атомов. Во-вторых, анализируя две зависимости (рис.2 и рис.3), можно прийти к выводу о том, что величина ионизационных потенциалов атомов формируется за счет положения валентных электронов в последней оболочке нейтрального атома. В редкоземельных атомах валентными электронами являются $6s$ -электроны.

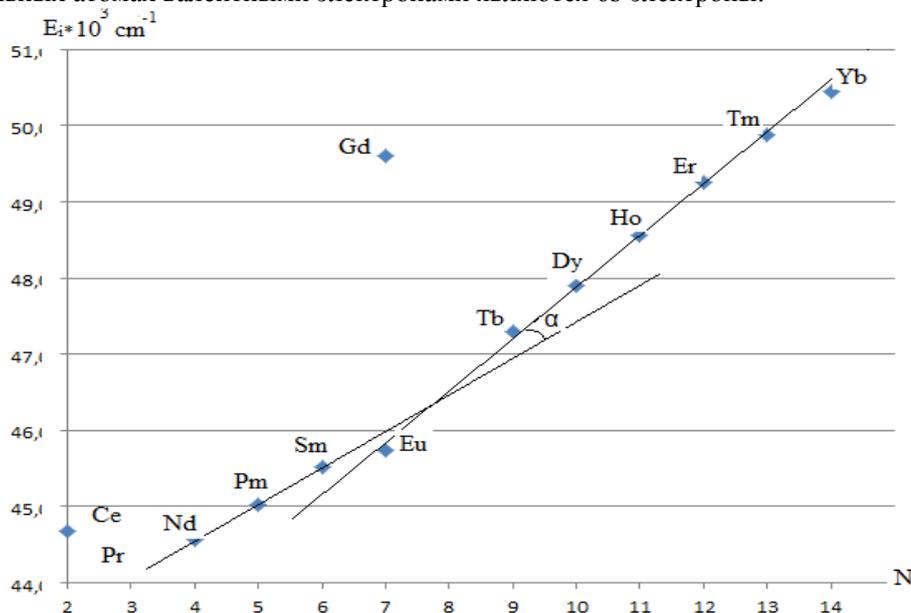


Рис.3. Зависимость между величиной потенциала ионизации (E_i) лантаноидов от количества потерянных s -электронов (N)

§3. Исследования околопороговых и дальних автоионизационных спектров атомов редкоземельных элементов

Спектры поглощения РЗЭ имеют очень сложную структуру. Несмотря на то, что изучение спектров поглощения многих лантаноидов очень сложный процесс, все же их удалось зарегистрировать [11]. Их спектры лежат в основном в видимой, ультрафиолетовой и вакуумно-ультрафиолетовой областях спектра. В этом случае проблемой является то, что очень трудно их правильно и полностью идентифицировать из-за сложности спектра. К настоящему времени только часть спектра РЗЭ была зарегистрирована разными методами [12]. Спектры автоионизационных состояний лантаноидов частично изучены для элементов иттербия, европия и тулия. Они состоят из пиковых и широких спектров автоионизационных резонансов.

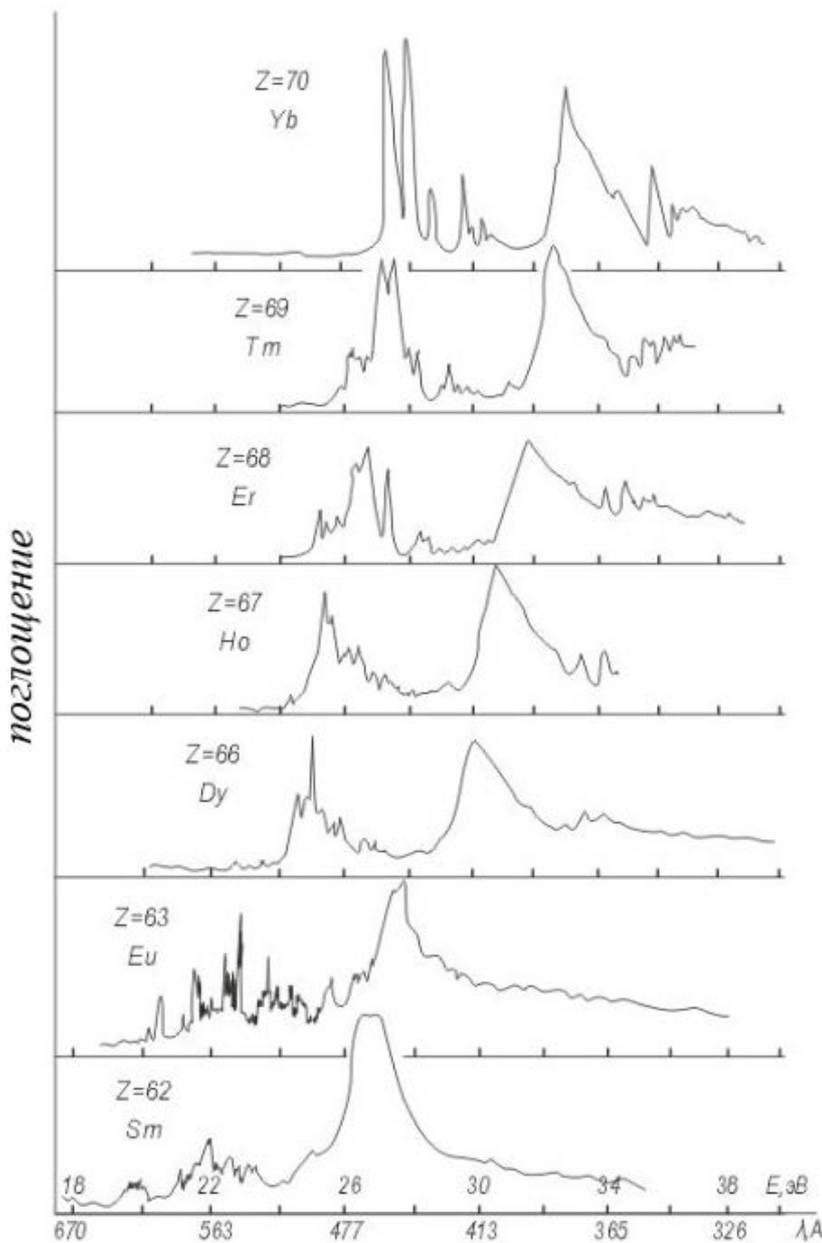
Одним из наиболее ярких и широко изученных элементов этой группы является европий, для которого в определенной степени были изучены околопороговые ридберговские и автоионизационные состояния атома [14]. Атом европия, с точки зрения физико-химических свойств, тоже относится к группе лантаноидов в Периодической таблице, как ряд редкоземельных элементов. Его основная электронная конфигурация - $4f^7 8s^0 6s^2 8s^0_1$

Для изучения околопороговых автоионизационных состояний атомов европия был применен метод селективной ступенчатой фотоионизации атомов лазерным излучением [15]. Этим методом атомы европия поэтапно возбуждались с помощью нескольких лазерных лучей, а затем ионизовались только возбужденные атомы с помощью коротких электрических импульсов. Лазер на красителе первой ступени возбуждал переход $6s^2 8s^0 \rightarrow 6s6p \ ^3P^0_1$ с $\lambda = 555,65 \text{ nm}$. Вторым лазером атомы возбуждались в различные промежуточные состояния. Длина волны излучения третьего лазера перестраивалась в диапазоне $410 \div 470 \text{ nm}$, что позволяло осуществлять поиск околопороговых автоионизационных состояний в области $3700 \div 14000 \text{ cm}^{-1}$ над границей ионизации. Первый потенциал ионизации составляет - $45734,904 \text{ cm}^{-1}$. Таким образом были обнаружены и идентифицированы несколько узких автоионизационных резонансов, принадлежащих конфигурации- $7s6p$.

Спектры дальних автоионизационных состояний лантаноидов в коротковолновом вакуумном ультрафиолете частично упрощены и образуют спектральные серии в порядке заполнения подоболочки $5p^6$. Первые эксперименты в этой области были проведены на синхротроне с разрешением $0,15 \text{ \AA}$ и энергией $0,5 \text{ ГэВ}$, работающем в диапазоне $1100 \div 300 \text{ \AA}$ [16]. При

проведении эксперимента использовали дифракционную решетку, покрытую золотой пленкой с поверхностью $100 \times 100 \text{ mm}^2$ и с радиусом кривизны 1 метр . Обратная линейная дисперсия

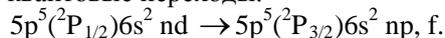
составляет 4,2 А/мм. В результате экспериментов были записаны спектры поглощения самария, европия, диспрозия, гольмия, эрбия, тулия и иттербия. Эти спектры показаны на рис. 4. Широкие асимметричные резонансы автоионизационных спектров состоят из серии спектров $p^5 2P_{3/2}$ с высокими интенсивностями. Анализ этих спектров показывает, что спектральная классификация автоионизационных спектров лантаноидов связана с возбуждением из основного или возбужденного состояния атомов. Например, у самария атомы распределены по семи подуровням основного состояния $f^6 6s^2 7F(J=0-6)$. В других редкоземельных элементах (кроме гольмия) частицы находятся в самом нижнем подуровне основного состояния. Согласно зарегистрированным спектрам, расщепление между уровнями $5p^5 2P_{3/2}$ и $5p^5 2P_{1/2}$ иттербия очень велико, в результате спин-орбитального взаимодействия в иттербии, оно составляет 6,17 эВ. У лантаноидов это расширение увеличивается от тулия до самария. При уменьшении атомного номера от 70 до 66 расширение между уровнями $5p^5 2P_{3/2}$ и $5p^5 2P_{1/2}$ увеличивается на 0,6 эВ. В области спектра 500-380А спектры лантаноидов имеют специфические свойства (см. рис 4.)



Энергия автоионизационного спектра (эВ), (длина волны,λ)

Рис. 4. Спектры дальних автоионизационных состояний редкоземельных элементов

Наблюдаемые автоионизационные резонансы являются широкими и асимметричными, что объясняется образованием двух одинаковых ионов. Если мы рассмотрим этот механизм на примере иттербия, то предполагается, что если энергия перехода лежит между пределами $5p^5 \ ^2P_{1/2}$ и $5p^5 \ ^2P_{3/2}$, то могут произойти следующие квантовые переходы:



то есть автоионизация на первом этапе происходит сначала не из основного состояния, а из возбужденного состояния $5p^5(2P_{3/2})6s^2$, поскольку энергия иона выше, чем начальная потенциальная энергия иона. Затем идет еще один процесс автоионизации, который связан с образованием второго иона иттербия. Таким образом, одновременно образуются два фотоэлектрона. Когда первая фотоэлектронная энергия равна разности между энергией фотона и квантовых уровней с энергией $Yb\ 5p^5 \ ^2P_{3/2}$, вторая фотоэлектронная энергия определяется разностью между квантовым уровнем с энергией $5p^5 \ ^2P_{3/2}$ (31,35 эВ) и энергией основного состояния иона $Yb\ III$, которая на 18,44 эВ выше основного состояния нейтрального атома. Таким образом, второй фотоэлектрон имеет определенное значение, т.е. $31,35 \text{ эВ} - 18,44 \text{ эВ} = 12,91 \text{ эВ}$. Полуширина наблюдаемых спектральных максимумов составляет $\Gamma=240 \text{ см}^{-1}$ или 0,03 эВ.

Сравнение спектров дальних автоионизационных состояний семи РЗЭ (Sm, Eu, Dy, Ho, Er, Tm, Yb) приведено на рис. 4. Из графиков видно, что спектры каждого элемента состоят из двух групп спектров. Первая группа спектров имеет пиковую структуру и соответствует малым значениям энергии, то есть они расположены в длинноволновой стороне автоионизационных спектров. Как упоминалось выше, эти спектры обусловлены ионизацией атомов из возбужденных состояний. Вторая группа спектров имеет гладкий внешний вид, близкий к гауссовой форме, но асимметричный спектр, состоящий из интенсивных спектров с определенным максимальным значением энергии. Эти спектры обусловлены ионизацией атомов из основного состояния.

Здесь наблюдается интересное явление. Мы изучали зависимость значений максимальной энергии асимметричных спектров автоионизационных состояний от атомного номера элемента (Z) (эта зависимость показана на рис. 5). Оказалось, что график состоит из двух параллельных линий, т.е. прямолинейная зависимость обрывается при $Z=64$ и 65 . Эти значения соответствуют элементам гадолиния и тербия с атомными номерами $Z=64$ (Gd) и $Z=65$ (Tb).

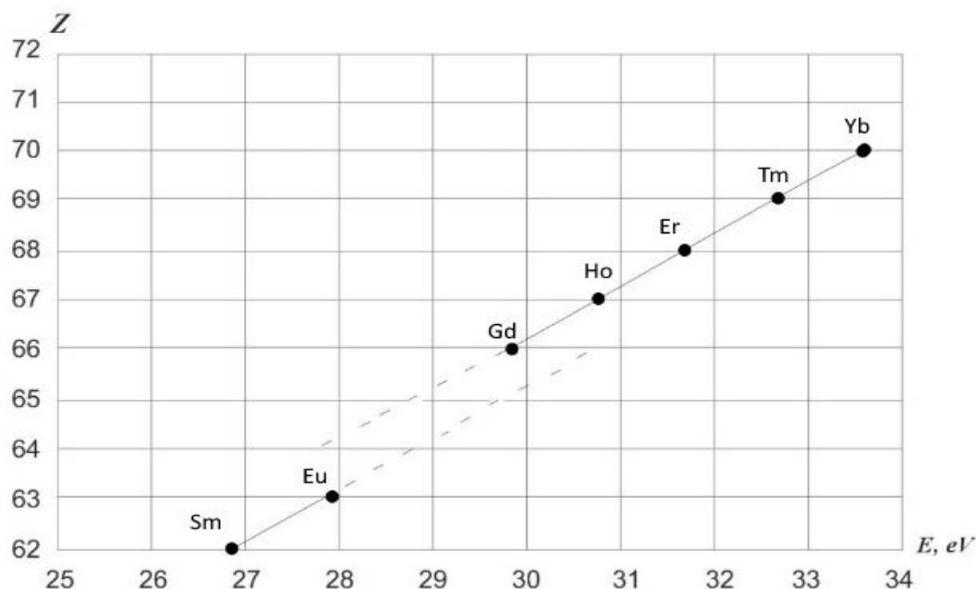


Рис. 5. Зависимость максимальных значений энергии дальних автоионизационных спектров (E), от атомного номера элемента (Z).

Это несоответствие объясняется тем, что $5d$ - уровень начинает заполняться преждевременно. Только у этих двух элементов (Gd, Tb), наряду с уровнями $5p$ -уровней, начинают заполняться $5d$ - уровни с электронами. Тот же самый процесс происходит позже с элементом $Z=71$ (Lu).

Качественная картина возникновения автоионизационных состояний в многоэлектронном атоме и использование лазерного многоступенчатого или многофотонного возбуждения для их исследования ранние рассмотрена авторами работы [17]. Эти спектроскопические эффекты, по-видимому, объясняются спин-орбитальным взаимодействием валентных электронов с атомным

остовом. Таким образом важным фактом является то, что этот эффект проявляет себя при исследовании околороговых ридберговских состояний атомов лантаноидов.

Литература

1. Paisner J.A., Solarz R.W., Worden E.F., Conway J.G. - In: Laser Spectroscopy III Berlin, Springer Verlag, 1977, p. 160.
2. Eshkabilov N.B., Tursunov A.T., Akilov R., Korniyenko V.V. Optika i spektroskopiya. t.62., t.6, 1986, s.1284-1287.
3. A.T.Tursunov, N.Muksibov, G.Khasanov, N.B.Eshkobilov. Kvantovaya elektronika.1987, t.14, №6, s.1215-1216 /
4. Coste A., Avril R., Blancard P., Chatelet J., Lambert D., Lagre J., Liberman S., Pinard J. – J. Opt. Sos. Am., 1982, v.72., p.103.
5. Djerixin A.N., Mishin V.I., Fedoseev V.N. – Optika i spektroskopiya. 1984, t.57, s.783
6. Letokov V.S.- UFN, 1976, t. 1, s. 118, s. 199.
7. Sobel'man I.I. Vvedeniye v teoriyu atomnix spektrov, M. Nauka, 1977
8. Sbornik: Metody atomnix raschetov. Nauchniy sovet po spektroskopii, M. 1986
9. Alan Corney, Atomic and Laser Spectroscopy, OUP Oxford, 2006, 763p.
10. W. Demtröder. Laser Spectroscopy Springer, 2015. 780p.
11. Gerhard Herzberg. Atomic Spectra and Atomic. Publisher: Dover Publications; 2 edition (August 19, 2010), 288 pages
12. N.P.Penkin., V.A.Komarovskiy - J.Quant.Spectr.Rad.Trans., 1976, t.16, s.217.
13. A.C.Parr. – J.Chem.Phys.,1971.v.54, p.3161.
14. A.N.Jerixin, O. N. Kompanets, V.S.Letoxov - JETF, 1984, T.86, p.1249. 15.G.I.Bekov, Ye.P.Vidolova-Angelova, L.N.Ivanov, V.S.Letokhov, V.I.Mishin.-Opt. Komm., 1980, t.35., S.194.
- 16.D.N.Tracy.-Proc. Roy. Sos. London, 1977, v.A357, p. 485.
17. Bekov G. I., Tursunov A. T., Eshkabilov N. B., Khasanov G. - Optika i spektroskopiya. T.62., T.3, 1987.

UDC:

HIGH-RESOLUTION IR SPECTRUM MEASUREMENT OF THE LINE PARAMETERS OF HYDROGEN FLUORIDE IN GAS PHASE

A.X.Amonov

*Samarkand State University
akhtamul@gmail.com*

Abstract. In this paper we present an unique high resolution FTIR rotation-vibration spectrum of H^{19}F molecule and derived most necessary line by line parameters of the title complex. The formation mechanisms of the vibration-rotation infrared spectrum of the hydrogen fluoride have been explained. Optimal geometry and total electron density surface 3D have been mapped with electrostatic potential determined for $(\text{HF})_3$ cluster with mp2=full/6-311++g(3df,3pd) levels of theory.

Keywords: hydrogen bond, high resolution spectroscopy, infrared spectrum, quantum mechanical calculations

Измерение линейных параметров фтористого водорода в газовой фазе при помощи ик спектра высокого разрешения

Аннотация. В этой статье мы представляем уникальный колебательно-вращательный FTIR-спектр с высоким разрешением молекулы H^{19}F и выводим наиболее необходимые линейные параметры названного комплекса. Объяснен механизм формирования колебательно-вращательного инфракрасного спектра фтористого водорода. Определены оптимальная геометрия и полная электронная плотность 3D поверхности, сопоставленные с электростатическим потенциалом, определенным для кластера $(\text{HF})_3$ с mp2 = full / 6-311 ++ g (3df, 3pd) уровнями теории.

Ключевые слова: водородная связь, высокое разрешение, инфракрасный спектр, квантово-механические расчеты.

Gaz fazasida Vodorod Ftoridning chiziq parametrlarini yuqori ajrata olishli IQ spectri yordamida baholash

Annotatsiya. Ushbu maqolada $H^{19}F$ molekulasining yuqori ajrata olishli noyob Fur'e IQ tebranma-aylanma spectrini taqdim qilindi va uning eng zarur chiziq parametrlari keltirib chiqarildi. Vodorod ftoridning tebranma-aylanma infraqizil yutilish spektrining shakllanish mexanizmlari tushuntirildi. $(HF)_3$ klaster uchun mp2=full/6-311++g(3df,3pd) nazariyalar bosqichida optimal geometriysi va unga muvofiq 3D elektrostatik potentsiyal sirtida umumiy electron zichligi hisoblandi.

Kalit so'zlar: vodorod bog'lanish, yuqori ajrata olish, infraqizil spektri, kvanto mexanik hisoblashlar

1. Introduction

The importance of hydrogen bonded systems in science has led to a considerable experimental and theoretical interest in this phenomenon for many years [1]. It is well known that in the molecule ($H^{19}F$), ^{19}F is the most stable isotopologue in the number of its other isotopologues of hydrogen fluoride (HF). Also, $H^{19}F$ is appropriate to understanding the nature of hydrogen bond (HB), because of spectacularly ideal changes of the $\nu(HF)$ stretching region in the $HF \cdots X$ (acetone, water, etc.) molecular compounds [2,11]. Besides, investigate of HF-contained molecules in gas phase provides with more important information on the nature of intermolecular interactions, the structure, rotation, vibration-rotational dynamics of $H^{19}F$ contained molecular complexes [1, 2]. It is well known that HF has to a large tendency to self-associate due to strong hydrogen bonding in the gas phase. In general due to investigate an electro optical parameters even for the simpler diatomic molecules are extremely difficult. Although, in [3] authors of the monograph showed that the explicitly recorded high resolution infrared spectra and theoretical interpretations provide an impetus for treatment of rotational and vibrational spectra of diatomic molecules. Bulanin and his group reported results on high-resolution FTIR measurements of intensities, self-broadening and shifting coefficients for the spectral lines in the fundamental and first two vibration-rotation overtone bands of diatomic molecules in detail [5–8].

Herein, we purposed to derive and compare important line by line parameters of the title diatomic molecule by utilizing its high resolution absorption spectrum in gas phase which is showed in (Figure 1.). The line frequencies and intensities for the P and R branches, broadened half width coefficients, Einstein coefficients were evaluated. By use of the vibration-rotation energy of diatomic molecule which is expressed by (1) determined line to line ro-vibration energies of the HF molecule. Obtained line to line parameter of HF according to its absorption spectrum compared with HITRAN 2012 [3] and found a good agreement between them.

$$E_{v,J} = \omega_e \left(v + \frac{1}{2} \right) - \omega_e x_e \left(v + \frac{1}{2} \right)^2 + \omega_e y_e \left(v + \frac{1}{2} \right)^3 + \omega_e z_e \left(v + \frac{1}{2} \right)^4 + B_{v,J} (J+1) - D_v (J(J+1))^2 + \dots \quad (1)$$

(here v is a vibrational quantum number, ω_e is the harmonic wavenumber, x_e , y_e , $z_e \dots$ are anharmonicity constants, $B_{v,J}$ depends on the rotation-vibration moment of inertia of the molecule and D_v is a centrifugal distortion constant due to vibrational modes.)

Also, we present stabilization geometry and **total electron density 3D surface for $(HF)_3$ cluster** calculated by quantum mechanical methods.

2. Experimental and computational methods

2.1 Experimental procedure:

The spectra of $H^{19}F$ complex recorded by Bruker FTIR-125 HR vacuum spectrometer at a resolution of 0.005 cm^{-1} and at $298 \pm 1 \text{ K}$ temperature. As a beam splitter KBr, GaF_2 window and 260 mm stainless steel cell cavity were used. Total pressure of the pure $H^{19}F$ was 10 mbar.

2.2 Computational method:

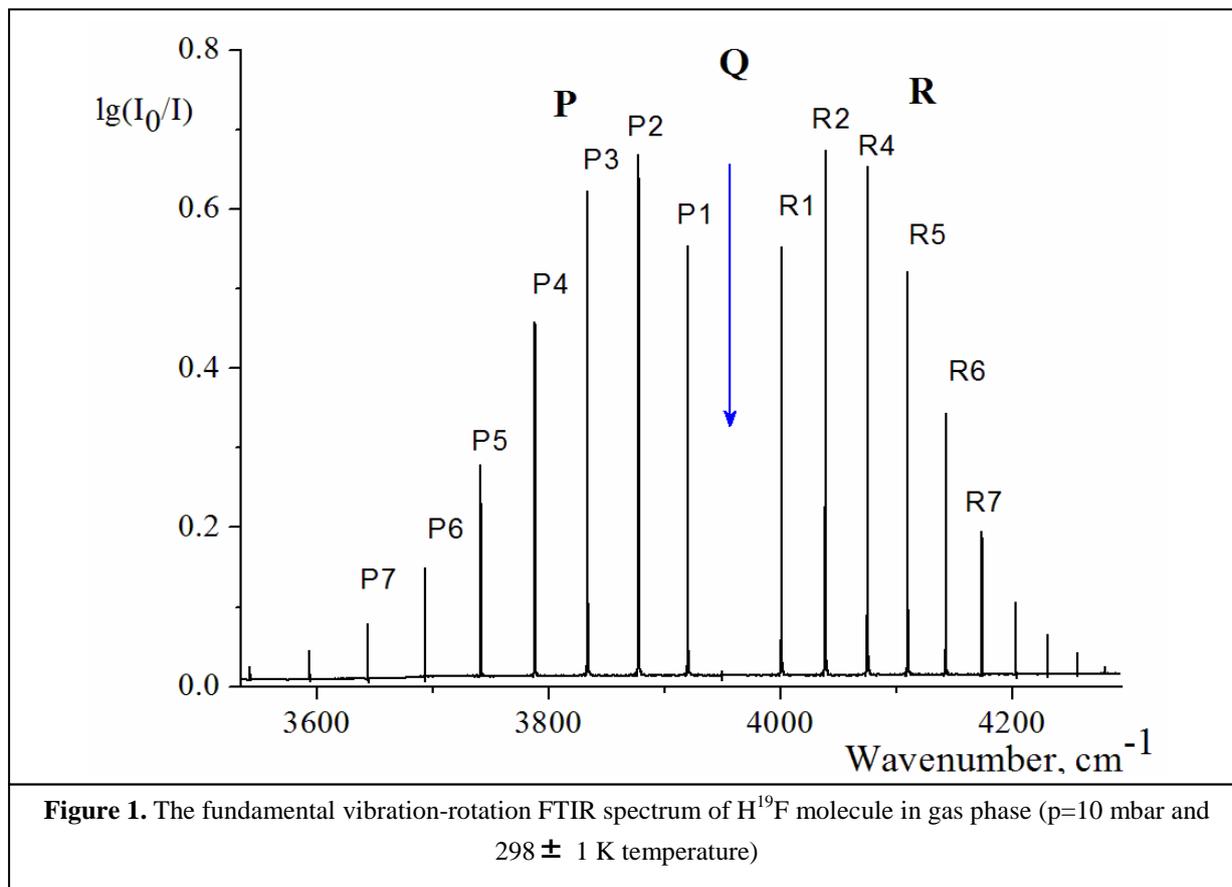
Optimized geometrical configuration and an electron density simulation for the $(HF)_3$ cluster have been calculated by use of Gaussian 09 package [14] in mp2=full/6-311++g(3df,3pd) and HF/3-21+(d, p) levels of theories, respectively.

3. Results and discussions

The fundamental vibration-rotation spectrum of $H^{19}F$ at resolution 0.005 cm^{-1} is showed in the Figure 1. The total pressure of the sample was $p=10 \text{ mbar}$ in the cell. R and P branch lines recorded explicitly and Q branch was not occurred according to the selection rule. Following parameters of the $H^{19}F$ in gas phase were derived: the line frequency(ν), intensity(S), Einstein coefficient(A), air broadened half

width(γ_{air}), self broadened half width(γ_{self}), vibration-rotation lower state energy(E), temperature coefficient(n_{air}), air pressure-induced line shift(δ_{air}) and lower (J') and upper (J'') rotational states, respectively.

The line to line positions of the spectrum analyzed one by one through standard OPUS software and we have seen that all of the line positions in the spectrum were explicitly coincides with calculated values.



In addition we performed, optimal geometry, HB lengths and the three-dimensional structure for the $(\text{HF})_3$ hydrogen fluoride cluster has been calculated applying second-order Møller-Plesset perturbation (MP2) theory with the full /6-311++g(3df,3pd) basis set. Although numerous quantum mechanical calculations on infinite one-dimensional chains of hydrogen fluoride have been reported in [9,10] there exist a small amount of three-dimensional simulations. In the line parameters of both R and P branches possessing various magnitudes due to transitions from fundamental and excited states simultaneously. The results are necessary to understanding of the ν (HF) band region formations of the HF involving compounds in detail [11, 12].

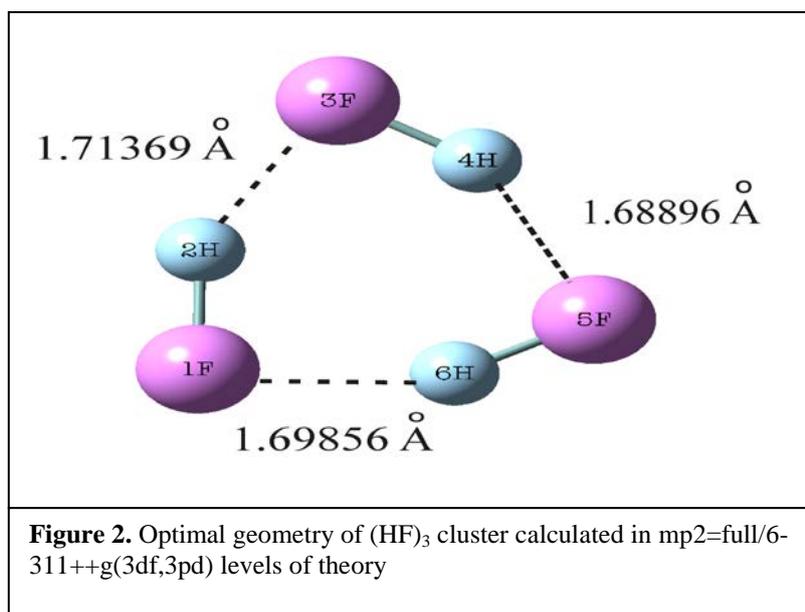
The most important line parameters of H^{19}F molecule calculated for R and P branches in gas phase and results collected in Table 1. Obtained line parameters are reliable and found reasonably good agreement with HITRAN database [3].

Table 1. Calculated line by line parameters of H^{19}F molecule in gas phase.

	ν cm^{-1}	S $\text{cm}^{-1}/(\text{molec cm}^{-2})$	A s^{-1}	γ_{air} $\text{cm}^{-1}/\text{atm}$	γ_{self} $\text{cm}^{-1}/\text{atm}$	E cm^{-1}	n_{air}	δ_{air} $\text{cm}^{-1} \cdot \text{atm}^{-1}$	J'	J''
P(11)	3435.9643	5.75e^{-23}	113.2	0/0116	0.114	5375.48	0.5	-0.023	10	11
P(10)	3489.5591	4.33e^{-22}	114	0.0092	0.073	2236.135	0.5	-0.023	9	10
P(9)	3542.1586	2.68e^{-20}	114.6	0.0103	0.088	1833.322	0.5	-0.0231	8	9
P(8)	3593.7055	1.35e^{-20}	115.2	0.0116	0.114	1469.371	0.5	-0.0216	7	8
P(7)	3644.1424	5.56e^{-20}	115.8	0.0145	0.16	1144.725	0.4	-0.0192	6	7
P(6)	3693.4125	1.84e^{-19}	116.4	0.0204	0.229	859.7812	0.36	-0.0153	5	6

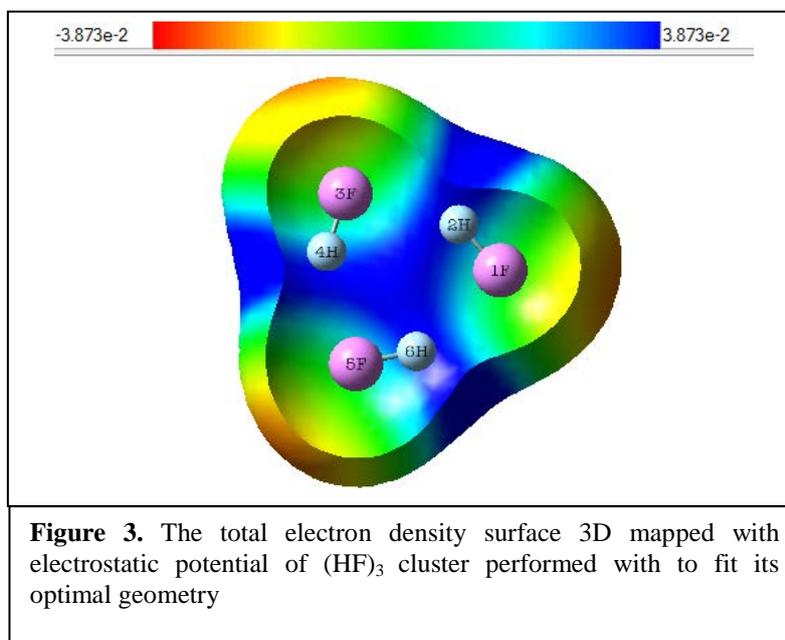
P(5)	3741.4594	4.87 e^{-19}	117.5	0.031	0.367	614.8884	0.22	-0.0109	4	5
P(4)	3788.2273	1.02 e^{-18}	119.5	0.0502	0.542	410,3479	0.5	-0.0092	3	4
P(3)	3833.2601	1.63 e^{-18}	123.7	0.0727	0.705	246.4118	0.44	-0.0098	2	3
P(2)	3877.7071	1.90 e^{-18}	135.2	0.0897	0.73	123.2821	0.58	-0.0073	1	2
P(1)	3920.3115	1.36 e^{-18}	199.1	0.1028	0.657	41.111	0.6	-0.0085	0	1

	ν cm^{-1}	S $\text{cm}^{-1}/(\text{molec}$ $\text{cm}^{-2})$	A s^{-1}	γ_{air} $\text{cm}^{-1}/\text{atm}$	γ_{self} $\text{cm}^{-1}/\text{atm}$	E cm^{-1}	n_{air}	δ_{air} $\text{cm}^{-1} \cdot \text{atm}^{-1}$	J'	J''
R(1)	4038.9621	2.38 e^{-18}	74.1	0.0895	0.664	41.111	0.51	-0.0023	2	1
R(2)	4075.2932	2.29 e^{-18}	77.1	0.0705	0.653	123.2811	0.49	-0.0063	3	2
R(3)	4109.9360	$1,59 \text{ e}^{-18}$	77.43	0,0505	0.532	246.4118	0.55	-0.0167	4	3
R(4)	4142.8457	8.53 e^{-19}	76.46	0.0342	0.378	410.3479	0.43	-0.0240	5	4
R(5)	4173.9794	3.59 e^{-19}	74.73	0.023	0.244	614.8884	0.65	-0.0270	6	5
R(6)	4203.2958	1.21 e^{-19}	72.5	0.0168	0.16	859.7812	1.0	-0.0279	7	6
R(7)	4230.7557	3.26 e^{-20}	69.93	0.0139	0.118	1144.7253	0.85	-0.0285	8	7
R(8)	4256.3222	7.12 e^{-21}	67.09	0.012	0.089	1469.3714	0.5	-0.0288	9	8
R(9)	4279.9601	1.27 e^{-21}	64.05	0.0112	0.073	1833.3225	0.5	-0.0290	10	9
R(10)	4301.6366	1.84 e^{-22}	60.86	0.0107	0.063	2236.1346	0.5	-0.0	11	10
R(11)	4321.3210	2.21 e^{-23}	57.56	0.0104	0.057	2677.318	0.5	-0.029	12	11
R(12)	4338.5039	2.16 e^{-24}	54.18	0.0103	0.053	3156.3393	0.5	-0.029	13	12
R(13)	4354.6031	1.75 e^{-25}	50.74	0.0102	0.051	3672.62	0.5	-0.029	14	13
R(14)	4368.1510	1.18 e^{-26}	47.3	0.0102	0.051	4225.54	0.5	-0.029	15	14



(In the table: (ν)-the line frequency, (S)-line intensity, (A)-Einstein coefficient, (γ_{air})-air broadened half width, (γ_{self})-self broadened half width, (E)-vibration-rotation lower state energy, (n_{air})-temperature coefficient, (δ_{air})-air pressure-induced line shift and J' and J'', lower and upper rotational states, respectively)

Fig. 2 shows the optimized geometrical nuclear configuration of $(\text{HF})_3$ cluster calculated in mp2=full/6-311++g(3df,3pd) levels of theory. In this optimal geometrical configuration of isolated $(\text{HF})_3$ complex formed a stable cyclic shape. The each HF molecule in the $(\text{HF})_3$ cluster associated one another through three "Hydrogen bond bridges" as $R_1(\text{H}_2-\text{F}_3)=1.71369\text{\AA}$, $R_2(\text{H}_4-\text{F}_5)=1.68896\text{\AA}$, $R_3(\text{H}_6-\text{F}_1)=1.69856\text{\AA}$, respectively. The evaluated HB lengths were coincided with calculated in the literature [13].



The electrostatic potential surface shows the charge distribution of $(\text{HF})_3$ molecule three dimensionally (Figure 3.). The mutual interactions of molecules in the HF cluster can be explained by these distributions. Especially, it can be used to determine the nature of hydrogen bond. The color code of this map is in the range between -3.873×10^{-2} (red) and 3.873×10^{-2} (blue) in the $(\text{HF})_3$ cluster.

4. Conclusions

We can conclude that the FTIR spectrum of hydrogen fluoride in gas phase and its line parameters are in good agreement with reliable literatures. The quantum mechanical calculations based on our suggestions give a chance better understanding of the nature of HB between HF molecules in gas phase. Also, we concluded as following:

1. The line to line parameters of the hydrogen fluoride have been determined by using its high resolution vibration-rotation absorption spectrum in gas phase.
2. Optimization geometry and total electron density surface on 3D mapped with electrostatic potential for $(\text{HF})_3$ were performed by quantum mechanical methods.
3. Obtained results can be used in the range of $\nu(\text{HF})$ stretching bands of HF contained molecular complexes in gas phase.
4. The results of this work help to better understand the nature of HB in gas phase and a good model can be proposed.

Acknowledgements

We would like to thank professor K.G.Tokhadze for facilities and helpful discussions at Saint-Petersburg State University, Faculty of Physics, Russian Federation

References

1. B. J. Howard., Thomas R. Dyke., W. Klemperer // Journal of chemical physics. 1984. V. 81, P.5417
2. V. P. Bulychev, M. V. Buturlimova, and K. G. Tokhadzea // The Journal of Chemical Physics, 2018. V 149, P.104306
3. J.F. Ogilvie, The vibrational and rotational spectrometry of diatomic molecules. 1998. ISBN 0-12-524420-7
4. Journal of quantitative spectroscopy & radiative transfer. 2013. V.130 P. 4–50
5. M. O. Bulanin , V. Domanskayam at all. Molecular physics. V. 223, January 2004, P. 67-72
6. M.O. Bulanin, A.V. Domanskaya, and K. Kerl, J. Mol. Spectroscopy. 2003. V.218, P. 75-79
7. M.O. Bulanin, A.V. Domanskaya, at all, J. Mol. Spectrosc. 2004. V.223, P. 67.
8. M.O. Bulanin, A.V. Domanskaya, at all, J. Mol. Spectrosc. 2005. V.230, P.87.
9. Luis Rincón, Rafael Almeida at all. J. Chem. Phys. 2001. V.114, P.5552-5561
10. Christian Buth and Beate Paulus, Phys. Review. 2006, V.74, 045122

11. Christian Buth and Beate Paulus, Chemical Physics Letters. 2004.V.398 , P.44–49.
12. V.P. Bulychev, K.G. Tokhadze. Vibrational Spectroscopy. 2014. V.73, P. 1–9
13. A. Amonov, G. Murodov, K.G. Tokhadze et al. Ukr. J. Phys. 2020. V. 65, P. 304-309
14. M. J. Frisch, G. W. Trucks, H. B. Schlegel, G. E. Scuseria, M. A. Robb, J. R. Cheeseman, G. Scalmani, V. Barone, B. Mennucci, G. A. Petersson, H. Nakatsuji, M. Caricato, X. Li, H. P. Hratchian, A. F. Izmaylov, J. Bloino, G. Zheng, J. L. Sonnenberg, M. Hada, M. Ehara, K. Toyota, R. Fukuda, J. Hasegawa, M. Ishida, T. Nakajima, Y. Honda, O. Kitao, H. Nakai, T. Vreven, J. A. Montgomery, Jr., J. E. Peralta, F. Ogliaro, M. Bearpark, J. J. Heyd, E. Brothers, K. N. Kudin, V. N. Staroverov, R. Kobayashi, J. Normand, K. Raghavachari, A. Rendell, J. C. Burant, S. S. Iyengar, J. Tomasi, M. Cossi, N. Rega, J. M. Millam, M. Klene, J. E. Knox, J. B. Cross, V. Bakken, C. Adamo, J. Jaramillo, R. Gomperts, R. E. Stratmann, O. Yazyev, A. J. Austin, R. Cammi, C. Pomelli, J. W. Ochterski, R. L. Martin, K. Morokuma, V. G. Zakrzewski, G. A. Voth, P. Salvador, J. J. Dannenberg, S. Dapprich, A. D. Daniels, O. Farkas, J. B. Foresman, J. V. Ortiz, J. Cioslowski, and D. J. Fox, Gaussian, Inc., Wallingford CT, 2009.

УДК:621.039.573

Радионуклид ${}^7\text{Be}$ в сухих летне-осенних атмосферных выпадениях 2019 года в г.Самарканде

Н.Н.Базарбаев¹, Л.Т.Нурмуродов², У.К.Сафаев², И.Ф.Химматов²

¹НИИ Физики полупроводников и микроэлектроники НУУЗ им. М. Улугбека, Ташкент

²Самаркандской государственной Университет

Аннотация: Гамма-спектрометрическим методом исследованы активности космогенного радионуклида ${}^7\text{Be}$ в летне-осенних атмосферных выпадениях 2019 года в Самарканде. Результаты измерений сопоставлены с данными 2017 и 2018 года.

Ключевые слова: радионуклид, гамма-спектр, атмосферные осадки, активность.

2019 йилда Самарканд атмосферасида ёзги ва кузги куруқ ҳаво таркибидаги ${}^7\text{Be}$ микдори

Аннотация: 2019 йилда Самаркандда ёзги-кузги куруқ тушувлар ${}^7\text{Be}$ радионуклидининг гамма-спектрометриқ усулида тадқиқот қилинди. Ўлчовлар натижалари 2017 ва 2018 натижалар билан солиштрилди.

Kalit soʻzlar: radionuklid, gamma-spektr, atmosfera tushumlari, aktivlik.

${}^7\text{Be}$ radionuclide in dry summer-autumn atmospheric precipitation 2019 in Samarkand

Abstract: In spring 2019, the study of the gamma-spectrometric method of dry and radical dry ${}^7\text{Be}$ radionuclide was conducted in Samarkand. The results of the measurements were compared with the 2017 and 2018 results.

Keywords: radionuclide gamma-spectrum, atmospheric fallouts, activity.

Введение

Природная радиоактивность Земли, помимо первичных естественных (ЕРН) и техногенных (ТРН) радионуклидов, обусловлена космогенными радионуклидами (КРН). Образующихся в верхних слоях атмосферы в реакциях расщепления ядер атомов воздуха (азота, кислорода, аргона и др.) высокоэнергетической составляющей космического излучения. Образовавшиеся в верхних слоях атмосферы, ионы КРН сорбируются каплями влаги и пылинками и в результате атмосферных обменных процессов переносятся в приземные слои воздуха, откуда, вместе с мокрыми и сухими осадками, выпадают на поверхность Земли. Наиболее значимым среди них является ${}^7\text{Be}$ ($T_{1/2} = 53.3$ дня), распад которого сопровождается гамма-излучением $E_{\gamma} = 478$ кэВ.

Активности ${}^7\text{Be}$ в атмосферных выпадениях зависят от Солнечной активности, широты местности, интенсивности обменных процессов между верхними и приземными слоями атмосферы, интенсивностей мокрых выпадений и степени запыленности воздуха (см. например [1]).

Отметим, что интерференция всех этих факторов, осложняет выявление роли отдельных факторов на выпадения ${}^7\text{Be}$ и требует систематических, долговременных исследований.

Исследования активности ${}^7\text{Be}$ в атмосферных выпадениях проводятся с начала 50-х годов прошлого столетия в целом ряде стран мира. Привычна доминирующая роль мокрых выпадений. Что касается сухих выпадений, то информация о их роли отсутствует.

Это обстоятельства и обуславливают интерес к исследованиям активности ${}^7\text{Be}$ в сухих атмосферных выпадениях. В настоящей работе гамма-спектрометрическим методом исследованы активности ${}^7\text{Be}$ в и летне-осенних 2019 года сухих атмосферных выпадениях в Самарканде.

Материалы и методы

Отбор проб ежемесячных атмосферных выпадений осуществлялся экспозицией на крыше двухэтажного корпуса ускорителя НУУз им. М.Улугбека ($N - 41^{\circ}18', E - 69^{\circ}16'$, высота – $H = 406$ м над уровнем моря (н.у.м.)) кюветы площадью $1 \times 1 \text{ м}^2$ и высотой стенок $0,10$ м, застиланной марлей, смоченной 100 г глицеринового масла (методика “липкого” планшета). Кювета соединялась с канистрой куда стекали дождевые и талые воды. После завершения экспозиции марля вынималась из кюветы, вода из канистры сливалась в сосуд и, не доводя до кипения, выпаривалась до сухого остатка. Кювета и сосуд протирались чистой марлей. Экспонированная и протирачная марли доводились до воздушно-сухого состояния и упаковывались в однолитровый сосуд Маринелли. Одновременно, из такого же количества чистой марли изготавливалась инертная проба.

Отбор проб летне-осенних выпадений осуществлялся протиркой влажной марлей участка крыши площадью 50 м^2 . После чего, марля высушивалась и упаковывалась в однолитровый сосуд Маринелли. При этом масса отобранной пыли составляла 140 г (устанавливаемая взвешиванием марли до протирки и после её просушивания). Из такого же количества чистой марли изготавливалась инертная проба. Г-спектр которой соответствует соответствующей фону в спектре исследуемой проба.

Гамма-спектры проб измерялись на спектрометре с сцинтиляционным детектором NaJ(Tl) , $\varnothing 63 \times 63$ мм, энергетическая разрешения 10% на линии 1332 кэВ ${}^{60}\text{Co}$, длительность измерений составляла $t = 6$ часов.

Минимально детектируемые активности ${}^7\text{Be}$, ${}^{232}\text{Th}$, ${}^{226}\text{Ra} - A_{\min} = 5 \text{ Бк/м}^2$, ${}^{40}\text{K} - A_{\min} = 20 \text{ Бк/м}^2$.

Относительные ошибки в значениях активностей радионуклидов, в зависимости от их величин, $\delta = 10-50\%$.

Активности выпадений КРН ${}^7\text{Be}$ определялась по площади пика полного поглощения (ППП) линии γ 478 кэВ ${}^7\text{Be}$ очищенном от фоновой составляющей, соответствующей спектру инертной пробы в спектре исследованной пробы, а выпадающих ЕРН - по площадь ППП аналитических линий соответствующих радионуклидов:

$$A = \frac{N_{\gamma}}{\alpha_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} t} \quad (1)$$

где A – активность, N_{γ} – площадь ППП, $\alpha_{\gamma} \varepsilon_{\gamma}$ – квантовый выход и эффективность регистрации анализируемого излучения, t – длительность измерений.

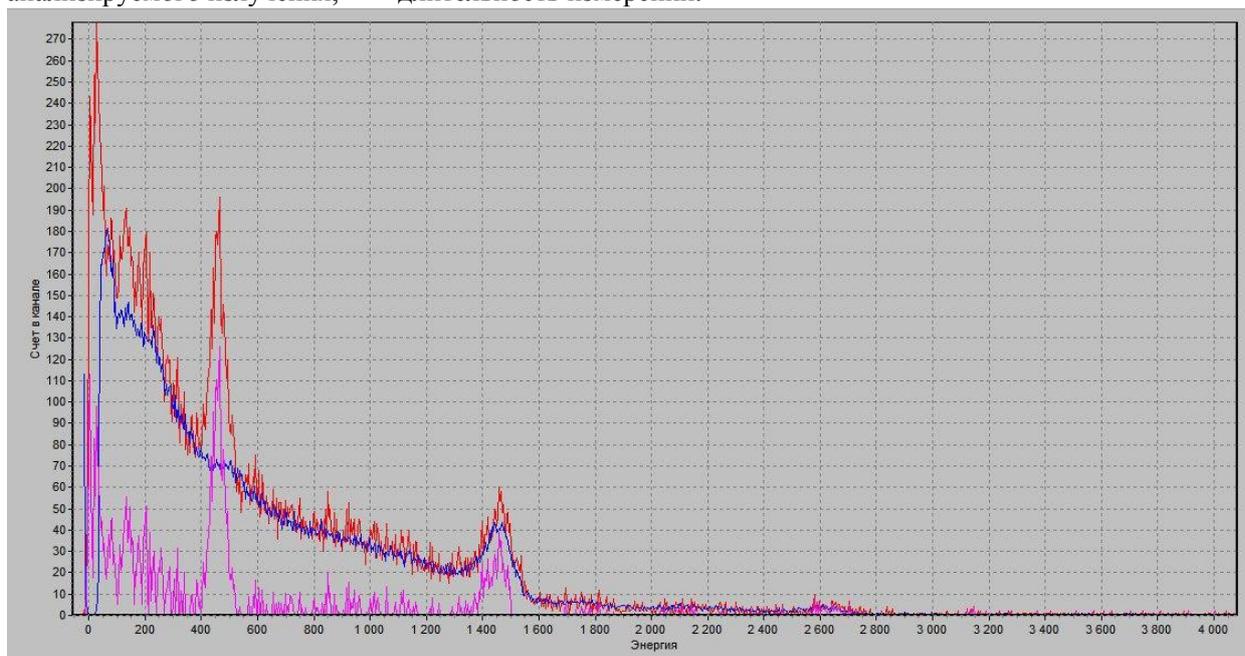


Рис.1 Спектры выпадений КРН ${}^7\text{Be}$ в исследуемых (верхний) и инертно (нижний) пробах.

Результаты

Суммарное годовое значение активности ${}^7\text{Be}$ в 2018 году в Ташкенте – 1060 Бк/м² сопоставимо с минимальными значениями этой величины в 2002-2014 гг. $A_{\Sigma}1024 - 1659 \text{ Бк/м}^2$ [2].

Активности радионуклидов в летне-осенних сухих атмосферных выпадениях 2019 года в Ташкенте определены для КРН ${}^7\text{Be} - A_{\text{Be}} = 5.04 \text{ Бк/м}^2$, ЕРН ${}^{40}\text{K} - A_{\text{K}} = 1,8 \text{ Бк/м}^2$, ЕРН- ${}^{232}\text{Th}$ и ${}^{226}\text{Ra} - A_{\text{ThRa}} = 0.1 \text{ Бк/м}^2$. Эти величины сопоставлены с данными 2017 и 2018 гг. $A_{\text{Be}} = 2.7 - 3.1 \text{ Бк/м}^2$, $A_{\text{K}} = 1.3 - 2.7 \text{ Бк/м}^2$, $A_{\text{Th}} = 0.1 - 0.11 \text{ Бк/м}^2$ и $A_{\text{Ra}} = 0.1 - 0.2 \text{ Бк/м}^2$ [6].

Результаты и их обсуждение

Установленные значения активности КРН, Be-7, ЕРН, Ra-226, Th-232 и K-40 в впадений 2019 года приведены в таблице 1. Там же приведены соответствующие данные 2017 и 2018 годы [2].

Таблица 1.

Активности КРН, Be-7, ЕРН, Ra-226, Th-232 и K-40 в сухих атмосферных выпадениях 2017, 2018 и 2019 годов в Самарканде

Год	А, Бк/м ²			
	${}^{226}\text{Ra}$	${}^{232}\text{Th}$	${}^{40}\text{K}$	${}^7\text{Be}$
2017	0,82	0,56	2,0	1,5
2018	0,37	0,33	5,0	0,46
2019	<0,1	<0,1	3,2	3,0

Сопоставление этих данных свидетельствует о сильных флуктуациях активности радионуклидов в сухих выпадениях в рассматриваемых годах. Для ${}^{226}\text{Ra}$ они составляют от <0,1 до 0,8 для ${}^{232}\text{Th}$ от <0,1 до 0,56, ${}^{40}\text{K}$ от 2,0 до 5,0 и для ${}^7\text{Be}$ от 0,46 до 3,0 Бк/м². Эти данные были пересчитаны на содержащие радионуклидов на единицу массы пыли. Как $A_{\text{Ra}} \leq 5,6$, $A_{\text{Th}} \leq 3,9$, $A_{\text{K}} \leq 14-35$ и $A_{\text{Be}} = 2,9-21,0 \text{ Бк/кг}$

В пробах отобранных на крыше здания аккумулирована лишь незначительная часть выпавших сухих осадков, исследование радиоактивности которых позволяет оценить относительны вклады КРН ${}^7\text{Be}$ и ЕРН. Ra^{226} , Th^{232} и K^{40} в различных годах.

КРН ${}^7\text{Be}$ выпадает с космической пылью постоянно, а ЕРН выпадает с почвенной пылью, поднимающейся в воздух только в ветреную погоду. Эти обстоятельства обуславливают доминирующий вклад КРН ${}^7\text{Be}$ в сухих выпадениях. Относительные вклады ЕРН в радиоактивность сухих выпадений соответствуют их содержаниям в почвах: $A_{\text{Th}} = 50 - 60 \text{ Бк/м}^2$, $A_{\text{Ra}} = 30 - 40 \text{ Бк/м}^2$, $A_{\text{K}} = 400 - 800 \text{ Бк/м}^2$

Заключение

Выполненное исследование позволило оценить вклады сухих атмосферных выпадений в активности выпадающих радионуклидов. 2017-2018 годах в Самарканде.

Литература

1. A.N.Azimov, N.N.Bazarbaev, A.Kh.Inoyatov, I.T.Muminov, A.K.Mukhamedov, H.S.Omonov, D.Sh.Rashidova, A.A.Safarov, I.Kh.Kholbaev, Sh.Kh.Eshkobilov. Atmospheric precipitation of ${}^7\text{Be}$ in 2009-2014 in Tashkent and Samarkand. // Atomic Energy, vol. 123, issue 1 (July), 2017, p. 53-56.
2. Г.У.Атажанова, С.Махмудов, И.Т.Мунинов, Т.М.Мунинов, А.К.Мухамедов, Б.Х.Ниёзов, Л.Т.Нурмуродов, А.А.Сафаров, А.Т.Худойбердиев Радионуклиды в сухих атмосферных выпадениях 2017 г. В Ташкенте, Самарканде и Карши // Научный вестник СамГУ. 2018г. №3. 66-68.
3. С.Махмудов, И.Т.Мунинов, Т.М.Мунинов, А.К.Мухамедов, Б.Х.Ниёзов, Л.Т.Нурмуродов, А.А.Сафаров, А.Т.Худойбердиев, С.К.Юлдошев // Радионуклиды в сухих атмосферных выпадениях 2018 г. В Ташкенте, Самарканде и Карши // Научный вестник СамГУ 2019 г. №1. 75-77.

UDC:

DETERMINATION OF THE PHYSICAL PARAMETERS OF SELECTED BINARY STARS

Sh.Egamberdiev¹, J.To'rayev²¹National University of Uzbekistan,²Samarqand State University

Abstract. In this study, the results of observation and photometric analysis of alternating binary stars are presented. In the course of the study, the WUMa-type eclipsing – variable binary star was selected and the photometric light curve was drawn on the basis of its photometric analysis and the period of its change was determined. The physical parameters were compared with the results of previous investigations.

Keywords: aperture, photometry, telescop, binary stars.

Определение физических параметров выбранной затменно – переменной звезды

Аннотация. В данной работе представлены результаты наблюдений и фотометрического анализа затменно – переменной двойной звезды. В ходе исследований в созвездии Большой Медведицы, была выбрана звезда-близнец W-типа и была построена кривая яркости на основе результатов фотометрического анализа изменения ее яркости, и был определен период ее изменения. Наенденные нами физические параметры сравнивались с ранее результатами.

Ключевые слова: апертура, фотометрия, телескоп, двойной звезды.

Tanlangan to'siluvchan qo'shaloq yulduzning fizik parametrlarni aniqlash

Anatatsiya. Ushbu ishda to'siluvchan qo'shaloq yulduzni kuzatish va fotometrik tahlil qilish natijalari keltirilgan. Tadqiqotda Katta Ayiq yulduz turkumining W si tipidagi to'siluvchan-qo'shaloq yulduz tanlanib, uning yorqinligi o'zgarishini fotometrik tahlil natijalari asosida ravshanlik egri chizig'i chizildi va uning o'zgarish davri aniqlandi. Aniqlangan fizik parametrlari oldin o'rganilgan natijalar bilan solishtirildi.

Kalit so'zlar: apertura, fotometriya, teleskop, qo'shaloq yulduz.

Binary stars - two closely related stars that are rotating around the elliptical orbit around the general center of the mass of components under the influence of gravitational force are defined as physical system, whose components are dynamically connected. Binary stars are divided into several types: visual, spectroscopic, eclipsing, “exotic” and other types. Eclipsing binary stars are outstanding as their rapid changes in the periodicity and they can be studied on small telescopes. One type of eclipsing binary stars (EBS) is W-type stars in the Great Bear constellation (W-Uma) [1, 4].

Eclipsing variable binary stars in the Great Bear W-type constellation were first discovered in 1900 by G.Muller and P. Kemps who were observing a relatively unusual period in the star called BD +56:24:00 at $\alpha= 09:36:44$ and $\delta= 56:24:06$. From 1899 to 1903, they analyzed a total of 30 days' observation data and found that the overall brightness of this binary system varies in 0.75m. As a result of the study, “Conclusions have been drawn from the findings of our observation that the main reason for this change is that the two celestial bodies rotate around one another and the geometrical dimensions and brightness of both objects are almost equal” they concluded. As the overall luminosity of the system changes periodically without any breaks and the period of variability is very short, they come to hypothesis that it is a different binary system from the EBS in Algal {Algal tipi} type. [5]

U.C. Adams and A. J. Jay published the article on the parameters of this star type and named it W UMa in 1919. In 1941, G. Cooper estimated that such stars were interconnected. In 1955, Z. Kopal came up with this idea. In 2001, R. E. Wilson used his term "contact" to refer to the W Uma-type star in his article “Binary Star Morphology and the Name Overcontact”. Because of the in-depth study of the W Uma-type EBS and the increase in the dataset, more complex processes in their physics were determined [2].

Such types of EBS are being explored by observations at the Samarkand Astronomical Scientific Educational Observatory. In 2004, the quality of the atmosphere at the Samarkand astronomical scientific and educational observatory was studied under the leadership of Y.Tillayev, a senior researcher of the Astronomical Institute of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, and telescope was built by the Astronomical Institute of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan in 2006 [7]. The diameter of the telescope mirror is 480 mm, the focal length is 9540 mm, the relative slopes are 1:20, and is built in the Cassegrain system. Currently, the Telescope has a 683 ws Brand Charger Connector (BCC)

Quantum Scientific Imaging (QSI). BCC pixel size is $5.4 \times 5.4 \text{ mm}^2$, scanning area is 5.5×5.5 arch minutes, light filter system is Johnson-Sousin UBVRI (U - ultraviolet, B - blue, V - green, R - red, I infrared) [7].

Based on our telescope capability, we chose V857 Binary Star and observed the whole night on the 25th, 27th, 29th of June and 2nd, 3rd of July, 2018 (total 5 nights). The images were taken in the B, W, R and I filters at the time of 60s. During the 5 nights, 1148 images were taken, of which 285 images were taken in R filters, 296 images in I filter, 274 images in B filter and 293 images in V filter. The total time of observation is 19 hours 8 minutes.

Astrological images have been redefined primarily by the Image Reduction Analyses Facility (IRAF) with bias, dark, and flat images. Using Aperture Photometry Pascal (APPHOT) and Digital Photometric Reduction Package (DIGIPHOT), [6], aperture photometry completed:

$$S_{\text{image}} = \frac{(R_{\text{image}} - D_{\text{image}}) - E_{\text{image}}}{F_{\text{image}} - E_{\text{image}}} \quad (1)$$

The parameters of selected stars are listed in the table below.

Table 1.

Name	$\alpha_{2000.0}$	$\delta_{2000.0}$	V mag	Type
V857 Her	16 46 53.6	38 38 58.0	10.9÷11.5	W UMa
Comparison	16 46 28.5	38 36 55.9		
Checked star	16 46 41.5	38 39 01.5		

The results of the Aperture photometry (stated in the appendix) show the maximum point and minimum point of the star magnitude on Julian dates in Table 2.

Table 2.

№	Julian dates 2458000+	Min II max I	Filter	Δm	№	Julian dates 2458000+	MinII max I	Filter	Δm
1	302,250	II	R	2.075	15	295.399	II	V	2.1984
2	302,350	I	R	1.843	16	303.249	II	V	2.261
3	303,307	I	R	1.784	17	302.253	I	V	1.999
4	303,400	II	R	2.081	18	303.404	II	V	2.2414
5	303,379	II	R	2.05	19	297.285	II	V	2.266
6	297,282	II	R	2.094	20	297.392	I	V	2.002
7	297,381	I	R	1.836	21	299.301	I	V	1.9812
8	302,251	II	I	1.9314	22	302,252	II	B	2.6106
9	302,351	I	I	1.6768	23	302,352	I	B	2.351
10	303,401	II	I	1.9436	24	303,397	II	B	2.599
11	295,400	II	I	1.8694	25	295,369	II	B	2.628
12	297,283	II	I	1.9618	26	297,280	II	B	2.5992
13	299,291	I	I	1.6924	27	297,378	I	B	2.353
14	299,291	I	I	1.6924	28	299,292	I	B	2.3248

Clarity change through time the O-C diagram for all filters was created using the maximum and minimum points. The diagram shows change in the brightening phase. According to the diagram, the period was calculated to $P=0^d.38223523$ with 0.02% error. Its ephemerid was found out:

$$M_{\text{min}}=2458295.3723+0.38223523 \cdot E \quad (2).$$

The orbit elements of an eclipsing binary system are determined by the light curve line. To draw the light curve line, it is necessary to calculate the phase of the light curve line. To set the light curve line of the star, we estimated the phases of observations by the following formula:

$$\phi_i = \frac{M_i - M_0}{P} - E_i \quad (3)$$

where M_i – observation moment of the star (this is indicated in Julian dates), M_0 – is the starting epoch, that is, the middle of the mainly determined minimum time, E - the entire size of the epochs passing through the starting minimum. We have drawn the light curve line by the calculated phase and by changing the magnitude of the star (Figure 1).

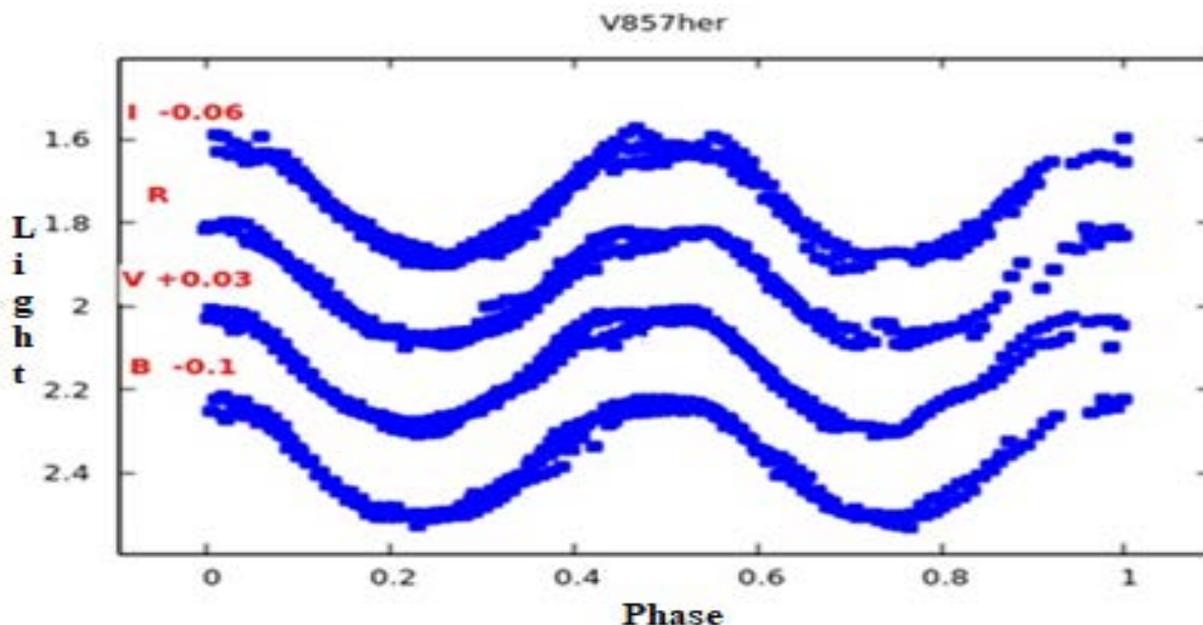


Figure 1. The light curve line of V857 Her binary star

The model of V857 Her binary star was created on the base of the light curve line on the “Wilson-Devinsky code” program [3] (Figure 2).

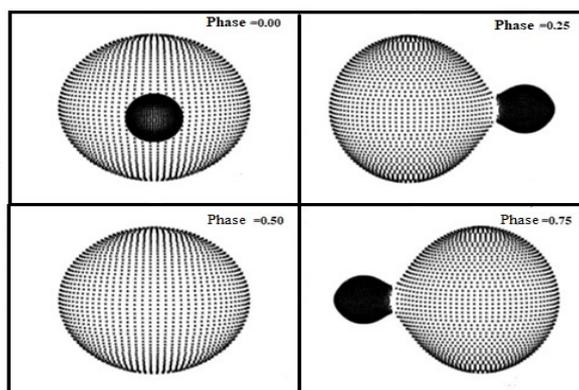


Figure 2. The model of V857 Her binary star

Photometric parameters determined by the model are listed in the table 3.

Table 3

№	Parameters	Value	№	Parameters	Value
1	$\Gamma_1 = \Gamma_2$	1.0	12	$L_1 / (L_1 + L_2)$ Б)	0.8992
2	$A_1 = A_2$	1.0	13	$L_1 / (L_1 + L_2)$ В)	0.9028
3	$x_{1R} = x_{2R}$	0.633	14	$L_1 / (L_1 + L_2)$ Р)	0.9045
4	$x_{1V} = x_{1V}$	0.581	15	$\Omega_1 = \Omega_2$	1.8092
5	$x_{1R} = x_{1R}$	0.472	16	r_1 (pole)	0.5706
6	T_1 (K)	8300	17	r_1 (side)	0.6554
7	q	0.0653	18	r_1 (back)	0.6737
8	Ω_{in}	1.8452	19	r_2 (pole)	0.1824
9	Ω_{out}	1.8022	20	r_2 (side)	0.1920
10	T_2 (K)	8513±39	21	r_2 (back)	0.2571
11	i	85.43 ± 1.26	22	Highest contact rate f (%)	83.8

Thus, the magnitude of V857 Her binary star varies from 10^m to 11^m.5. According to the catalog of Xolopov (1982), its spectral class belongs to A6. The period of change in the light curve line of this binary

star is $P = 0^d.38223523$. Mass contact is very high and is 83.8%. The turn period of this binary star increases year by year. The change in the period was determined to be $dP / dt = + 3.1 * 10^{-7}$ days / year. High-performance results can be achieved by observing diameters of W UMa binary stars with the help of relatively small telescopes.

References

- 1.Lipunov B. M In the world of binary stars. M. [russian]
- 2.Betten A. Binary and multiple stars. M. 1976 [russian]
- 3.Qian S.B. Deep, low mass ratio overcontact binary systems. V. The lowest massratio binary V857 Herculis. 2005
- 4.Sattorov, Astrophysics Chapter 1 – T; “Ta’lim nashriyoti” 2009 – p. 284 [uzbek]
- 5.Cherepashuk A. M. Cramped binary stars. Chapter И. – М.:
- 6.Golay M. “Introduction to astronomical photometry” D.Riadell Publishing, 1974
- 7.Matekov A. M. Observation of binary stars and photometric analysis. Master’s dissertation work. Tashkent 2017 [uzbek]

УДК 535.361

МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ, СТРУКТУРНЫЕ И ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫЕ СВОЙСТВА МИКРОПОРОШКОВ ОКСИДА ЦИНКА

Рахматуллаев И.А.¹, Турсункулов О.М.², Семенов Д.И.³, Тукфатуллин О.Ф.¹,
Рахматуллаев М.Р.¹, Курбонов А.К.⁴, Сайдимов Я.А.¹

¹Научно-исследовательский институт физики полупроводников и микроэлектроники
Национального университета Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

²Центр передовых технологий при Министерстве инновационного
развития Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

³Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

⁴Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

ilyoss@rambler.ru

Аннотация. Методами фотолюминесценции и сканирующей электронной микроскопии исследованы морфологические, структурные и люминесцентные свойства микропорошков оксида цинка. На примере микропорошков оксида цинка показано, что для количественного неразрушающего контроля подобных объектов может быть эффективно использован метод фотолюминесцентного анализа.

Ключевые слова: оксид цинка, люминесценция, порошок, экситон, лазер, сканирующий электронный микроскоп, рентгеновский энергодисперсионный анализ.

Микрон ўлчамдаги рух оксиди кукунларининг морфологик, структурали и люминесцент хоссалари

Аннотация. Фотолюминесценция и сканирловчи электрон микроскоп усуллари ёрдамида микрон ўлчамдаги рух оксиди кукунларининг морфологик, структурали и люминесцент хоссалари ўрганилган. Микронли рух оксиди кукунлари мисолида мазкур турдаги объектларни бузмасдан таҳлил этишда фотолюминесценция усулини самарали қўллаш мумкинлиги кўрсатилган.

Калитли сўзлар: рух оксиди, люминесценция, кукун, экситон, лазер, сканирловчи электрон микроскоп, рентгенли энергодисперсион таҳлил.

Morphological, structural and luminescent properties of zinc oxide micropowders

Abstract. The morphological, structural, and luminescent properties of zinc oxide micropowders were studied by photoluminescence and scanning electron microscopy. Using zinc oxide micropowders as an example, it is shown that the method of photoluminescent analysis can be effectively used for quantitative non-destructive testing of such objects.

Keywords: zinc oxide, luminescence, powder, exciton, laser, scanning electron microscope, X-ray energy dispersive analysis.

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к широкозонным полупроводникам обусловлен такими их свойствами как термическая стабильность при высоких температурах, оптическая прозрачность, возможность получения интенсивной люминесценции в видимой области и т.д. [1]. Среди широкозонных полупроводников особое место занимает оксид цинка (ZnO). Большая ширина запрещенной зоны ZnO (3,37 эВ) и энергия связи экситона (0,06 эВ) позволяют получать интенсивное ультрафиолетовое излучение благодаря рекомбинации экситонов при комнатной температуре.

ZnO интересен в качестве материала, прозрачного для видимого излучения. Прозрачные проводящие оксиды (transparent conductive oxides, TCO) – материалы, которые находят все более широкое применение в энергосберегающих и фотоэлектрических технологиях, в производстве плоских дисплеев, прозрачных электродов и нагревательных элементов [1]. Все это говорит о большой перспективности использования оксида цинка в различных областях науки и техники, а, значит, требует дальнейшего изучения его свойств.

В данной работе исследуются морфологические, структурные и люминесцентные свойства микропорошков ZnO.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Излучение от активного элемента лазера на парах меди, работающего в режиме неустойчивого резонатора, фокусировалось длиннофокусной линзой в нелинейно-оптическом кристалле ВаВ₂О₄ [2]. Кристалл ВаВ₂О₄ был вырезан таким образом, чтобы условие синхронизма выполнялось для удвоения частоты исходного лазерного излучения с длиной волны 510,6 нм. Таким образом, на выходе кристалла ВаВ₂О₄ возникало ультрафиолетовое излучение с длиной волны 255,3 нм. Излучение лазера видимого диапазона устранялось с помощью абсорбционного фильтра, помещаемого сразу после нелинейно-оптического кристалла. Коэффициент преобразования видимого излучения в ультрафиолетовое был около 1%; полная средняя мощность генерации в двух линиях составляла 3 Вт; частота следования импульсов генерации-10 кГц, длительность импульса-20 нс. Ультрафиолетовое излучение направлялось на плоскопараллельную кювету с окошками из кварца марки КУ. Рассеянное излучение собиралось системой кварцевых линз на входной щели монохроматора МСД-2. Спектральный диапазон монохроматора составлял 200–800 нм, обратная линейная дисперсия – 4,6 нм/мм. Перед входной щелью монохроматора (схема «на отражение») устанавливались абсорбционные светофильтры типа ПС-11 или ОС-11 для подавления возбуждающего излучения. Излучение после монохроматора регистрировалось с помощью фотоумножителя ФЭУ-106, работающего в режиме счета фотонов. За счет отвода малой доли возбуждающего излучения в специальном блоке формировался строб-импульс длительностью 30 нс. Этот импульс вводился в систему регистрации для синхронизации с импульсом люминесценции. Строб-импульс позволял регистрировать спектры ФЛ при различных временах задержки 0-300 нс. Дифракционная решетка спектрометра поворачивалась с помощью шагового двигателя, управляемого с помощью компьютера. Время накопления сигнала при фиксированном положении дифракционной решетки изменялось в диапазоне 0,1-100 с в зависимости от интенсивности регистрируемого сигнала ФЛ. Информация от регистрирующего устройства подводилась к компьютеру и накапливалась в цифровом виде и выводилась на экран монитора компьютера. Анализируемый порошок микронного размера ($d_{cp} \sim 3$ мкм) помещался в кювету. ФЛ регистрировалась при комнатной температуре.

Морфология поверхности и исследование микроструктуры порошков диоксида титана осуществляли с помощью сканирующего электронного микроскопа SEM - EVO MA 10 (Carl Zeiss, Германия) составы порошков определялись с помощью энерго-дисперсионного элементного анализатора марки EDX (Oxford Instrument) – Aztec Energy Advanced X-act SDD. Эксперименты на сканирующем электронном микроскопе проводились следующим образом. Для проведения процесса пробоподготовки, на предметный столик микроскопа был установлен держатель из металлического сплава, поверх которой приклеена алюминиевая фольга с двухсторонней клеейкой поверхностью. На эту фольгу клеились исследуемые порошки, далее предметный столик был установлен рабочую камеру микроскопа, из которой была откачен воздух для создания вакуума.

Для проведения измерения на филамент подавалось ускоряющее напряжение 20 кВ. При этом рабочее расстояние (Working distance) составляло 8,5 мм. Изображения были получены в масштабе 2 мкм-100 мкм с помощью программного обеспечения SmartSEM.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Из рассмотрения СЭМ-изображений полученных порошков (рис. 1) можно видеть, что образцы представляют собой рыхлые образования в виде агломератов неправильной формы с поперечными размерами до 8 мкм с развитой поверхностью, пронизанные сквозными порами. Агломераты легко разрушаются при воздействии на них небольшим механическим усилием.

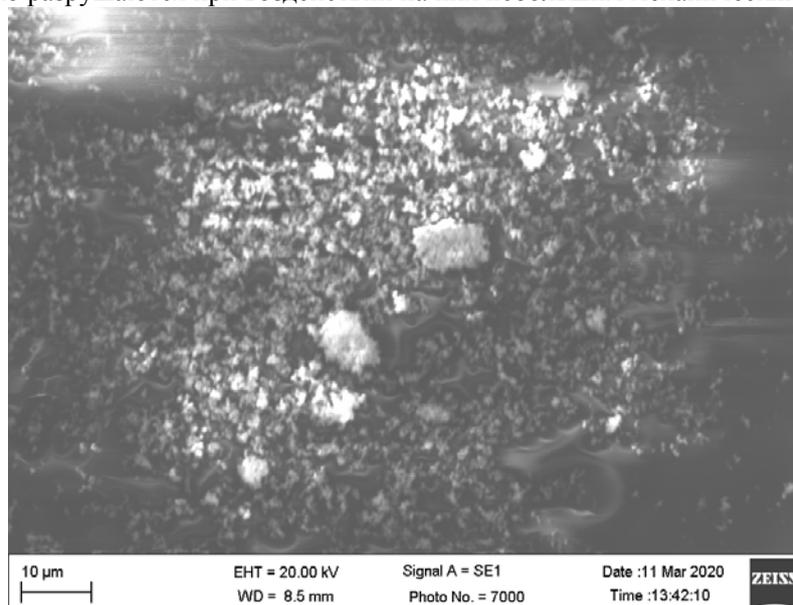


Рис. 1. СЭМ-изображение микропорошков ZnO

Следует отметить, что элементный анализ (рис. 2а и рис. 2б) показал, что образцы представляют собой химически чистые, белые порошки без каких-либо примесей. Данное обстоятельство позволяет провести комплексное исследование основываясь на результатах элементного анализа и результатах исследования люминесценции микропорошков оксида цинка при комнатной температуре. Экситонная люминесценция ZnO при комнатной температуре обычно наблюдается в диапазоне энергий 3,20–3,26 эВ, что определяется методами и условиями роста.

Рис. 3 иллюстрирует вид спектров однофотонно-возбуждаемой люминесценции микропорошков ZnO, полученный при их возбуждении второй оптической гармоникой (255,3 нм) сгенерированной лазером на парах меди (кривая 1). Для сравнения здесь же приведены спектры двухфотонно-возбуждаемой люминесценции (ДВЛ) микропорошков ZnO, полученные ранее нами в работе [3] при комнатной температуре (кривая 2). На вставке приведены данные, полученные в работе [4]: а) спектр ДВЛ эпитаксиальных слоев ZnO при $T = 300$ К, при возбуждении рубиновым лазером, б) спектр ДВЛ эпитаксиальных слоёв ZnO при температуре 80 К, при возбуждении рубиновым лазером.

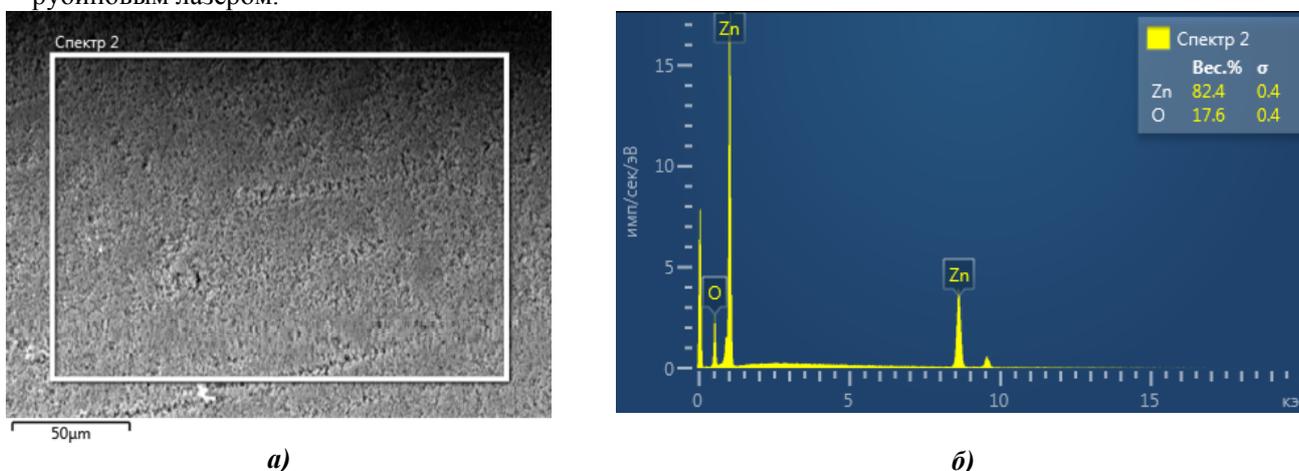


Рис. 2 СЭМ-изображение микропорошков ZnO (а) и их элементный состав (б).

Из рис. 3 видно, что наблюдаемый нами спектр резонансной люминесценции имеет максимум в области 387 нм. Этот пик соответствует положению 3L0 полосы из серий многофононной аннигиляции А-экситонов. Максимум спектра ДВЛ сдвинут в длинноволновую область на 3 нм по отношению к спектру однофотонно-возбуждаемой люминесценции и не отличается по форме.

Наблюдаемые отличия кривых, приведенных на рис. 3, могут быть связаны с присутствием различных примесей во втором образце (кривая 2): по данным спектрального анализа в порошке ZnO присутствовали следующие элементы в массовых долях: Fe – $8 \cdot 10^{-5}$; Mg – $6 \cdot 10^{-5}$; Si – $1 \cdot 10^{-3}$; Al – $5 \cdot 10^{-5}$ [3].

Из научной литературы известно [1, 5], что в низкотемпературных спектрах можно отчетливо различить фононные повторения линий свободных и связанных на примесях экситонов, обусловленные их рассеянием на LO-фононах. В данной работе экситонная люминесценция исследованных образцов обычно наблюдалась в диапазоне длин волн 387–390 нм, что согласуется с результатами, полученными в работах [1, 5].

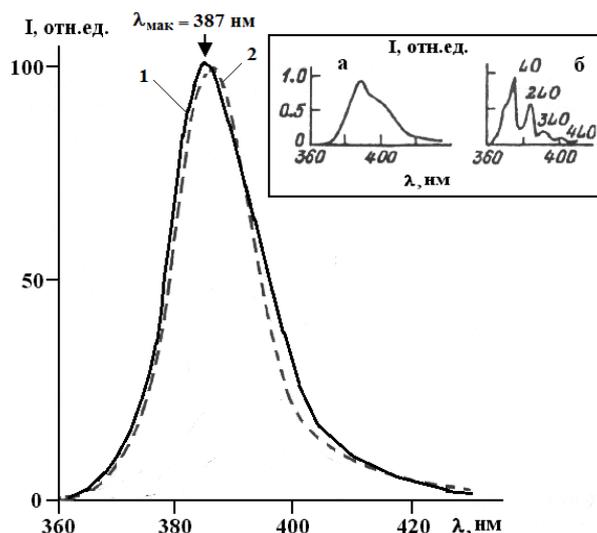


Рис. 3. Спектры однофотонно-возбуждаемой (кривая 1) и двухфотонно-возбуждаемой люминесценции (кривая 2) микропорошков ZnO, полученные при комнатной температуре [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведённое комплексное исследование позволило изучить структуру, получить элементный состав и исследовать спектры люминесценции микропорошков ZnO при комнатной температуре. На примере микропорошков оксида цинка показано, что для количественного неразрушающего контроля подобных объектов может быть эффективно использован метод фотолюминесцентного анализа. В дополнение можно отметить, что метод фотолюминесцентного анализа позволяет обеспечить дополнительной информацией с использованием малых навесок анализируемого вещества.

Рассмотренное комплексное исследование, на примере микропорошков ZnO, можно предложить в качестве методики, позволяющей изучать структуру, элементный состав и люминесцентные свойства порошков и жидкостей, в том числе содержащих посторонние компоненты в изучаемой среде.

Работа выполнена при поддержке Государственных научно-технических программ Республики Узбекистан (проекты ОТ-Ф2-39 и ПЗ-2017092438).

БЛАГОДАРНОСТИ

Выражаем благодарность научной физической лаборатории Центра передовых технологий при Министерстве инновационного развития Республики Узбекистан за предоставление оборудования для измерения.

Литература

1. Тарасов А.П. Люминесценция микроструктур оксида цинка и влияние на нее поверхностного плазменного резонанса и магнитного поля: Дисс. к-та физ.-мат. наук. — Москва: МФТИ (НИУ), 2019. — 125 с.
2. Горелик В.С., Рахматуллаев И.А. Спектральные и временные характеристики фотолюминесценции ультрадисперсных алмазов и алмазных плёнок при ультрафиолетовом лазерном возбуждении // Неорганические материалы. — 2004. — Т. 40. — № 7. — С. 1–5.
3. Рахматуллаев И.А. Вторичное излучение в конденсированных средах при импульсно-периодическом лазерном возбуждении: Дисс. д-ра физ.-мат. наук. — Ташкент: СамГУ–ФИАН, 2008. — 260 с.
4. Абдуев А.Х., Адуков А.Д., Атаев Б.М., Рабаданов Р.А., Шаихов Д.А. УФ люминесценция эпитаксиальных слоев окиси цинка при однофотонном и двухфотонном возбуждении // Квантовая электроника. — 1978. — Т. 5. — № 1. — С. 206–208.
5. Shan W., Walukiewicz W., Ager III J.W., Yu K.M. Nature of room-temperature photoluminescence in ZnO // Appl. Phys. Lett. — 2005. — V. 86. — P. 191911.

УДК:621.039.573

СЕЗОННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАДОНА (^{222}Rn) В МНОГОЭТАЖНЫХ ДОМАХ В НАВОИ И САМАРКАНДЕ

У.Ш Абдирахмонов¹, А.Р.Журакулов¹, И.О Урунов¹, У.К.Сафаев², У.У.Тухтаев²,
Э.А.Умирзаков²

¹Навайский государственный горный институт
²Самаркандский Государственный Университет

Аннотация. Наиболее значимый вклад в радиационное поле биосферы вносят три радиоактивных семейства: семейство урана (U^{238}), актиноурана (U^{235}) и тория (Th^{232}) и также продукты их распада (Ra^{226} , Rn^{222} , Pb^{214} , Bi^{214} , Po^{218} , Ac^{228} , Tl^{208} , и др.) В соответствии с величиной периода полураспада наибольший интерес в радиационно экологическом отношении представляют уран, торий радий, и радон с его долгоживущими дочерними продуктами.

Ключевые слова: радиоактивные изотопы, радиоактивность, активности, радона, α -распаде, эксхалация, диффузии, воздуха, влажности, градиенты, давления

NAVOI VA SAMARQANDDAGI KO'P QAVATLI UYLARDA RADONNING (^{222}Rn) MAVSUMIY TAQSIMOTI

Annotatsiya. Biosferaning radiatsiyon maydoniga asosan uchta radioaktiv oila eng muhim hissa qo'shadi: uran (U^{238}), aktinouran (U^{235}) va toriy (Th^{232}), shuningdek ularning parchalanish mahsulotlari (Ra^{226} , Rn^{222} , Pb^{214} , Bi^{214} , Po^{218} , Ac^{228} , Tl^{208} va boshqalar). Yarim yemirilish davriga ro'ra, uzoq yashovchi uran, toriy, radий, radon va ulardan hosil bo'luvchi hosilaviy radioaktiv mahsulotlarining radioekologik nisbati qiziqarli hisoblanadi.

Kalit so'zlar: radioaktiv izotoplar, radioaktivlik, aktivlik, radon, α -parchalanish, eslahatsiya, diffuziya, havo, namlik, gradyanlar, bosim.

SEASONAL DISTRIBUTION OF RADON (^{222}Rn) IN MULTI-STOREYED HOUSES IN NAVOI AND SAMARKAND

Abstract. Three radioactive families make the most significant contribution to the radiation field of the biosphere: the family of uranium (U^{238}), actinouran (U^{235}) and thorium (Th^{232}) and also their decay products (Ra^{226} , Rn^{222} , Pb^{214} , Bi^{214} , Po^{218} , Ac^{228} , Tl^{208} , etc.) In accordance with the magnitude of the half-life, the greatest interest in the radiation ecological respect is represented by uranium, thorium, radium, and radon with its long-lived daughter products.

Keywords: radioactive isotopes, radioactivity, activity, radon, α -decay, exhalation, diffusion, air, humidity, gradients, pressure.

Введение

Кроме того, в природе существуют радиоактивные изотопы элементов средней части периодической системы (K^{40} , Lu^{176} , Rb^{87} , In^{115} , La^{138} , и др.) Все естественные радиоактивные изотопы в естественном виде, в малом количестве распространены в образцах (воздух, вода, почва, горные породы, растения, и т.д.) внешней среды.

В природе встречается три изотопа в газообразном состоянии (радон, торон, актинон), они обладают α -активностью. Радон-222 (Rn^{222}) - член радиоактивного ряда U^{238} , образуется при α -распаде радия-226. Торон-220 –член радиоактивного ряда Th^{232} , образуется при α -распаде Ra^{224} . Радон и продукты его распада практически являются основным радиоактивным источником, формирующим естественную радиоактивность нижних слоев атмосферы. Вклад торон и его дочерних продуктов существенно меньше в связи с их короткими периодами полураспада. Уран широко распространен в природе. Основная его масса находится в рассеянном состоянии в адсорбированном виде минералах и почвах и в растворенном состоянии в воде океанов, морей, озер и рек. При распаде урана-238 образуется наиболее долгоживущий изотоп Ra^{226} ($T_{1/2} = 1620$ лет), а при его α -распаде образуется радон-222. 1г Ra^{226} в течение суток выделяет около 1мм^3 радона. Период полураспада радона $T_{1/2} = 3,8$ суток. И так, радон-222, образующейся в почвах, горных породах, минералах, водах и поступает в атмосферу. Концентрация радона в окружающей среде достаточно низка, за счет рассеивания в воздухе.

Из всех естественных источников радиации наиболее весомым является невидимый, не имеющий вкуса и запаха тяжелый газ (в 7,5 раза тяжелее воздуха) радон.

Радон и его изотопы растворимы в воде и других жидкостях. Коэффициент растворимости Rn для воды при 15°C колеблется 0,25 до 0,30. Коэффициент растворимости уменьшается с увеличением температуры $t^{\circ}\text{C}$ воды. При кипячении в радон полностью удаляется из воды. Радон способен мигрировать на значительные расстояния от материнского изотопа.

Содержание радона в воздухе жилых помещений, значительно выше, чем атмосферном. Это объясняется тем, что измеримые количества радиоактивных элементов благодаря состоянию широкого распространения содержатся и в строительных материалах (кирпиче, бетоне, дереве). Наименьшее радиоактивное загрязнение воздуха оказалось в деревянных домах и наибольшее – в домах, при постройке которых применяли бетоны, глины. Основную часть дозы облучения от радона человек получает, находясь в закрытом, непроветриваемом помещении.

Радон проникая в органы дыхания с вдыхаемым воздухом, растворяется в крови и тканевых жидкостях. Концентрация радона в крови определяется содержанием его в воздухе и не зависит от времени экспозиции, составляя для радона примерно 30% от концентрации во вдыхаемом воздухе. Проникая в так крови радон разносится по всем тканям, при этом все тело подвергается равномерному облучению α -частицами, которые обладают большой ионизирующей способностью. Действие альфа-излучения на внутренние органы является очень опасным, зачастую оно приводит к смертельным результатам.

В связи с выше изложенным, проблема облучения людей радоном сегодня остаётся актуальной. В данной работе исследуется эксхалация радона-222 из почвы в атмосферу в площадках некоторых жилых дворов Наваинской и Самаркандской областей. Опыты проведены следующим образом.

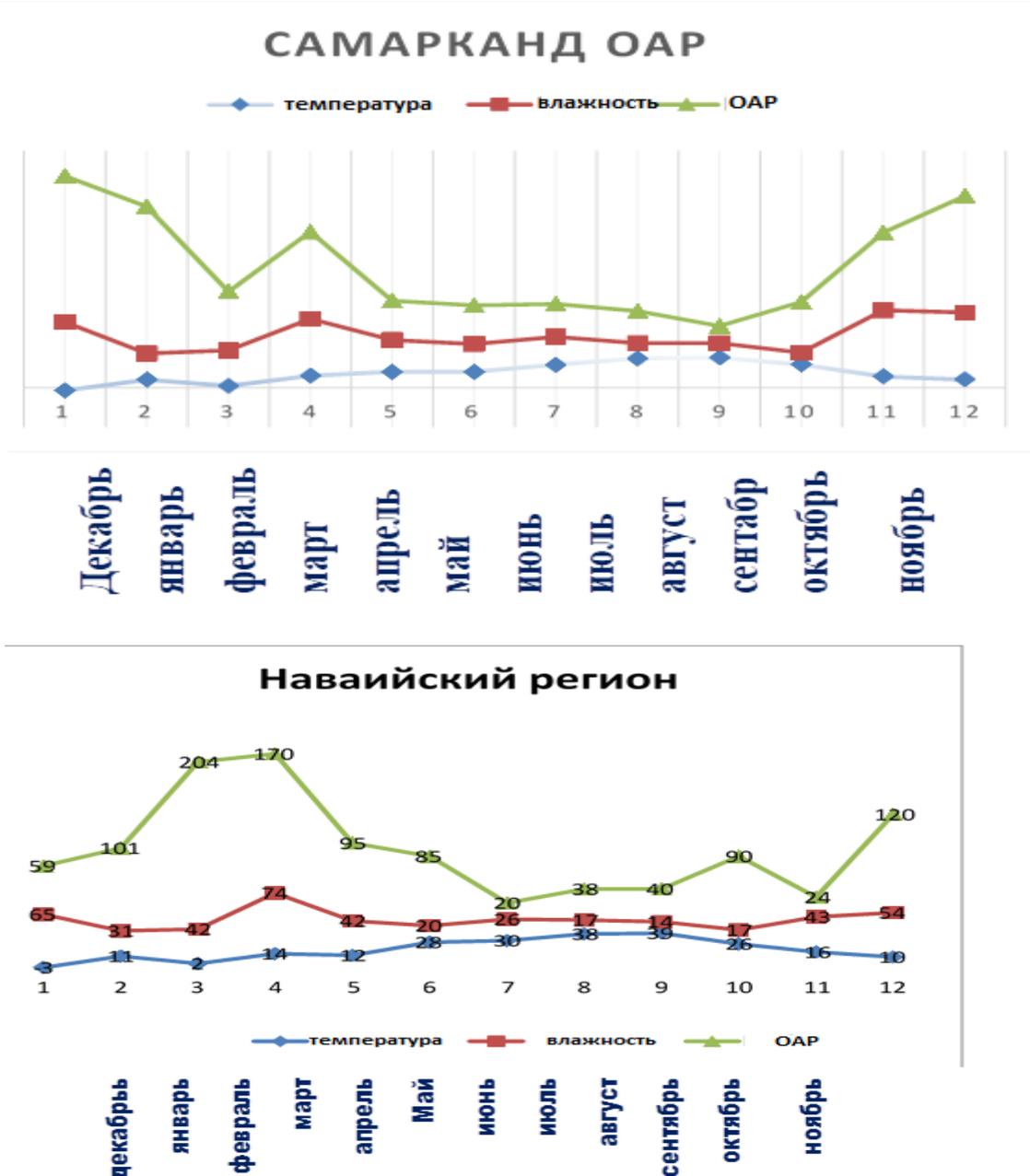


Нами была использованы уголь для определение содержание радона в воде как сорбент 100% ного поглощающего вещества. Серебрянные сорбент нагревается до 130 С в специальном муфельном пече и полностью освобождается от радона. В качестве объектом исследование выбраны питьевая вода от Навоийского и Самаркандского региона где расположена густонаселенный пункти. Для измерение проб воды отбирается два раза в месяц течение года. Измерение и получение результатов осуществляется в следующим порядке: приготовление сорбента (в нашем случае уголь) сначала нагревается до 130 °С чтобы освободить от радона полностью, затем взвешиванием определяет массы сорбента. Для эксперимента требуются специально подготовить комнат, чтобы в комнате должны отсутствовать воздухаобмена со средой. Затем удобно установить штатив в комнате и вывешивать серебрянные уголь так, на расстояни от пола 1-1.5 м, от дверей и окон 1,5 м. После этого, серебрянного сорбент сохраняется 1-3 сутки в комнате. Определяется масса сорбента который охватил радона и вводится в программу ASW. Через пол часа сорбент размещается монокристаллический детектора NaI(Tl) а затем увеличивается его активность. Рис-1

Причина распространение радона в комнате является наличие земли, фундаменты зданиия, стройматериалы, горючие газы, питьевая воды и т.д. Обычно, атмосферы комнаты сложный и неустойчивая термодинамический система. На такие системе содержание радона зависит от температуре и диффузии воздуха, влажности и градиенты давлении, а также за счет вызвинными конвексиями.

Ниже в таблице приведении сезонный измеении объёмного активности радона жилищные комнаты населении в городе Навои и Самарканда.

Навайских регион				Самаркандских регион			
месяц	ОАР Бк/м ³	Температура °С	Влажность	месяц	ОАР Бк/м ³	Температура °С	Влажность
Ноябрь	118,6 ± 21	11	60	Ноябрь	138,6 ± 22	10	85
	123,3 ± 14				157,4 ± 16		
Декабрь	58,9 ± 7	-3	65	Декабрь	199,9 ± 21	-4	87
	59 ± 10				170,9 ± 34		
Январь	99,1 ± 23	11	31	Январь	203,2 ± 27	10	33
	103,4 ± 30				169,2 ± 26		
Февраль	187,1 ± 33	2	42	Февраль	69,4 ± 12	2	45
	206,2 ± 35				79,4 ± 14		
Март	181,3 ± 43	14	74	Март	107,8 ± 40	15	72
	163,7 ± 39				113,1 ± 29		
Апрель	94,7 ± 17	12	42	Апрель	45,8 ± 16	20	40
	96,3 ± 28				54,1 ± 8,3		
Май	100,1 ± 16	28	20	Май	45,6 ± 8	25	35
	73 ± 34				52,9 ± 14		
Июнь	<19	30	26	Июнь	41,2 ± 17	29	35
	<20				43,9 ± 13		
Июль	40,1 ± 7,5	38	17	Июль	36,8 ± 16	37	19
	36,5 ± 7,9				46,6 ± 19		
Август	45,3 ± 11	39	14	Август	<22	38	18
	<30				<21		
Сентябрь	101,3 ± 14	26	17	Сентябрь	61,7 ± 31	29	15
	79 ± 39				67,1 ± 21		
Октябрь	<23	16	43	Октябрь	96,7 ± 29	14	84
	<24				100,7 ± 35		



Из вышеизложенного видно, что величине максимального и минимального содержания ОАР в комнате зависит от дни сезона. Наблюдается увлечение содержание ОАР на зимного периода, а напротив летная время она уменьшается. Относительно увлечение активность радона наблюдается утренная и вечеренная время. Радон как радиоактивная газ, его содержания внутри здании зависит от воздухооборотов здания. Опытным путем была доказано что, в наличие наилучшего воздухооборотов здания вариация радонов соответствуюет с атмосферными воздухами.

Литература

1. Н.Н. Базаров, А. Х. Иноятов, Н. Т. Муминов, Д. Ш. Саидова и др Выпадения космогенного ^7Be в окрестностях Самарканда в 2002–2009 годах. Атомная энергия, Т. 111, вып. 4, 2011, с. 228–232.
2. А.Н. Азимов, А. К. Мухаматов, А. Н. Сафаров, Н. Н. Базарбаев и др. Атмосферные выпадения ^7Be в 2009–2014 г. В Ташкенте и Самарканде. Атомная энергия, Т. 123, вып. 1, 2017, с. 53–55.
3. Г. Х. Атаходжаев, С. Махмудов, Н. Т. Муминов, А. К. Мухамедов и др Радионуклиды в сухих атмосферных выпадениях 2017 г в Ташкенте, Самарканде и Карши. Научный вестник СамГУ, с 66–68, Самарканд, 2018

MUALLIFLAR DIQQATIGA!

Hurmatli mualliflar, maqola muallif tomonidan qog‘ozda chop etilgan va elektron shaklida taqdim qilinishi shart. **Maqolada quyidagi bandlar:** UDK, ishning nomi (o‘zbek, rus va ingliz tillarida), maqola hammualliflarining ro‘yxati (to‘liq familiyasi, ismi, otasining ismi – o‘zbek, rus va ingliz tillarida), muallif haqida ma‘lumotlar: ish joyi, lavozimi, pochta va elektron pochta manzili; maqola annotatsiyasi (300 belgigacha, o‘zbek, rus va ingliz tillarida), kalit so‘zlar (5-7, o‘zbek, rus va ingliz tillarida) bo‘lishi lozim.

MAQOLALARGA QO‘YILADIGAN TALABLAR!

Maqolalarning nashr etilishi uchun shartlar nashr etilishi mo‘ljallangan maqolalar dolzarb mavzuga bag‘ishlangan, ilmiy yangilikka ega, muammoning qo‘yilishi, muallif tomonidan olingan asosiy ilmiy natijalar, xulosalar kabi bandlardan iborat bo‘lishi lozim; ilmiy maqolaning mavzusi informativ bo‘lib, mumkin qadar qisqa so‘zlar bilan ifodalangan bo‘lishi kerak va unda umumiy qabul qilingan qisqartirishlardan foydalanish mumkin; “Ilmiy axborotnoma” jurnali mustaqil (ichki) taqrizlashni amalga oshiradi.

**MAQOLALARNI YOZISH VA RASMIYLASHTIRISHDA
QUYIDAGI QOIDALARGA RIOYA QILISH LOZIM:**

Maqolalarning tarkibiy qismlariga: kirish (qisqacha), tadqiqot maqsadi, tadqiqotning usuli va obykti, tadqiqot natijalari va ularning muhokamasi, xulosalar yoki xotima, bibliografik ro‘yxat. Maqola kompyuterda Microsoft Office Word dasturida yagona fayl ko‘rinishida terilgan bo‘lishi zarur. Maqolaning hajmi jadvallar, sxemalar, rasmlar va adabiyotlar ro‘yxati bilan birgalikda doktorantlar uchun 0,25 b.t. dan kam bo‘lmasligi kerak. Sahifaning yuqori va pastki tomonidan, chap va o‘ng tomonlaridan - 2,5 sm; orientatsiyasi - kitob shaklida. Shrift - Times New Roman, o‘lchami - 12 kegl, qatorlar orasi intervali - 1,0; bo‘g‘in ko‘chirish - avtomatik. Grafiklar va diagrammalar qurishda Microsoft Office Excel dasturidan foydalanish lozim. Matndagi bibliografik havolalar (ssilka) kvadrat qavsda ro‘yxatda keltirilgan tartibda qayd qilish lozim. Maqolada foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati keltirilishi lozim. Bibliografik ro‘yxat alfavit tartibida - GOST R 7.0.5 2008 talablariga mos tuziladi.

- Ikki oyda bir marta chiqadi.
- “Samarqand davlat universiteti ilmiy axborotnomasi”dan ko‘chirib bosish faqat tahririyatning yozma roziligi bilan amalga oshiriladi.
- Mualliflar maqolalardagi fakt va raqamlarning haqqoniyligiga shaxsan mas’ul.

MAQOLAGA QUYIDAGILAR ILOVA QILINADI:

- Yo‘llanma xati;
- Ekspert xulosasi.

E- mail: axborotnoma@samdu.uz

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTNOMASI

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC REPORTS

Mas'ul kotib
Musahhah
Texnik muharrir

X. Sh. Tashpulatov
O. Ro'ziboyev
A. I. Inatov

Muharrirlar:

I.Sulaymonov - f.f.d., dotsent
E.Arziqulov - f.-m.f.n., dotsent
O.Yusupova - fil.f.n., dotsent
A.R.Safarov - PhD., dotsent

Mas'ul muharrirlar:

D. M. Aronbayev - k.f.n., dotsent
A. Sh. Yarmuxamedov - f.-m.f.n.

Muassis: Samarqand davlat universiteti
Manzil: 140104, Samarqand shahri, Universitet hiyoboni, 15.
Telefon: (0 366) 239-14-07, Faks: (0 366) 239-13-87
e-mail: axborotnoma@samdu.uz

SamDU «Ilmiy axborotnoma» jurnali tahririyati kompyuterida terildi.
Bosishga 30.06.2020 yilda ruxsat etildi. Qog'oz o'lchami A-4. Nashriyot hisob tabog'i 10,00.
Buyurtma raqami 276.

Manzil: 140104, Samarqand shahri, Universitet xiyoboni, 15.
SamDU bosmaxonasida chop etildi.