САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАРИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

БОЛТАЕВ АСОМИДДИН ТУЛКИНОВИЧ

БАЪЗИ СОНИ САҚЛАНМАЙДИГАН ЗАРРАЧАЛАР СИСТЕМАСИГА МОС УМУМЛАШГАН ФРИДРИХС МОДЕЛИ СПЕКТРАЛ ТАҲЛИЛИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд – 2019

УДК: 517.984

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАРИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

БОЛТАЕВ АСОМИДДИН ТУЛКИНОВИЧ

БАЪЗИ СОНИ САҚЛАНМАЙДИГАН ЗАРРАЧАЛАР СИСТЕМАСИГА МОС УМУМЛАШГАН ФРИДРИХС МОДЕЛИ СПЕКТРАЛ ТАҲЛИЛИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд – 2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.1.PhD/FM109 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Лакаев Саидахмат Норжигитович** физика-математика фанлари доктори, профессор, академик
Расмий оппонентлар:	**Ғанихўжаев Расул Набиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Хайруллаев Исматилло Нуриллаевич физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Ўзбекистон Миллий университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги PhD.27.06.2017.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2019 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2019 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

И.А.Икромов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар панжарадаги сони сақланмайдиган заррачалар системасига мос умумлашган Фридрихс моделини, хусусан панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос s-d алмашиниш моделларини ўрганишга келтирилади. Тартибланган муҳитларда мураккаб турғун объектлар пайдо бўлишини тавсифлашда фойдаланиладиган Бозе-Хаббард модели, хусусан, панжарадаги икки заррачали Шредингер операторлари экспериментал кузатишларнинг назарий асоси ва қўллашнинг назарий базаси ҳисобланади. Шунинг учун қаттиқ жисмлар физикаси ҳамда квант майдонлар назарияси ва статистик физикада учрайдиган Шредингер операторлари, умумлашган Фридрихс модели, хусусан s-d алмашиниш моделларига оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда ўз-ўзига қўшма операторларнинг спектри ва резонансларини ўрганиш ҳақидаги муаммо замонавий математик анализнинг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Таъкидлаш жоизки, ушбу масала панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос умумлашган Фридрихс модели спектри ва резонансларини ўрганиш билан чамбарчас боғлиқ. Хусусан, панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос умумлашган Фридрихс моделини икки заррачали Шредингер оператори ёрдамида аниқлаш ва унинг спектрини тадқиқ қилиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос умумлашган Фридрихс модели, хусусан s-d алмашиниш модели муҳим спектри ўрнини тавсифлаш; s-d алмашиниш моделига мос, панжарадаги икки заррачали Шредингер типли оператор спектридаги бўсаға ҳодисасини ўрганиш мақсадли илмий тадқиқотлар ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган математик анализнинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, панжарадаги сони сақланадиган ва сақланмайдиган икки заррачали системага мос Фридихс моделларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Умумлашган Фридрихс моделлари узлуксиз спектри, хос қийматлари, хос қийматларнинг пайдо бўлиши ва ютилиши, хос қийматлар сонини аниқлашга оид салмоқли натижаларга эришилди. «Математика, физика, амалий математика фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари» этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда квант майдонлар назарияси ва чизиқли операторларнинг спектрал назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Атом ва молекуляр ҳамда қаттиқ жисмлар физикаси, статистик физика, математик-физика, квант майдонлар назариясининг асосий масалалари аксарият ҳолларда умумлашган Фридрихс модели, s-d алмашиниш модели ва Бозе-Хаббард модели деб аталувчи чизиқли чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар махсус синфларининг спектрал хоссаларини ўрганишга келтирилади.

К.О. Фридрихс томонидан биринчи бўлиб, ўз-ўз қўшма операторлар қўзғалишлар назарияси модели сифатида эркли ўзгарувчига кўпайтириш ва унинг интеграл оператор ёрдамидаги қўзғалиши киритилган. Кейинчалик О.А.Ладиженская ва Л.Д.Фаддеевларнинг ишларида бу оператор Фридрихс модели деб аталган ҳамда Шредингер операторини ўрганиш масаласи Фридрихс моделини ўрганиш масаласига келтирилган. Фридрихс моделида узлуксиз спектрнинг карралилиги ўзгармас, шунинг учун С.Н.Лакаев томонидан умумлашган Фридрихс модели узлуксиз спектрнинг карралилиги ўзгарувчан бўлган ҳол модели сифатида киритилди. Бу моделнинг спектрал хоссалари, яъни узлуксиз спектри, хос қийматлари ва резонанслари, хос қийматларнинг пайдо бўлиши ва ютилиши, ҳамда хос қийматлар сонининг чеклилиги Р.А.Минлос, С.Н.Лакаев, Ж.И.Абдуллаев, С.А.Степен, С.Албеверио, Е.Л.Лакштанов, Э.Р.Акчурин, И.А.Икромов, М.Э.Муминов, Ф.Ш.Шарипов, З.Э.Муминов, Ю.Х.Эшқобилов, Т.Ҳ.Расулов, Ш.М.Латипов ва Ш.Х.Қурбонов ишларида ўрганилган.

С.Н.Лакаев, Ж.И.Абдуллаевларнинг ишларида заррачалар сони иккидан ошмайдиган системага мос умумлашган Фридрихс моделининг хос қийматлари ва резонанслари ҳамда улар сонининг чеклилиги исботланган.

С.А.Степен ва М.Э.Муминов ишларида ўз-ўзига қўшма бўлмаган Фридрихс моделининг спектрал хоссалари ўрганилган, жумладан хос қийматлари сонининг чеклилик шартлари топилган. Ҳозирги пайтда ҳам умумлашган Фридрихс модели, хусусан s-d алмашиниш моделининг спектрал хоссаларини тадқиқ қилишга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университетининг Ф4-ФА-Ф079

«Панжарадаги сони сақланмайдиган заррачалар системаси гамильтонианларининг спектрал таҳлили» (2012-2016 йй) ва ОТ-Ф4-66 «Панжарадаги чекли сондаги заррачалар системаси моделлари. Энергия операторларининг муҳим ва дискрет спектрлари» (2017-2018 йй) мавзусидаги илмий тадқиқотлар лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, s-d алмашиниш моделининг ва s-d алмашиниш моделига мос, икки заррачали Шредингер типли операторининг муҳим ва дискрет спектрларини тадқиқ этишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

бир ва икки ўлчамли панжаралардаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер типли оператор ёрдамида аниқланган s-d алмашиниш моделининг муҳим спектрдан чапда ётувчи ягона хос қиймати мавжудлигини исботлаш;

ўлчами учдан кам бўлмаган панжаралардаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер типли оператор ёрдамида аниқланган s-d алмашиниш моделининг муҳим спектрдан чапда ётувчи ягона хос қиймати мавжуд ёки мавжуд эмаслигини ҳамда муҳим спектр чап чеккасининг виртуал сатҳ ёки хос қиймат бўлишини оператор параметрларига боғлиқ ҳолда аниқлаш;

алмашинувчан ўзаро таъсир параметри ва квазиимпулснинг барча қийматларида s-d алмашиниш моделига мос, бир ва икки ўлчамли панжаралардаги жуфт-жуфти билан қисқа масофада таъсирлашувчи потенциал ёрдамида аниқланган икки заррачали Шредингер типли операторининг муҳим спектрдан чапда ётувчи хос қиймати мавжудлигини кўрсатиш;

s-d алмашиниш моделига мос, ўлчами учдан кам бўлмаган панжаралардаги жуфт-жуфти билан қисқа масофада таъсирлашувчи потенциал ёрдамида аниқланган икки заррачали Шредингер типли операторнинг муҳим спектрдан чапда ётувчи хос қиймати мавжуд ёки мавжуд эмаслигини ҳамда муҳим спектр чап чеккасининг сингуляр нуқта бўлишини алмашинувчан ўзаро таъсир параметри ва квазиимпулснинг қийматларига боғлиқ ҳолда аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос s-d алмашиниш модели ва s-d алмашиниш моделига мос, икки заррачали Шредингер типли оператори.

Тадқиқотнинг предмети панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос s-d алмашиниш модели ва s-d алмашиниш моделига мос, икки заррачали Шредингер типли операторларининг спектрал тадқиқотлари.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик анализ, математик физика, функционал анализ, ўз-ўзига қўшма операторлар назарияси ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси умумий усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

бир ва икки ўлчамли панжаралардаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер типли оператор ёрдамида аниқланган s-d алмашиниш моделининг муҳим спектрдан чапда ётувчи ягона хос қиймати мавжудлиги исботланган;

ўлчами учдан кам бўлмаган панжаралардаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер типли оператор ёрдамида аниқланган s-d алмашиниш моделининг муҳим спектрдан чапда ётувчи ягона хос қиймати мавжуд ёки мавжуд эмаслиги ҳамда муҳим спектр чап четкасининг виртуал сатҳ ёки хос қиймат бўлиши оператор параметрларига боғлиқ ҳолда аниқланган;

алмашинувчан ўзаро таъсир параметри ва квазиимпулснинг барча қийматларида s-d алмашиниш моделига мос, бир ва икки ўлчамли панжаралардаги жуфт-жуфти билан қисқа масофада таъсирлашувчи потенциал ёрдамида аниқланган икки заррачали Шредингер типли операторининг муҳим спектрдан чапда ётувчи хос қиймати мавжудлиги кўрсатилган;

s-d алмашиниш моделига мос, ўлчами учдан кам бўлмаган панжаралардаги жуфт-жуфти билан қисқа масофада таъсирлашувчи потенциал ёрдамида аниқланган икки заррачали Шредингер типли операторнинг муҳим спектрдан чапда ётувчи хос қиймати мавжуд ёки мавжуд эмаслиги ҳамда муҳим спектр чап четкасининг сингуляр нуқта бўлиши алмашинувчан ўзаро таъсир параметри ва квазиимпулснинг қийматларига боғлиқ ҳолда аниқланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Умумлашган Фридрихс модели боғланган ҳолатларининг аналитиклиги ҳақидаги хулосалардан қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасида экспериментал тадқиқотларнинг сифат кўрсаткичини аниқлаш ва сонли ҳисоблашларда фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Математик анализ, математик физика, функционал анализ, ўз-ўзига қўшма операторлар назарияси ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назарияси, квант механикаси, қаттиқ жисмлар физикаси, статистик физика ва квант майдонлар назарияси, хусусан, панжарадаги сони сақланмайдиган заррачалар системаси гамильтонианларининг спектрлари билан боғлиқ масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти ишда олинган илмий натижалар қаттиқ жисмлар физикасида мураккаб объектлар ҳосил бўлишини кўрсатувчи экспериментал тадқиқотлар ўтказиш ва қўллашга назарий асос сифатида хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Баъзи сони сақланмайдиган заррачалар системасига мос умумлашган Фридрихс модели спектрал таҳлилига оид олинган натижалар асосида:

панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, s-d алмашиниш моделининг ва s-d алмашиниш моделига мос, панжарадаги икки заррачали Шредингер типли операторининг хос қиймати мавжудлигини кўрсатиш усулларидан Q.J130000.2626.14J72 рақамли хорижий грантида олмос панжарадаги икки заррачали Шредингер операторлари учун қўлланилган (Малайзия технология университетининг 2019 йил 18 апрелдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши олмос панжарадаги Шредингер операторининг муҳим спектрдан ташқарида ётувчи дискрет спектрининг чеклилигини кўрсатиш имконини берган;

панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, s-d алмашиниш моделининг ягона хос қиймати мавжудлиги ва s-d алмашиниш моделига мос, панжарадаги икки заррачали Шредингер типли операторининг хос қиймати мавжуд бўлишига оид натижалардан Ф-4-17 рақамли «Чизиқли бўлмаган алгебраик ва дифференциал тенгламалар системаларини ҳамда тебранувчи интегралларни тадқиқ этишда янги методларни ишлаб чиқиш ва уларнинг татбиқлари» номли тадқиқот лойиҳасида тебранувчан интегралларнинг тебраниши кўрсаткичини аниқлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йил 11 июндаги 89-03-2434-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши Шредингер оператори дисперсион муносабати орқали аниқланган тебранувчан интегралнинг тебраниши кўрсаткичини топиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 3 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 12 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссияси томонидан фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 4 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг хажми 98 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Дастлабки маълумотлар»** деб номланувчи биринчи бобида асосий натижаларни баён қилиш учун зарур бўлган тушунча ва тасдиқлар, жумладан чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясининг зарур теоремалари баён қилинган. Бундан ташқари панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системаси гамильтонианига мос келувчи, s-d алмашиниш моделининг Фок фазосининг қирқилган инвариант қисм фазосидаги торайиши сифатида аниқланган операторнинг координата ва импульс кўринишлари киритилган. s-d алмашиниш моделига мос икки заррачали гамильтониан эса икки заррачали Шредингер типли операторга келтирилган.

Диссертациянинг **«Панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, s-d алмашиниш моделининг боғланган ҳолатлари»** деб номланувчи иккинчи бобида панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, s-d алмашиниш моделининг спектрал хоссаларини тадқиқ этишга бағишланган.

Иккинчи боб асосий натижаларининг қатъий математик баёнига ўтамиз.

Фараз қилайлик, $\mathrm{T}^d=(-\pi,\pi]^d$ - d- ўлчамли тор, $\eta(dp)=\dfrac{d^d p}{(2\pi)^d}$ эса- T^d торда аниқланган Хаар ўлчови, Z^d- $d-$ ўлчамли кубик панжара ҳамда $\ell^2(\mathrm{Z}^d)-$ Z^dда аниқланган квадрати билан жамланувчи функциялар Ҳилберт фазоси ва $\ell^1(\mathrm{Z}^d)-\mathrm{Z}^d$да аниқланган жамланувчи функциялар Банах фазоси бўлсин.

$\hat{\mathrm{H}}_0=\left\{\hat{f}_0:\mathrm{Z}^d\to\mathrm{X}\|\ \hat{f}_0(x)=0,\quad x\in\mathrm{Z}^d\setminus\{\theta\}\right\}$ орқали $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$ фазонинг қисм фазосини белгилаймиз.

$\hat{\mathrm{H}}=\hat{\mathrm{H}}_0\oplus\hat{\mathrm{H}}_1$ билан $\hat{\mathrm{H}}_0$ ва $\hat{\mathrm{H}}_1:=\ell^2(\mathrm{Z}^d)$ Ҳилберт фазоларининг тўғри йиғиндисидан иборат Ҳилберт фазосини белгилаймиз.

Шуни таъкидлаймизки, $\hat{\mathrm{H}}$ Ҳилберт фазоси s-d алмашиниш модели аниқланган, Z^d панжарадаги чексиз сондаги заррачалардан ташкил топган системага мос Фок фазосининг панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос қирқилган қисм фазоси бўлади.

Ихтиёрий фиксирланган $k\in\mathrm{T}^d$ва $d\geq 1$ лар учун $\hat{F}_A(k)-$ операторни панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системаси гамилтонианига мос келувчи, яратувчи ва йўқотувчи операторлар ҳамда нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер типли оператор ёрдамида аниқланган, s-d алмашиниш моделининг $\hat{\mathrm{H}}$ фазодаги торайиши сифатида аниқлаймиз.

$\hat{F}_A(k)-$ оператор $\hat{\mathrm{H}}$ Ҳилберт фазосида координата кўринишда қуйидаги формула орқали аниқланган:

$$\hat{F}_A(k)\begin{pmatrix}\hat{f}_0(x)\\ \hat{f}_1(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\hat{E}_e(k)\hat{f}_0\right)(x)+\left(\hat{C}^*\hat{f}_1\right)(x)\\ \left(\hat{C}\,\hat{f}_0\right)(x)+\left(\hat{H}_A(k)\hat{f}_1\right)(x)\end{pmatrix}.$$

Бунда

$$\hat{C}^*:\hat{\mathrm{H}}_1\to\hat{\mathrm{H}}_0,\qquad \left(\hat{C}^*\hat{f}_1\right)(x)=-\frac{A}{2}\sqrt{2S}\,\delta_{x0}\,\hat{f}_1(x)\quad \text{ва}$$

$$\hat{C}:\hat{\mathrm{H}}_0\to\hat{\mathrm{H}}_1,\qquad \left(\hat{C}\,\hat{f}_0\right)(x)=-\frac{A}{2}\sqrt{2S}\,\hat{f}_0(x)$$

мос равишда яратувчи ва йўқотувчи операторлар, $S>0$ ва $\delta_{x0}-$ Кронекер символи. $\hat{E}_e(k)$, $k\in\mathrm{T}^d$, оператор $\hat{\mathrm{H}}_0$ Ҳилберт фазосида кўпайтириш оператори бўлиб, қуйидагича аниқланган:

$$\left(\hat{E}_e(k)\hat{f}_0\right)(x)=\frac{1}{e}\varepsilon(k)\,\hat{f}_0(x),$$

бу ерда $e>0-$ электрон массаси ва

$$\varepsilon(k)=2\sum_{i=1}^{d}\left(1-\cos k_i\right).$$

Фиксирланган тўла квазиимпулсли, s-d алмашиниш моделига мос, икки заррачали система дискрет оператори $\hat{H}_A(k)$, $k\in\mathrm{T}^d$, $d\geq 1$, $\hat{\mathrm{H}}_1$ фазода қуйидаги формула билан аниқланган:

$$\hat{H}_A(k)=\hat{H}_0(k)+\frac{A}{2}V,\quad k\in\mathrm{T}^d,\tag{1}$$

бу ерда $\hat{H}_0(k), k\in\mathrm{T}^d$, ўрама типидаги оператор бўлиб, қуйидаги кўринишга эга

$$\left(\hat{H}_0(k)\hat{f}_1\right)(x)=\sum_{y\in\mathrm{Z}^d}\hat{\varepsilon}_k(x-y)\,\hat{f}_1(y),\quad \hat{f}_1\in\hat{\mathrm{H}}_1,$$

бунда

$$\hat{\varepsilon}_k(x)=\frac{1}{e}\hat{\varepsilon}(x)+\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k,x)}\hat{\varepsilon}(-x)-AS\delta_{x0}.$$

Бу ерда $m>0-$ магнон массаси, $(k,x)=\sum_{i=1}^{d}k_ix_i$, $k\in\mathrm{T}^d, x\in\mathrm{Z}^d$ ва

$$\hat{\varepsilon}(x)=\begin{cases}2d, & \text{агар}\quad x=0\\ -1, & \text{агар}\quad |x|=1,\qquad |x|=|x_1|+\ldots+|x_d|.\\ 0, & \text{агар}\quad |x|>1\end{cases}$$

$\hat{V}$ оператор $\hat{v}$ функцияга кўпайтириш оператори:

$$\left(\hat{V}\hat{f}_1\right)(x)=\hat{v}(x)\,\hat{f}_1(x),\quad \hat{f}_1\in\hat{\mathrm{H}}_1,$$

бунда

$$\hat{v}(x)=\begin{cases}1, & \text{агар}\quad x=0\\ 0, & \text{агар}\quad x\neq 0\end{cases}.$$

$\hat{V}$ компакт оператор эканлигидан Г.Вейл теоремасига кўра $\hat{H}_A(k)$

операторнинг муҳим спектри $\hat{H}_0(k)$ операторнинг муҳим спектри билан устма-уст тушади, яъни

$$\sigma_{ess}\left(\hat{H}_A(k)\right)=\sigma_{ess}\left(\hat{H}_0(k)\right)=\sigma\left(\hat{H}_0(k)\right)=\left[\varepsilon_{\min}(k),\varepsilon_{\max}(k)\right],$$

бунда

$$\varepsilon_{\min}(k):=\min_{q\in \mathrm{T}^d}\varepsilon_k(q)=2\sum_{i=1}^{d}\left[\frac{e+m}{em}-C_{em}(k_i)\right]-AS$$

$$\varepsilon_{\max}(k):=\max_{q\in \mathrm{T}^d}\varepsilon_k(q)=2\sum_{i=1}^{d}\left[\frac{e+m}{em}+C_{em}(k_i)\right]-AS,$$

бу ерда

$$C_{em}(k_i)=\frac{1}{em}\sqrt{e^2+m^2+2em\cos k_i} \tag{2}$$

ва $\varepsilon_k(\cdot)$ функция $\hat{\varepsilon}_k(\cdot)$ функциянинг Фурье алмаштиришидан иборат, яъни

$$\varepsilon_k(q)=\left(\Phi\,\hat{\varepsilon}_k\right)(q)=\sum_{x\in \mathrm{Z}^d}\hat{\varepsilon}_k(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q,x)}.$$

Шуни қайд қилиб ўтишимиз жоизки, $\hat{F}_A(k),\, k\in \mathrm{T}^d$, операторнинг муҳим спектри учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\sigma_{ess}\left(\hat{F}_A(k)\right)=\sigma_{ess}\left(\hat{H}_A(k)\right).$$

1-Эслатма. *Фараз қилайлик $e=m$ ва $k=(k_1,\ldots,k_d)\in \mathrm{T}^d$ векторнинг фақат $n\le d$ координатаси π га тенг бўлсин. У ҳолда $\varepsilon_k(\cdot)$ функция қуйидаги кўринишда тасвирланади:*

$$\varepsilon_k(q)=\frac{4}{e}\sum_{j=1}^{d-n}\left[1-\cos\frac{k_j}{2}\cos\left(q_j-\frac{k_j}{2}\right)\right]-AS.$$

Бу ҳолда $\hat{F}_A(k),\ k\in \mathrm{T}^d$, операторнинг спектрал хоссаларини ўрганиш масаласи $d-n$ ўлчамли ҳолга келтирилади. Шунинг учун, умумийликка зарар етказмаслик учун бундан буён $e\neq m$ деб фараз қиламиз.

1-Теорема. *Фараз қилайлик $d=1,2$ ва $m(k)=\min\left\{\frac{1}{e}\varepsilon(k),\varepsilon_{\min}(k)\right\}$ бўлсин. У ҳолда $\hat{F}_A(k)$ оператор $(-\infty,m(k))$ оралиқда ягона $z_A(k)$ хос қийматга эга бўлади. Унга мос $\hat{f}_k\in\hat{\mathrm{H}}$ хос вектор:*

$$\hat{f}_k=(\hat{f}_{0,k},\hat{f}_{1,k}),\qquad \begin{cases} \hat{f}_{0,k}(x)=\dfrac{\frac{A}{2}\sqrt{2S}C\delta_{x0}}{\frac{1}{e}\varepsilon(k)-z_A(k)}\in\hat{\mathrm{H}}_0 \\ \hat{f}_{1,k}(x)=\dfrac{AC}{2}\left(\dfrac{AS}{\frac{1}{e}\varepsilon(k)-z_A(k)}-1\right)\displaystyle\int_{\mathrm{T}^d}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q,x)}\eta(\mathrm{d}q)}{\varepsilon_k(q)-z_A(k)}\in\hat{\mathrm{H}}_1, \end{cases} \tag{3}$$

кўринишга эга бўлади, бунда $C-$ нормалловчи кўпайтувчи. Бундан ташқари, $z_A(\cdot)$ функция T^d да аналитик, $\hat{f}:\mathrm{T}^d\to\hat{\mathrm{H}}$, $k\to\hat{f}_k\in\hat{\mathrm{H}}$ акслантириш *эса* T^d *даги вектор қийматли аналитик акслантириш бўлади.*

Фиксирланган $e, m, S > 0, A < 0$ ларда қуйидаги тўпламларни аниқлаймиз:

$$D^{\leq} = \left\{ k \in \mathrm{T}^d : \frac{1}{e}\varepsilon(k) - \varepsilon_{\min}(k) \leq 0 \right\}, D^{>} = \left\{ k \in \mathrm{T}^d : \frac{1}{e}\varepsilon(k) - \varepsilon_{\min}(k) > 0 \right\}.$$

2-Теорема. *Фараз қилайлик* $d \geq 3$ *бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $k \in D^{\leq}$ *учун* $\hat{F}_A(k)$ *оператор* $(-\infty, \frac{1}{e}\varepsilon(k))$ *оралиқда ягона* $z_A(k)$ *хос қийматга эга бўлади. Унга мос* $\hat{f}_k \in \hat{\mathrm{H}}$ *хос вектор (3) кўринишга эга бўлади.*

Қуйидаги формула орқали ихтиёрий $k \in \mathrm{T}^d$ учун $\mathrm{X} \setminus \sigma_{ess}\left(\hat{F}_A(k)\right)$ да аналитик бўлган $a(k;\cdot)$ функцияни аниқлаймиз:

$$a(k;\cdot) = \int_{\mathrm{T}^d} \frac{\eta(\mathrm{d}q)}{\varepsilon_k(q) - z}.$$

Фараз қилайлик $d \geq 3$ бўлсин. У ҳолда барча $k \in \mathrm{T}^d$ учун қуйидаги чекли

$$a(k) := \lim_{z \to \varepsilon_{\min}(k)-} a(k;z) = \int_{\mathrm{T}^d} \frac{\eta(\mathrm{d}q)}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)} > 0 \tag{4}$$

лимит мавжуд бўлади.

Фараз қилайлик $\ell^0(\mathrm{Z}^d) -$ Z^d да аниқланган чексизликда нолга интилувчи функциялар Банах фазоси бўлсин.

1-Таъриф. *Фараз қилайлик* $d \geq 3$ *бўлсин. Агар* $\hat{F}_A(k)\hat{f} = \varepsilon_{\min}(k)\hat{f}$ *тенглама нолмас* $\hat{f} := \hat{f}_k = (\hat{f}_{0,k}, \hat{f}_{1,k}),$ $\hat{f}_{0,k} \in \hat{\mathrm{H}}_0,$ $\hat{f}_{1,k} \in \ell^0(\mathrm{Z}^d) \setminus \ell^2(\mathrm{Z}^d)$ *ечимга эга бўлса, у ҳолда* $z = \varepsilon_{\min}(k)$ *сони* $\hat{F}_A(k)$, $k \in \mathrm{T}^d$, *операторнинг виртуал сатҳи дейилади. Бу ҳолда* $\hat{f}$ *нолмас ечимни* $\hat{F}_A(k)$ *операторнинг виртуал ҳолати деймиз.*

Фараз қилайлик $d \geq 3$ бўлсин. Ихтиёрий $k \in \mathrm{T}^d$ учун

$$A_0(k) = \frac{-2\mu(k)}{2S + a(k)\mu(k)} \leq 0$$

сонни аниқлаймиз, бунда $\mu(k) = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{d}\left[\frac{1}{e^2} - \left[C_{em}(k_i) - \frac{1}{m}\right]^2\right]$. $C_{em}(k_i)$ ва $a(k)$ лар мос равишда (2) ва (4) формулалар орқали аниқланган.

Ихтиёрий $A < 0$ учун қуйидаги тўпламларни киритамиз:

$$B^{<}(A)=\{k\in D^{>}:\quad A<A_0(k)\},$$
$$B^{=}(A)=\{k\in D^{>}:\quad A=A_0(k)\},$$
$$B^{>}(A)=\{k\in D^{>}:\quad A>A_0(k)\}.$$

3-Теорема. *(i) Агар $d\ge 3$ ва $k\in B^{<}(A)$ бўлса, у ҳолда $\hat{F}_A(k)$ оператор $(-\infty,\varepsilon_{\min}(k))$ оралиқда ягона $z_A(k)$ хос қийматга эга бўлади. Унга мос $\hat{f}:=\hat{f}_k=(\hat{f}_{0,k},\hat{f}_{1,k})$, $\hat{f}_{0,k}\in\hat{\mathrm{H}}_0$, $\hat{f}_{1,k}\in\hat{\mathrm{H}}_1$ хос вектор (3) кўринишга эга бўлади.*

(ii) Агар $d\ge 3$ ва $k\in B^{>}(A)$ бўлса, у ҳолда $\hat{F}_A(k)$ оператор $\sigma_{ess}(\hat{F}_A(k))$ муҳим спектрдан ташқарида ётувчи хос қийматга эга бўлмайди.

(iii) Агар $d\ge 3,4$ ва $k\in B^{=}(A)$ бўлса, у ҳолда $z=\varepsilon_{\min}(k)$ сони $\hat{F}_A(k)$ операторнинг виртуал сатҳи бўлади ва мос виртуал ҳолат қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\hat{f}:=\hat{f}_k=(\hat{f}_{0,k},\hat{f}_{1,k}),\qquad \begin{cases} \hat{f}_{0,k}(x)=\dfrac{\frac{A}{2}\sqrt{2S}C\delta_{x0}}{\frac{1}{e}\varepsilon(k)-\varepsilon_{\min}(k)}\in\hat{\mathrm{H}}_0\\ \hat{f}_{1,k}(x)=\dfrac{AC}{2}\left(\dfrac{AS}{\frac{1}{e}\varepsilon(k)-\varepsilon_{\min}(k)}-1\right)\times\\ \times\displaystyle\int_{\mathrm{T}^d}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q,x)}\eta(\mathrm{d}q)}{\varepsilon_k(q)-\varepsilon_{\min}(k)}\in\ell^0(\mathrm{Z}^d)\setminus\ell^2(\mathrm{Z}^d),\end{cases}\tag{5}$$

бунда, $C-$ нормалловчи кўпайтувчи.

(iv) Агар $d\ge 5$ ва $k\in B^{=}(A)$ бўлса, у ҳолда $z=\varepsilon_{\min}(k)$ сони $\hat{F}_A(k)$ операторнинг хос қиймати бўлади ва унга мос $\hat{f}:=\hat{f}_k=(\hat{f}_{0,k},\hat{f}_{1,k})$ хос вектор (5) кўринишга эга бўлади, бунда $\hat{f}_{0,k}\in\hat{\mathrm{H}}_0$, $\hat{f}_{1,k}\in\hat{\mathrm{H}}_1$.

Диссертациянинг **«s-d алмашиниш моделига мос, панжарадаги икки заррачали Шредингер типли оператор спектридаги бўсаға ҳодисаси»** деб номланувчи учинчи бобида (1) формула билан аниқланган, жуфт-жуфти билан қисқа масофада тортишиб таъсирлашувчи потенциалларининг кенг синфи учун s-d алмашиниш моделига мос, икки заррачали Шредингер типли операторининг муҳим спектридаги бўсаға ҳодисасини ўрганишга бағишланган.

Учинчи боб асосий натижаларининг қатъий математик баёнига ўтамиз.

Фараз қилайлик $d\ge 1$ ва $\hat{v}\in\ell^1(\mathrm{Z}^d)-$ номанфий функция бўлсин. Ихтиёрий $z<\varepsilon_{\min}(k)$ учун $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$ фазода қуйидаги формула орқали таъсир этувчи $\hat{B}_A(k,z)$, $k\in\mathrm{T}^d$, Бирман-Швингер интеграл операторини аниқлаймиз:

$$\hat{B}_A(k,z) := -\frac{A}{2}\hat{V}^{\frac{1}{2}}\hat{R}_0(k,z)\hat{V}^{\frac{1}{2}}.$$

Бу ерда $\hat{V}^{\frac{1}{2}}$ – оператор $\hat{V}$ номанфий операторнинг мусбат квадрат илдизи:

$$\hat{V}^{\frac{1}{2}}\hat{f}(x) = \hat{v}^{\frac{1}{2}}(x)\hat{f}(x), \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathrm{Z}^d),$$

$\hat{R}_0(k,z) := \Phi^{-1}R_0(k,z)\Phi$ – оператор- $\hat{H}_0(k)$ операторнинг $z \in \mathrm{X} \setminus \sigma_{ess}\left(\hat{H}_0(k)\right)$ нуқтадаги резолвентаси, $R_0(k,z)$ – оператор эса $H_0(k) := \Phi\hat{H}_0(k)\Phi^{-1}$ операторнинг $z \in \mathrm{X} \setminus \sigma_{ess}\left(\hat{H}_0(k)\right)$ нуқтадаги резолвентаси.

$\hat{B}_A(k,z)$ Бирман-Швингер операторининг ядроси қуйидаги кўринишга эга

$$\hat{\mathrm{B}}(k,z;x,y) := -\frac{A}{2}\hat{v}^{\frac{1}{2}}(x)\hat{\mathrm{P}}_0(k,z;y-x)\hat{v}^{\frac{1}{2}}(y), \quad x,y \in \mathrm{Z}^d,$$

бунда

$$\hat{\mathrm{P}}_0(k,z;x) := \int_{\mathrm{T}^d} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q,x)}\eta(\mathrm{d}q)}{\varepsilon_k(q)-z}, \quad x \in \mathrm{Z}^d.$$

Фараз қилайлик $d \geq 3$ бўлсин. Ихтиёрий $x,y \in \mathrm{Z}^d$ ва $k \in \mathrm{T}^d$ лар учун қуйидаги функцияларни аниқлаймиз:

$$\hat{\mathrm{P}}_0(k,\varepsilon_{\min}(k);x) := \int_{\mathrm{T}^d} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q,x)}\eta(\mathrm{d}q)}{\varepsilon_k(q)-\varepsilon_{\min}(k)},$$

$$\hat{\mathrm{B}}(k,\varepsilon_{\min}(k);x,y) := -\frac{A}{2}\hat{v}^{\frac{1}{2}}(x)\hat{\mathrm{P}}_0(k,\varepsilon_{\min}(k);y-x)\hat{v}^{\frac{1}{2}}(y).$$

$\hat{\mathrm{P}}_0(\cdot,\varepsilon_{\min}(\cdot);\cdot)$ ва $\hat{\mathrm{B}}(\cdot,\varepsilon_{\min}(\cdot);\cdot,\cdot)$ функцияларнинг баъзи хоссаларини келтирамиз.

1-Лемма. *Фараз қилайлик $d \geq 3$ ва $\hat{v} \in \ell^1(\mathrm{Z}^d)$ – номанфий функция бўлсин.*

(i) Ихтиёрий $x \in \mathrm{Z}^d$ да $\hat{\mathrm{P}}_0(\cdot,\varepsilon_{\min}(\cdot);x)$ функция T^d да голоморф бўлади.

(ii) Ихтиёрий $x,y \in \mathrm{Z}^d$ ларда $\hat{\mathrm{B}}(\cdot,\varepsilon_{\min}(\cdot);x,y)$ функция T^d да голоморф бўлади.

(iii) Ихтиёрий $k \in \mathrm{T}^d$ да $\hat{\mathrm{B}}(k,\varepsilon_{\min}(k);\cdot,\cdot)$ ядро функцияси $\mathrm{Z}^d \times \mathrm{Z}^d$ да квадрати билан жамланувчи бўлади.

2-Таъриф. *Фараз қилайлик $d \geq 3$ ва $\hat{v} \in \ell^1(\mathrm{Z}^d)$ – номанфий функция бўлсин. $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$ фазода қуйидаги формула орқали таъсир этувчи умумлашган(лимитик) $\hat{B}_A(k,\varepsilon_{\min}(k))$, $k \in \mathrm{T}^d$, Бирман-Швингер интеграл операторини аниқлаймиз:*

$$\left[\hat{B}_A(k,\varepsilon_{\min}(k))\hat{\psi}\right](x) := \frac{A}{2}\hat{V}^{\frac{1}{2}}\hat{R}_0(k,\varepsilon_{\min}(k))\hat{V}^{\frac{1}{2}}\hat{\psi}\ (x) = \sum_{y\in Z^d}\hat{\mathrm{B}}(k,\varepsilon_{\min}(k);x,y)\hat{\psi}(y),$$

бунда

$$\left[\hat{R}_0(k,\varepsilon_{\min}(k))\hat{\psi}\right](x) := \sum_{y\in Z^d}\hat{\mathrm{P}}_0(k,\varepsilon_{\min}(k);y-x)\hat{\psi}(y), \quad \hat{\psi}\in \ell^1(\mathrm{Z}^d).$$

3-Таъриф. *Фараз қилайлик* $d\ge 3$ *бўлсин. Агар* 1 *сони* $\hat{B}_A(k,\varepsilon_{\min}(k))$, $k\in \mathrm{T}^d$, *операторнинг хос қиймати бўлса (мос равишда бўлмаса), у ҳолда* $\sigma_{ess}\left(\hat{H}_A(k)\right)$ *муҳим спектрнинг* $z=\varepsilon_{\min}(k)$ *бўсаға қиймати* $\hat{H}_A(k)$, $k\in \mathrm{T}^d$, *оператор муҳим спектрининг сингуляр (мос равишда регуляр) нуқтаси дейилади.*

2-Эслатма. *Фараз қилайлик* $z=\varepsilon_{\min}(k)$ *сони* $\hat{H}_A(k)$, $k\in \mathrm{T}^d$, *оператор муҳим спектрининг сингуляр нуқтаси ва* $\hat{\psi}$ *функция* $\hat{B}_A(k,\varepsilon_{\min}(k))\hat{\psi}=\hat{\psi}$, $k\in \mathrm{T}^d$, *тенгламанинг (ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида) нолмас ечими (ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида) бўлсин.*

(i) Агар $d=3,4$ *бўлса, у ҳолда*

$$\hat{f} = \sqrt{-\frac{A}{2}}\hat{R}_0(k,\varepsilon_{\min}(k))\hat{V}^{\frac{1}{2}}\hat{\psi}, \quad \hat{\psi}\in \ell^2(\mathrm{Z}^d) \qquad (6)$$

функция $\hat{H}_A(k)\hat{f}=\varepsilon_{\min}(k)\hat{f}$ *тенгламанинг ечими бўлади ва у* $\ell^0(\mathrm{Z}^d)$ *фазога қарашли бўлади.* $\hat{f}\in \ell^0(\mathrm{Z}^d)\setminus \ell^2(\mathrm{Z}^d)$ *бўлган ҳолда* $z=\varepsilon_{\min}(k)$ *сингуляр нуқта* $\hat{H}_A(k)$, $k\in \mathrm{T}^d$, *операторнинг виртуал сатҳи дейилади.*

(ii) Агар $d\ge 5$ *бўлса, у ҳолда (6) кўринишга эга бўлган* $\hat{f}$ *функция* $\hat{H}_A(k)\hat{f}=\varepsilon_{\min}(k)\hat{f}$ *тенгламанинг ечими бўлади ва у* $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$ *фазога қарашли бўлади, яъни бу ҳолда* $z=\varepsilon_{\min}(k)$ *сингуляр нуқта* $\hat{H}_A(k)$, $k\in \mathrm{T}^d$, *операторнинг хос қиймати бўлади.*

4-Теорема. *Фараз қилайлик* $d=1,2$ *ва* $\hat{v}\in \ell^1(\mathrm{Z}^d)$, $\hat{v}\ne 0-$ *номанфий функция бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $A<0$ *ва* $k\in \mathrm{T}^d$ *ларда* $\hat{H}_A(k)$ *оператор* $(-\infty,\varepsilon_{\min}(k))$ *оралиқда* $z_A(k)$ *хос қийматга эга бўлади.*

5-Теорема. *Фараз қилайлик* $d\ge 3$ *ва* $\hat{v}\in \ell^1(\mathrm{Z}^d)$, $\hat{v}\ne 0-$ *номанфий функция бўлсин.*

(i) Фараз қилайлик бирор $A<0$ *ва* $k\in \mathrm{T}^d$ *ларда*

$$-\frac{1}{2}Aa(k)\max_{s\in Z^d}\hat{v}(s)>1$$

тенгсизлик бажарилсин, бунда $a(\cdot)$ *функция (4) формула билан аниқланган. У ҳолда* $\hat{H}_A(k)$ *оператор* $(-\infty,\varepsilon_{\min}(k))$ *оралиқда* $z_A(k)$ *хос қийматга эга.*

(ii) Фараз қилайлик бирор $A<0$ *ва* $k\in \mathrm{T}^d$ *ларда*

$$-\frac{1}{2}Aa(k)\|\hat{v}\|_{\ell^1(\mathrm{Z}^d)} < 1$$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда $\hat{H}_A(k)$ *оператор* $\sigma_{ess}\big(\hat{H}_A(k)\big)$ *муҳим спектрдан ташқарида ётувчи хос қийматга эга бўлмайди.*

6- Теорема. *Фараз қилайлик* $d \geq 3$ *ва* $\hat{v} \in \ell^1(\mathrm{Z}^d)$, $\hat{v} \neq 0-$ *номанфий функция,* $k \in \mathrm{T}^d$ *квазиимпулснинг фиксирланган қиймати бўлсин ва бирор* $A_0 < 0$ *учун* $\left\|\hat{B}_{A_0}(k, \varepsilon_{\min}(k))\right\| = 1$ *тенглик бажарилсин. У ҳолда:*

(i) Барча $A < A_0 < 0$ *ларда* $\hat{H}_A(k)$ *оператор* $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ *оралиқда* $z_A(k)$ *хос қийматга эга бўлади.*

(ii) $\sigma_{ess}\big(\hat{H}_{A_0}(k)\big)$ *муҳим спектрнинг* $z = \varepsilon_{\min}(k)$ *бўсаға қиймати* $\hat{H}_{A_0}(k)$ *оператор муҳим спектрининг сингуляр нуқтаси (* $\hat{H}_{A_0}(k)$ *операторнинг ё виртуал сатҳи, ёки хос қиймати) бўлади.*

(iii) Барча $0 > A > A_0$ *ларда* $\hat{H}_A(k)$ *оператор* $\sigma_{ess}\big(\hat{H}_A(k)\big)$ *муҳим спектрдан ташқарида ётувчи хос қийматга эга бўлмайди.*

Алмашинувчан ўзаро таъсир параметрининг $A_0 < 0$ фиксирланган қиймати учун $k \in \mathrm{T}^d$ квазиимпулс қийматларининг қуйидаги қисм тўпламларини киритамиз:

$$B^{>}(A_0) := \left\{k \in \mathrm{T}^d : \left\|\hat{B}_{A_0}(k, \varepsilon_{\min}(k))\right\| > 1\right\},$$

$$B^{=}(A_0) := \left\{k \in \mathrm{T}^d : \left\|\hat{B}_{A_0}(k, \varepsilon_{\min}(k))\right\| = 1\right\},$$

$$B^{<}(A_0) := \left\{k \in \mathrm{T}^d : \left\|\hat{B}_{A_0}(k, \varepsilon_{\min}(k))\right\| < 1\right\}.$$

7-Теорема. *Фараз қилайлик* $d \geq 3$ *ва* $\hat{v} \in \ell^1(\mathrm{Z}^d)$, $\hat{v} \neq 0-$ *номанфий функция бўлсин ва бирор* $A_0 < 0$ *учун* $\left\|\hat{B}_{A_0}(k, \varepsilon_{\min}(k))\right\| = 1$ *тенглик бажарилсин. У ҳолда:*

(i) Барча $k \in B^{>}(A_0)$ *ларда* $\hat{H}_{A_0}(k)$ *оператор* $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ *оралиқда* $z_{A_0}(k)$ *хос қийматга эга бўлади.*

(ii) Барча $k \in B^{=}(A_0)$ *ларда* $\sigma_{ess}\big(\hat{H}_{A_0}(k)\big)$ *муҳим спектрнинг* $z = \varepsilon_{\min}(k)$ *бўсаға қиймати* $\hat{H}_{A_0}(k)$, $k \in \mathrm{T}^d$ *оператор муҳим спектрининг сингуляр нуқтаси (*$\hat{H}_{A_0}(k)$ *операторнинг ё виртуал сатҳи, ёки хос қиймати) бўлади.*

(iii) Барча $k \in B^{<}(A_0)$ *ларда* $\hat{H}_{A_0}(k)$ *оператор* $\sigma_{ess}\big(\hat{H}_A(k)\big)$ *муҳим спектрдан ташқарида ётувчи хос қийматга эга бўлмайди.*

ХУЛОСА

Диссертация иши панжарадаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер типли оператор ёрдамида аниқланган s-d алмашиниш моделининг муҳим ва дискрет спектрларини тадқиқ этишга; жуфт-жуфти билан қисқа масофада тортишиб таъсирлашувчи потенциалларнинг кенг синфи учун s-d алмашиниш моделига мос, икки заррачали Шредингер типли оператори муҳим спектридаги бўсаға ҳодисасини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Бир ва икки ўлчамли панжаралардаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер типли оператор ёрдамида аниқланган s-d алмашиниш моделининг муҳим спектрдан чапда ётувчи ягона хос қиймати мавжудлиги исботланган.

2. Ўлчами учдан кам бўлмаган панжаралардаги сони иккидан ошмайдиган заррачалар системасига мос, нуқтада таъсирлашувчи икки заррачали Шредингер типли оператор ёрдамида аниқланган s-d алмашиниш моделининг муҳим спектрдан чапда ётувчи ягона хос қиймати мавжуд ёки мавжуд эмаслиги ҳамда муҳим спектр чап чеккасининг виртуал сатҳ ёки хос қиймат бўлиши оператор параметрларига боғлиқ ҳолда аниқланган.

3. Алмашинувчан ўзаро таъсир параметри ва квазиимпулснинг барча қийматларида s-d алмашиниш моделига мос, бир ва икки ўлчамли панжаралардаги жуфт-жуфти билан қисқа масофада таъсирлашувчи потенциал ёрдамида аниқланган икки заррачали Шредингер типли операторининг муҳим спектрдан чапда ётувчи хос қиймати мавжудлиги кўрсатилган.

4. s-d алмашиниш моделига мос, ўлчами учдан кам бўлмаган панжаралардаги жуфт-жуфти билан қисқа масофада таъсирлашувчи потенциал ёрдамида аниқланган икки заррачали Шредингер типли операторнинг муҳим спектрдан чапда ётувчи хос қиймати мавжуд ёки мавжуд эмаслиги ҳамда муҳим спектр чап чеккасининг сингуляр нуқта бўлиши алмашинувчан ўзаро таъсир параметри ва квазиимпулснинг қийматларига боғлиқ ҳолда аниқланган.

5. Квазиимпулснинг қиймати фиксирланиб, алмашинувчан ўзаро таъсир параметри қиймати ўзгарганда ёки алмашинувчан ўзаро таъсир параметри қиймати фиксирланиб, квазиимпулснинг қиймати ўзгарганда s-d алмашиниш моделига мос, ўлчами учдан кам бўлмаган панжаралардаги жуфт-жуфти билан қисқа масофада таъсирлашувчи потенциал ёрдамида аниқланган икки заррачали Шредингер типли оператори биринчи хос қийматининг муҳим спектрдан чиқиб пайдо бўлиши ва унинг муҳим спектрга ютилиб йўқолиши механизми аниқланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.27.06.2017.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ
ПРИ САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

БОЛТАЕВ АСОМИДДИН ТУЛКИНОВИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЕ С НЕСОХРАНЯЮЩИМСЯ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Самарканд – 2019

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.1.PhD/FM109.

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Лакаев Саидахмат Норжигитович** доктор физико-математических наук, профессор, академик
Официальные оппоненты:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Хайруллаев Исматилло Нуриллаевич кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Национальный университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится «____» ______________2019 года в ____ часов на заседании Научного совета PhD.27.06.2017.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2019 года.
(протокол рассылки №_______ от «____» _______________2019 года).

А.С. Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

И.А.Икромов
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, приводятся к исследованию обобщенных моделей Фридрихса, соответствующих системе с несохраняющимся числом частиц на решетке, в частности s-d обменной модели, ассоциированной с системой, состоящей из не более чем двух частиц на решетке. Модель Бозе-Хаббарда, в частности, двухчастичные операторы Шредингера на решетке, используемые для описания существования устойчивых сложных объектов в упорядоченных средах, является теоретическим обоснованием экспериментального наблюдения и теоретической базой для применения. Поэтому развитие исследования операторов Шредингера и обобщенных моделей Фридрихса, в частности s-d обменной модели является одним из приоритетных направлений.

В настоящее время в мире одной из важнейших задач математического анализа и его приложения является задача об исследовании спектров и резонансов самосопряженных операторов. Следует отметить, что эта задача имеет тесную связь с исследованием спектров и резонансов обобщенной модели Фридрихса, соответствующей системе, состоящей из не более чем двух частиц на решетке. В частности, в настоящее время актуальную роль играет определение обобщенной модели Фридрихса, соответствующей системе состоящей из не более чем двух частиц на решетке, определенной с помощью двухчастичного оператора Шредингера с контактным взаимодейтвием, как самосопряженный ограниченный оператор и исследование её спектральных свойств. В связи с этим реализация целевых научных исследований в следующих направлениях является одной из важных задач: описать местонахождение существенного спектра обобщенной модели Фридрихса, в частности s-d обменной модели, соответствующей системе, состоящей из не более чем двух частиц на решетке; исследовать пороговые явления в спектре двухчастичного оператора типа Шредингера, ассоциированного с s-d обменной моделью на решетке.

В нашей стране за годы независимости большое внимание уделялось и продолжает уделяться направлениям современного математического анализа, имеющим фундаментальное и прикладное значения. В частности, особое внимание было уделено исследованию моделей Фридрихса, соответствующих системам с сохраняющимся и несохраняющимся числом частиц. Значительные результаты были достигнуты по нахождению непрерывного спектра, собственных значений, появления и поглощения собственных значений, числу собственных значений обобщенных моделей Фридрихса. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук, на уровне международных стандартов по математике, физике, прикладной математике, обозначено основной задачей и направлением деятельности[1]. Развитие квантовой теории поля и спектральной теории линейных операторов играет важную роль в исполнении постановления.

Исследования данной диссертации в определенной степени служит решению задач, поставленных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и № УП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Основные задачи атомной и молекулярной физики, физики твердого тела, статистической физики, математической физики и квантовой теории поля приводятся к изучению спектральных свойств специального класса линейных ограниченных самосопряженных операторов, так называемых модели Фридрихса, s-d обменной модели и модели Бозе-Хаббарда.

Впервые К.О.Фридрихсом были введены, в качестве модели теории возмущений самосопряженных операторов, оператор умножения на независимую переменную и его возмущение с помощью интегрального оператора. Позднее, в работах российских ученых О.А.Ладыженской и Л.Д.Фаддеева этот оператор назывался моделью Фридрихса и задача изучения оператора Шредингера приведена к задаче изучения модели Фридрихса. Кратность непрерывного спектра модели Фридрихса постоянная, поэтому С.Н.Лакаевом была введена обобщенная модель Фридрихса, когда кратность непрерывного спектра меняется, т.е. непостоянная. Спектральные свойства этой модели, т.е. непрерывный спектр, собственные значения и резонансы, появление и поглощение собственных значений и конечность числа собственных значений изучены в работах Р.А.Минлоса, С.Н.Лакаева, Ж.И.Абдуллаева, С.А.Степена, С.Албеверио, Е.Л.Лакштанова, Э.Р.Акчурина, И.А.Икромова, М.Э.Муминова, Ф.Ш.Шарипова, З.Э.Муминова, Ю.Х.Эшкобилова, Т.Х.Расулова, Ш.М.Латипова и Ш.Х.Курбанова.

В работах С.Н.Лакаева, Ж.И.Абдуллаева изучены собственные значения и резонансы обобщенной модели Фридрихса системы, состоящей из не более чем двух частиц, и доказана конечность их числа.

В работах С.А.Степена и М.Э.Муминова изучены спектральные свойства несамосопряженной модели Фридрихса, в частности, установлены

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии наук Республики Узбекистан»

условия конечности числа собственных значений. В настоящее время развитие исследования спектральных свойств обобщенной модели Фридрихса, в частности s-d обменной модели является одним из существенных задач.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф4-ФА-Ф079 «Спектральный анализ гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке» (2012-2016 гг.) и ОТ-Ф4-66 «Модели системы с ограниченным числом частиц на решетке. Существеный и дискретный спектры операторов энергии» (2017-2018 гг.) Самаркандского государственного университета.

Целью исследования является следующее: исследования существенного и дискретного спектров s-d обменной модели, ассоциированной с системой, состоящей из не более чем двух частиц на решетке и двухчастичного оператора типа Шредингера, ассоциированного с s-d обменной моделью.

Задачи исследования:

доказать существование единственного собственного значения, лежащего левее существенного спектра s-d обменной модели, ассоциированной с системой, состоящей из не более чем двух частиц на одномерной и двумерной решетках, определенной с помощью двухчастичного оператора типа Шредингера с контактным взаимодействием;

установить факт наличия или отсутствия единственного собственного значения, лежащего левее существенного спектра, а также наличие виртуального уровня или собственного значения на левом пороге существенного спектра s-d обменной модели, ассоциированной с системой состоящей из не более чем двух частиц на решетке, размерности не меньше трех, определенной с помощью двухчастичного оператора типа Шредингера с контактным взаимодействием, в зависимости от значения параметра обменного взаимодействия и квазиимпульса системы;

показать наличие собственных значений, лежащих левее существенного спектра двухчастичного оператора типа Шредингера, определенного с помощью парных короткодействующих потенциалов на одномерной и двумерной решетках, ассоциированного с s-d обменной моделью;

установить факт наличия или отсутствия собственного значения, лежащего левее существенного спектра, а также наличие сингулярной точки на левом пороге существенного спектра двухчастичного оператора типа Шредингера, определенного с помощью парных короткодействующих потенциалов на решетке, размерности не меньше трех, ассоциированного с s-d обменной моделью, в зависимости от значения параметра обменного взаимодействия и квазиимпульса системы.

Объект исследования - s-d обменная модель, ассоциированная с системой, состоящей из не более чем двух частиц на решетке и двухчастичный оператор типа Шредингера, ассоциированный с s-d обменной моделью.

Предмет исследования - спектральный анализ s-d обменной модели, ассоциированной с системой, состоящей из не более чем двух частиц на решетке и двухчастичный оператор типа Шредингера, ассоциированный с s-d обменной моделью.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, функционального анализа, спектральной теории самосопряженных операторов, теории функций комплексного переменного и математической физики.

Научная новизна исследования:

доказано существование единственного собственного значения, лежащего левее существенного спектра s-d обменной модели, ассоциированной с системой, состоящей из не более чем двух частиц на одномерной и двумерной решетках, определенной с помощью двухчастичного оператора типа Шредингера с контактным взаимодействием;

установлен факт наличия или отсутствия единственного собственного значения, лежащего левее существенного спектра, а также наличие виртуального уровня или собственного значения на левом пороге существенного спектра s-d обменной модели, ассоциированной с системой, состоящей из не более чем двух частиц на решетке, размерности не меньше трех, определенной с помощью двухчастичного оператора типа Шредингера с контактным взаимодействием, в зависимости от значения параметра обменного взаимодействия и квазиимпульса системы;

показано наличие собственных значений, лежащих левее существенного спектра двухчастичного оператора типа Шредингера, определенного с помощью парных короткодействующих потенциалов на одномерной и двумерной решетках, ассоциированного с s-d обменной моделью;

установлен факт наличия или отсутствия собственного значения, лежащего левее существенного спектра, а также наличие сингулярной точки на левом пороге существенного спектра двухчастичного оператора типа Шредингера, определенного с помощью парных короткодействующих потенциалов на решетке, размерности не меньше трех, ассоциированного с s-d обменной моделью, в зависимости от значения параметра обменного взаимодействия и квазиимпульса системы.

Практические результаты исследования состоят в применении выводов об аналитичности связанных состояний обобщенной модели Фридрихса при исследовании качественных свойств экспериментальных наблюдений и численных вычислений в физике твердого тела и квантовой механике.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов математического анализа, математической физики, функционального анализа, спектральной теории самосопряженных операторов и теории функций комплексного переменного, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что они могут быть использованы в спектральной теории самосопряженных операторов, которые возникают в квантовой механике, физике твердого тела, квантовой теории поля, в частности, при решении задач, связанных со спектром оператора энергии систем одно и двух частиц на решетке.

Практическое значение диссертационного исследования определяется тем, что полученные в работе научные результаты могут служит теоретической основой экспериментальных наблюдений, проводимых в физике твердого тела и квантовой механике.

Внедрение результатов исследования. В основе полученных результатов по спектральному анализу обобщенной модели Фридрихса, соответствующей некоторой системе с несохраняющимся числом частиц:

способы доказания существования собственного значения s-d обменной модели, ассоциированной с системой, состоящей из не более чем двух частиц на решетке и двухчастичного оператора типа Шредингера, ассоциированного с s-d обменной моделью были использованы в исследовательском проекте Q.J130000.2626.14J72 для двухчастичных операторов Шредингера на алмазной решетке (Университет технологий Малайзии, справка от 18 апрелья 2019 года). Применение этих научных результатов дала возможность показать конечность дискретного спектра, лежащего левее существенного спектра оператора Шредингера на алмазной решетке;

полученные результаты в диссертации о существовании единственного собственного значения, s-d обменной модели, ассоциированной с системой, состоящей из не более чем двух частиц на решетке и наличие собственных значений, двухчастичного оператора типа Шредингера на решетке, ассоциированного с s-d обменной модели были использованы в исследовательском проекте Ф-4-17 «Разработка новых методов исследования систем нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений, а также осцилляторных интегралов и их применение» при определении индекса вибрации интеграла колебаний осцилляторных интегралов (Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан, справка от 11 июнья 2019 года № 89-03-2434). Использование этих научных результатов позволило найти индекс вибрации интеграла колебаний, обнаруженного по дисперсионным соотношениям оператору Шредингера.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 3 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов иследования. По теме диссертации опубликовано 12 научных работ, из них 4 в научных изданиях, входящих в перечень предложенный Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных результатов докторских диссертаций, в том числе 1 статья опубликована в зарубежном журнале и 3- в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 98 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные сведения»**, приведены необходимые предварительные сведения и утверждения, в частности, теоремы спектральной теории и теории возмущений самосопряженных операторов. Введено координатное и импульсное представления сужения s-d обменной модели на инвариантное подпространство Фоковского пространства, ассоциированной к гамильтониану системы, состоящей из не более чем двух частиц на решетке, взаимодействующих с общим потенциалом. Двухчастичный гамильтониан, ассоциированный с s-d обменной моделью приведен в двухчастичный оператор типа Шредингера.

Вторая глава диссертации, названная **«Связанные состояния s-d обменной модели, ассоциированной с системой, состоящей из не более чем двух частиц на решетке»,** посвящена исследованию спектральных свойств s-d обменной модели, ассоциированной к гамильтониану системы, состоящей из не более чем двух частиц на решетке, определенной с помощью операторов рождения и уничтожения, а также двухчастичного оператора типа Шредингера с контактным взаимодействием.

Пусть Z^d – d – мерная кубическая решетка, $d \geq 1$, и $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$ есть гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций и $\ell^1(\mathrm{Z}^d)$ есть банахово пространство суммируемых функций, определенных на Z^d.

Пусть $\mathrm{T}^d = (-\pi, \pi]^d$ – d-мерный тор и $\eta(\mathrm{d}p) = \dfrac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}$ – нормированная мера Хаара, введенная на торе T^d.

Пусть $\hat{\mathsf{H}}_0 = \left\{ \hat{f}_0 : \mathrm{Z}^d \to \mathrm{X} \| \ \hat{f}_0(x) = 0, \quad x \in \mathrm{Z}^d \setminus \{\theta\} \right\}$ есть подпространство пространства $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$.

Пусть $\hat{\mathsf{H}} = \hat{\mathsf{H}}_0 \oplus \hat{\mathsf{H}}_1$ есть двухканальное гильбертово пространство, состоящее из одномерного гильбертова пространства $\hat{\mathsf{H}}_0$ и гильбертова пространства $\hat{\mathsf{H}}_1 := \ell^2(\mathrm{Z}^d)$.

Заметим, что пространство $\hat{\mathsf{H}}$, соответствующее системе, состоящей из не более чем двух частиц на решетке Z^d, является подпространством

Фоковского пространства системы, состоящей из бесконечного числа частиц на решетке Z^d, в которой действует s-d модель.

Для любого фиксированного $k \in \mathrm{T}^d$ и $d \geq 1$ определим оператор $\hat{F}_A(k)$ – сужения s-d обменной модели, ассоциированной к гамильтониану системы, состоящей из не более чем двух частиц на решетке Z^d, определенной с помощью операторов рождения и уничтожения, а также двухчастичного оператора типа Шредингера с контактным взаимодействием, на пространство $\hat{\mathrm{H}}$.

В координатном представлении оператор $\hat{F}_A(k)$, $k \in \mathrm{T}^d$, действует в гильбертовом пространстве $\hat{\mathrm{H}}$ по формуле

$$\hat{F}_A(k)\begin{pmatrix} \hat{f}_0(x) \\ \hat{f}_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\hat{E}_e(k)\hat{f}_0\right)(x) + \left(\hat{C}^*\hat{f}_1\right)(x) \\ \left(\hat{C}\,\hat{f}_0\right)(x) + \left(\hat{H}_A(k)\hat{f}_1\right)(x) \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\hat{C}^* : \hat{\mathrm{H}}_1 \to \hat{\mathrm{H}}_0, \qquad \left(\hat{C}^*\hat{f}_1\right)(x) = -\frac{A}{2}\sqrt{2S}\,\delta_{x0}\,\hat{f}_1(x)$$

оператор рождения и

$$\hat{C} : \hat{\mathrm{H}}_0 \to \hat{\mathrm{H}}_1, \qquad \left(\hat{C}\,\hat{f}_0\right)(x) = -\frac{A}{2}\sqrt{2S}\,\hat{f}_0(x)$$

оператор уничтожения, $S > 0$ и δ_{x0} – символ Кронекера. $\hat{E}_e(k)$, $k \in \mathrm{T}^d$, есть скалярный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\hat{\mathrm{H}}_0$ по формуле

$$\left(\hat{E}_e(k)\hat{f}_0\right)(x) = \frac{1}{e}\varepsilon(k)\hat{f}_0(x)$$

где $e > 0$ масса электрона и

$$\varepsilon(k) = 2\sum_{i=1}^{d}\left(1 - \cos k_i\right).$$

Дискретный оператор $\hat{H}_A(k)$, $k \in \mathrm{T}^d$, $d \geq 1$, системы двух частиц, ассоциированный с s-d обменной моделью, при фиксированном квазиимпульсе действует в $\hat{\mathrm{H}}_1$ по формуле

$$\hat{H}_A(k) = \hat{H}_0(k) + \frac{A}{2}\hat{V}, \quad k \in \mathrm{T}^d, \tag{1}$$

где $\hat{H}_0(k), k \in \mathrm{T}^d$, оператор типа свертки, задающийся как

$$\left(\hat{H}_0(k)\hat{f}_1\right)(x) = \sum_{y \in \mathrm{Z}^d} \hat{\varepsilon}_k(x-y)\hat{f}_1(y), \quad \hat{f}_1 \in \hat{\mathrm{H}}_1,$$

где

$$\hat{\varepsilon}_k(x) = \frac{1}{e}\hat{\varepsilon}(x) + \frac{1}{m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k,x)}\hat{\varepsilon}(-x) - AS\delta_{x0}.$$

Здесь $m > 0$ масса магнона, $(k,x) = \sum_{i=1}^{d} k_i x_i, \quad k \in \mathrm{T}^d, x \in \mathrm{Z}^d$ и

$$\hat{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 2d, & \text{если} \quad x = 0 \\ -1, & \text{если} \quad |x| = 1, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > 1 \end{cases} \qquad |x| = |x_1| + \ldots + |x_d|.$$

Оператор $\hat{V}$ определяется как оператор умножения на функцию $\hat{v}(\cdot)$:

$$\left(\hat{V}\hat{f}_1\right)(x) = \hat{v}(x)\hat{f}_1(x), \quad \hat{f}_1 \in \hat{\mathrm{H}}_1,$$

где

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 0 \\ 0, & \text{если} \quad x \neq 0 \end{cases}.$$

Оператор возмущения $\hat{V}$ - компактный, тогда из теоремы Г. Вейля следует, что существенный спектр оператора $\hat{H}_A(k)$ совпадает с существенным спектром оператора $\hat{H}_0(k)$,

$$\sigma_{ess}\left(\hat{H}_A(k)\right) = \sigma_{ess}\left(\hat{H}_0(k)\right) = \sigma\left(\hat{H}_0(k)\right) = \left[\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)\right],$$

где

$$\varepsilon_{\min}(k) := \min_{q \in \mathrm{T}^d} \varepsilon_k(q) = 2\sum_{i=1}^{d}\left[\frac{e+m}{em} - C_{em}(k_i)\right] - AS$$
$$\varepsilon_{\max}(k) := \max_{q \in \mathrm{T}^d} \varepsilon_k(q) = 2\sum_{i=1}^{d}\left[\frac{e+m}{em} + C_{em}(k_i)\right] - AS,$$

Здесь функция $\varepsilon_k(\cdot)$ является преобразованием Фурье функции $\hat{\varepsilon}_k(\cdot)$, т.е.

$$\varepsilon_k(q) = \left(\Phi\,\hat{\varepsilon}_k\right)(q) = \sum_{x \in \mathrm{Z}^d} \hat{\varepsilon}_k(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q,x)}$$

и

$$C_{em}(k_i)=\frac{1}{em}\sqrt{e^2+m^2+2em\cos k_i} \tag{2}$$

Заметим, что оператор $\hat{F}_A(k),\ k\in \mathrm{T}^d$, имеет существенный спектр

$$\sigma_{ess}\left(\hat{F}_A(k)\right)=\sigma_{ess}\left(\hat{H}_A(k)\right).$$

Замечание 1. *Пусть* $e=m$ *и у вектора* $k=(k_1,\ldots,k_d)\in \mathrm{T}^d$ *ровно* $n\le d$ *координат равны* π, *тогда функция* $\varepsilon_k(\cdot)$ *представляется в виде*

$$\varepsilon_k(q)=\frac{4}{e}\sum_{j=1}^{d-n}\left[1-\cos\frac{k_j}{2}\cos\left(q_j-\frac{k_j}{2}\right)\right]-AS.$$

В результате задача исследования спектральных свойств оператора $\hat{F}_A(k),\ k\in \mathrm{T}^d$, *сводится к* $(d-n)$ *-мерному случаю. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности, мы предположим, что* $e\neq m$.

Теорема 1. *Пусть* $d=1,2$ *и* $m(k)=\min\left\{\frac{1}{e}\varepsilon(k),\varepsilon_{\min}(k)\right\}$. *Тогда для любого* $k\in \mathrm{T}^d$ *оператор* $\hat{F}_A(k)$ *имеет единственное собственное значение* $z_A(k)$ *на полуоси* $(-\infty,m(k))$. *Соответствующий собственный вектор* $\hat{f}_k\in \hat{\mathrm{H}}$ *имеет вид:*

$$\hat{f}_k=(\hat{f}_{0,k},\hat{f}_{1,k}),\quad \begin{cases} \hat{f}_{0,k}(x)=\dfrac{\frac{A}{2}\sqrt{2S}C\delta_{x0}}{\frac{1}{e}\varepsilon(k)-z_A(k)}\in \hat{\mathrm{H}}_0 \\ \hat{f}_{1,k}(x)=\dfrac{AC}{2}\left(\dfrac{AS}{\frac{1}{e}\varepsilon(k)-z_A(k)}-1\right)\displaystyle\int_{\mathrm{T}^d}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q,x)}\eta(\mathrm{d}q)}{\varepsilon_k(q)-z_A(k)}\in \hat{\mathrm{H}}_1, \end{cases} \tag{3}$$

где $C-$ *нормирующий множитель. При этом функция* $z_A(\cdot)$ *является аналитической функцией в* T^d. *Отображение* $\hat{f}:\mathrm{T}^d\to\hat{\mathrm{H}}$, $k\to\hat{f}_k\in\hat{\mathrm{H}}$, *является векторнозначным аналитическим отображением.*

Введем следующие подмножества значений квазиимпульса $k\in \mathrm{T}^d$ для фиксированных $e,m,S>0,A<0$:

$$D^{\le}=\left\{k\in \mathrm{T}^d:\frac{1}{e}\varepsilon(k)-\varepsilon_{\min}(k)\le 0\right\},\ D^{>}=\left\{k\in \mathrm{T}^d:\frac{1}{e}\varepsilon(k)-\varepsilon_{\min}(k)>0\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $d\ge 3$. *Тогда для любого* $k\in D^{\le}$ *оператор* $\hat{F}_A(k)$

имеет единственное собственное значение $z_A(k)$ *на полуоси* $(-\infty, \frac{1}{e}\varepsilon(k))$. *Соответствующий собственный вектор* $\hat{f}_k \in \hat{\mathrm{H}}$ *имеет вид (3).*

Для любого $k \in \mathrm{T}^d$ определим функцию $a(k;\cdot)$, регулярную в $\mathrm{X} \setminus \sigma_{ess}\left(\hat{F}_A(k)\right)$, следующим образом:

$$a(k;\cdot) = \int_{\mathrm{T}^d} \frac{\eta(\mathrm{d}q)}{\varepsilon_k(q) - z}.$$

Пусть $d \geq 3$. Заметим, что для любого $k \in \mathrm{T}^d$ интеграл

$$a(k) := \lim_{z \to \varepsilon_{\min}(k)-} a(k;z) = \int_{\mathrm{T}^d} \frac{\eta(\mathrm{d}q)}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)} \tag{4}$$

существует и определяет положительную голоморфную функцию в T^d.

Пусть $\ell^0(\mathrm{Z}^d)$ – банахово пространство функций на Z^d, стремящихся к нулю на бесконечности.

Определение 1. *Пусть* $d \geq 3$. *Число* $z = \varepsilon_{\min}(k)$ *называется виртуальным уровнем оператора* $\hat{F}_A(k)$, $k \in \mathrm{T}^d$, *если уравнение* $\hat{F}_A(k)\hat{f} = \varepsilon_{\min}(k)\hat{f}$ *имеет ненулевое решение* $\hat{f} := \hat{f}_k = (\hat{f}_{0,k}, \hat{f}_{1,k})$, $\hat{f}_{0,k} \in \hat{\mathrm{H}}_0$, $\hat{f}_{1,k} \in \ell^0(\mathrm{Z}^d) \setminus \ell^2(\mathrm{Z}^d)$. *При этом решение* $\hat{f}$ *назавем виртуальным состоянием оператора* $\hat{F}_A(k)$.

Пусть $d \geq 3$. Для любого $k \in \mathrm{T}^d$ введем обозначение:

$$A_0(k) := \frac{-2\mu(k)}{2S + a(k)\mu(k)} \leq 0,$$

где $\mu(k) = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{d}\left[\frac{1}{e^2} - \left[C_{em}(k_i) - \frac{1}{m}\right]^2\right]$. Здесь $C_{em}(k_i)$ и $a(k)$ определены формулами (2) и (4) соответственно.

Введем следующие подмножества значений квазиимульса $k \in D^{>}$ для фиксированного значения обменного взаимодействия $A < 0$:

$$B^{<}(A) = \left\{k \in D^{>}: \quad A < A_0(k)\right\},$$
$$B^{=}(A) = \left\{k \in D^{>}: \quad A = A_0(k)\right\},$$
$$B^{>}(A) = \left\{k \in D^{>}: \quad A > A_0(k)\right\}.$$

Теорема 3. *(i) Если* $d \geq 3$ *и* $k \in B^{<}(A)$, *то оператор* $\hat{F}_A(k)$ *имеет* *единственное собственное значение* $z_A(k)$ *на полуоси* $(-\infty,\varepsilon_{\min}(k))$. *Соответствующий собственный вектор* $\hat f := \hat f_k = (\hat f_{0,k}, \hat f_{1,k}),\ \hat f_{0,k} \in \hat{\mathrm{H}}_0,\quad \hat f_{1,k} \in \hat{\mathrm{H}}_1$ *имеет вид (3).*

(ii) Если $d \ge 3$ *и* $k \in B^{>}(A)$ *, то оператор* $\hat F_A(k)$ *не имеет собственного значения, лежащего вне существенного спектра* $\sigma_{ess}\left(\hat F_A(k)\right)$.

(iii) Если $d \ge 3, 4$ *и* $k \in B^{=}(A)$ *, то число* $z = \varepsilon_{\min}(k)$ *является виртуальным уровнем оператора* $\hat F_A(k)$ *и виртуальное состояние имеет вид*:

$$\hat f := \hat f_k = (\hat f_{0,k}, \hat f_{1,k}),\qquad \begin{cases} \hat f_{0,k}(x) = \dfrac{\frac{A}{2}\sqrt{2S}C\delta_{x0}}{\frac{1}{e}\varepsilon(k) - \varepsilon_{\min}(k)} \in \hat{\mathrm{H}}_0 \\ \hat f_{1,k}(x) = \dfrac{AC}{2}\left(\dfrac{AS}{\frac{1}{e}\varepsilon(k) - \varepsilon_{\min}(k)} - 1\right) \times \\ \times \displaystyle\int_{\mathrm{T}^d} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q,x)}\eta(\mathrm{d}q)}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)} \in \ell^0(\mathrm{Z}^d) \setminus \ell^2(\mathrm{Z}^d). \end{cases} \tag{5}$$

(iv) Если $d \ge 5$ *и* $k \in B^{=}(A)$ *, то число* $z = \varepsilon_{\min}(k)$ *является собственным значением оператора* $\hat F_A(k)$ *и соответствующий собственный вектор* $\hat f := \hat f_k = (\hat f_{0,k}, \hat f_{1,k})$, *имеет вид (5), где* $\hat f_{0,k} \in \hat{\mathrm{H}}_0,\quad \hat f_{1,k} \in \hat{\mathrm{H}}_1$.

В третьей главе диссертации, названной **«Пороговые явления в спектре двухчастичного оператора типа Шредингера, ассоциированного с s-d обменной моделью на решетке»,** посвящена изучению для широкого класса парных короткодействующих потенциалов притяжения, пороговые явления в спектре двухчастичного оператора типа Шредингера $\hat H_A(k), k \in \mathrm{T}^d$, ассоциированого с оператором энергии s-d обменной модели определенной по формуле (1).

Пусть $L^2(\mathrm{T}^d) := L^2(\mathrm{T}^d, \eta)$ – есть гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на T^d с мерой Хаара.

Пусть $d \ge 1$ и $\hat v \in \ell^1(\mathrm{Z}^d)$ – неотрицательная функция. Для любого $z < \varepsilon_{\min}(k)$ определим интегральный оператор Бирмана-Швингера $\hat B_A(k,z), k \in \mathrm{T}^d$, действующий в $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$ следующим образом:

$$\hat{B}_A(k,z) := -\frac{A}{2}\hat{V}^{\frac{1}{2}}\hat{R}_0(k,z)\hat{V}^{\frac{1}{2}}.$$

В данной формуле $\hat{R}_0(k,z) := \Phi^{-1}R_0(k,z)\Phi$ и $R_0(k,z)$ суть резольвенты операторов $\hat{H}_0(k)$ и $H_0(k) := \Phi\hat{H}_0(k)\Phi^{-1}$ в точке $z \in \mathrm{X} \setminus \sigma_{ess}\left(\hat{H}_0(k)\right)$, а $\hat{V}^{\frac{1}{2}}$ – положительный квадратный корень из неотрицательного оператора $\hat{V}$:

$$\hat{V}^{\frac{1}{2}}\hat{f}(x) = \hat{v}^{\frac{1}{2}}(x)\hat{f}(x), \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathrm{Z}^d).$$

Ядро $\hat{\mathrm{B}}(k,z;\cdot,\cdot)$, $z < \varepsilon_{\min}(k)$, оператора Бирмана-Швингера $\hat{B}_A(k,z)$ имеет вид

$$\hat{\mathrm{B}}(k,z;x,y) := -\frac{A}{2}\hat{v}^{\frac{1}{2}}(x)\hat{\mathrm{P}}_0(k,z;y-x)\hat{v}^{\frac{1}{2}}(y), \quad x,y \in Z^d,$$

где

$$\hat{\mathrm{P}}_0(k,z;x) := \int_{\mathrm{T}^d} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q,x)}\eta(\mathrm{d}q)}{\varepsilon_k(q) - z}, \quad x \in \mathrm{Z}^d.$$

Пусть $d \geq 3$. Для любого $k \in \mathrm{T}^d$ и всех $x,y \in \mathrm{Z}^d$ определим функции

$$\hat{\mathrm{P}}_0(k,\varepsilon_{\min}(k);x) := \int_{\mathrm{T}^d} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q,x)}\eta(\mathrm{d}q)}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)},$$

$$\hat{\mathrm{B}}(k,\varepsilon_{\min}(k);x,y) := -\frac{A}{2}\hat{v}^{\frac{1}{2}}(x)\hat{\mathrm{P}}_0(k,\varepsilon_{\min}(k);y-x)\hat{v}^{\frac{1}{2}}(y)$$

и сформулируем некоторые их свойства.

Лемма 1. *Пусть* $d \geq 3$ *и* $\hat{v} \in \ell^1(\mathrm{Z}^d)$ *– неотрицательная функция.*

(i) для любого $x \in \mathrm{Z}^d$ *функция* $\hat{\mathrm{P}}_0(\cdot,\varepsilon_{\min}(\cdot);x)$ *голоморфна в* T^d.

(ii) для любого $x,y \in \mathrm{Z}^d$ *ядро* $\hat{\mathrm{B}}(\cdot,\varepsilon_{\min}(\cdot);x,y)$ *голоморфно в* T^d.

(iii) для любого $k \in \mathrm{T}^d$ *ядро* $\hat{\mathrm{B}}(k,\varepsilon_{\min}(k);\cdot,\cdot)$ *является квадратично-суммируемой функцией на* $\mathrm{Z}^d \times \mathrm{Z}^d$.

Лемма 1 позволяет ввести следующее определение.

Определение 2. *Пусть* $d \geq 3$ *и* $\hat{v} \in \ell^1(\mathrm{Z}^d)$ *– неотрицательная функция. Обобщенный (предельный) оператор Бирмана-Швингера* $\hat{B}_A(k,\varepsilon_{\min}(k))$, $k \in \mathrm{T}^d$, *есть интегральный оператор, действующий в* $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$ *по формуле*

$$\left[\hat{B}_A(k,\varepsilon_{\min}(k))\hat{\psi}\right](x) := \frac{A}{2}\hat{V}^{\frac{1}{2}}\hat{R}_0(k,\varepsilon_{\min}(k))\hat{V}^{\frac{1}{2}}\hat{\psi}\ \ (x) = \sum_{y\in Z^d}\hat{\mathrm{B}}(k,\varepsilon_{\min}(k);x,y)\hat{\psi}(y),$$

где

$$\left[\hat{R}_0(k,\varepsilon_{\min}(k))\hat{\psi}\right](x) := \sum_{y\in Z^d}\hat{\mathrm{P}}_0(k,\varepsilon_{\min}(k);y-x)\hat{\psi}(y), \quad \hat{\psi}\in\ell^1(\mathrm{Z}^d).$$

Из пункта (iii) леммы 1 следует, что оператор $\hat{B}_A(k,\varepsilon_{\min}(k))$, $k\in\mathrm{T}^d$, является оператором Гильберта-Шмидта.

Определение 3. *Пусть* $d\ge 3$. *Пороговое значение* $z=\varepsilon_{\min}(k)$, $k\in\mathrm{T}^d$, *существенного спектра* $\sigma_{ess}\left(\hat{H}_A(k)\right)$ *называется сингулярной (регулярной) точкой существенного спектра оператора* $\hat{H}_A(k)$, *если число 1 является (соответственно не является) собственным значением оператора* $\hat{B}_A(k,\varepsilon_{\min}(k))$.

Замечание 2. *Пусть значение* $z=\varepsilon_{\min}(k)$ *является сингулярной точкой существенного спектра оператора* $\hat{H}_A(k)$, $k\in\mathrm{T}^d$, *и пусть* $\hat{\psi}$ – *нетривиальное решение (заданное с точностью до постоянного множителя) уравнения* $\hat{B}_A(k,\varepsilon_{\min}(k))\hat{\psi}=\hat{\psi}$, $k\in\mathrm{T}^d$. *Тогда имеют место следующие утверждения.*

(i) Если $d=3{,}4$, *то функция*

$$\hat{f}=\sqrt{-\frac{A}{2}}\hat{R}_0(k,\varepsilon_{\min}(k))\hat{V}^{\frac{1}{2}}\hat{\psi}, \quad \hat{\psi}\in\ell^2(\mathrm{Z}^d) \tag{6}$$

есть решение уравнения $\hat{H}_A(k)\hat{f}=\varepsilon_{\min}(k)\hat{f}$ *и принадлежит пространству* $\ell^0(\mathrm{Z}^d)$. *В случае* $\hat{f}\in\ell^0(\mathrm{Z}^d)\setminus\ell^2(\mathrm{Z}^d)$ *сингулярная точка* $z=\varepsilon_{\min}(k)$ *называется виртуальным уровнем оператора* $\hat{H}_A(k)$, $k\in\mathrm{T}^d$.

(ii) Если $d\ge 5$, *то решение* $\hat{f}$ *уравнения* $\hat{H}_A(k)\hat{f}=\varepsilon_{\min}(k)\hat{f}$ *имеет вид (6) и принадлежит пространству* $\ell^2(\mathrm{Z}^d)$, *т.е. в этом случае сингулярная точка* $z=\varepsilon_{\min}(k)$ *есть собственное значение оператора* $\hat{H}_A(k)$, $k\in\mathrm{T}^d$.

Теорема 4. *Пусть* $d=1,2$ *и* $\hat{v}\in\ell^1(\mathrm{Z}^d)$ – *неотрицательная ненулевая (не равная тождественно нулю) функция. Тогда для любых* $A<0$ *и* $k\in\mathrm{T}^d$ *оператор* $\hat{H}_A(k)$ *имеет собственное значение* $z_A(k)$ *на полуоси* $(-\infty,\varepsilon_{\min}(k))$.

Теорема 5. *Пусть* $d\ge 3$ *и* $\hat{v}\in\ell^1(\mathrm{Z}^d)$ – *неотрицательная ненулевая функция. Имеют место следующие утверждения.*

(i) Пусть при некоторых $A<0$ *и* $k\in\mathrm{T}^d$ *выполняется неравенство*

$$-\frac{1}{2}Aa(k)\max_{s\in Z^d}\hat{v}(s)>1,$$

где функция $a(k)$ *определена в (4). Тогда оператор* $\hat{H}_A(k)$ *имеет собственное значение* $z_A(k)$ *на полуоси* $(-\infty,\varepsilon_{\min}(k))$.

(ii) Пусть при некоторых $A<0$ *и* $k\in T^d$ *выполняется неравенство*

$$-\frac{1}{2}Aa(k)\|\hat{v}\|_{\ell^1(Z^d)}<1.$$

Тогда оператор $\hat{H}_A(k)$ *не имеет собственного значения, лежащего вне существенного спектра* $\sigma_{ess}\left(\hat{H}_A(k)\right)$.

Теорема 6. *Пусть* $d\geq 3$ *и* $\hat{v}\in\ell^1(Z^d)-$ *неотрицательная ненулевая функция, а* $k\in T^d-$ *фиксированное значение квазиимпульса. Пусть для некоторого* $A_0<0$ *выполняется равенство*

$$\left\|\hat{B}_{A_0}(k,\varepsilon_{\min}(k))\right\|=1.$$

Тогда:

(i) при всех $A<A_0<0$ *оператор* $\hat{H}_A(k)$ *имеет собственное значение* $z_A(k)$ *на полуоси* $(-\infty,\varepsilon_{\min}(k))$;

(ii) порог $\varepsilon_{\min}(k)$ *является сингулярной точкой существенного спектра (либо виртуальным уровнем, либо собственным значением) оператора* $\hat{H}_{A_0}(k)$.

(iii) при всех $0>A>A_0$ *оператор* $\hat{H}_A(k)$ *не имеет собственного значения, лежащего вне существенного спектра* $\sigma_{ess}\left(\hat{H}_A(k)\right)$.

Введём следующие подмножества квазиимпульса $k\in T^d$ для фиксированного значения обменного взаимодействия $A_0<0$.

$$B^{>}(A_0):=\left\{k\in T^d:\ \left\|\hat{B}_{A_0}(k,\varepsilon_{\min}(k))\right\|>1\right\},$$
$$B^{=}(A_0):=\left\{k\in T^d:\ \left\|\hat{B}_{A_0}(k,\varepsilon_{\min}(k))\right\|=1\right\},$$
$$B^{<}(A_0):=\left\{k\in T^d:\ \left\|\hat{B}_{A_0}(k,\varepsilon_{\min}(k))\right\|<1\right\}.$$

Теорема 7. *Пусть* $d\geq 3$ *и* $\hat{v}\in\ell^1(Z^d)-$ *неотрицательная ненулевая функция. Пусть для некоторого* $A_0<0$ *выполняется равенство*

$$\left\|\hat{B}_{A_0}(k,\varepsilon_{\min}(k))\right\|=1.$$

Тогда:

(i) при всех $k \in B^{>}(A_0)$ *оператор* $\hat{H}_{A_0}(k)$ *имеет собственное значение* $z_{A_0}(k)$ *на полуоси* $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$;

(ii) при всех $k \in B^{=}(A_0)$ *порог* $\varepsilon_{\min}(k)$ *является сингулярной точкой существенного спектра (либо виртуальным уровнем, либо собственным значением) оператора* $\hat{H}_{A_0}(k)$;

(iii) при всех $k \in B^{<}(A_0)$ *оператор* $\hat{H}_{A_0}(k)$ *не имеет собственного значения, лежащего вне существенного спектра* $\sigma_{ess}\left(\hat{H}_A(k)\right)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию существенного и дискретного спектра s-d обменной модели, ассоциированный к гамильтониану системы, состоящей из не более чем двух частиц на решетке и для широкого класса парных короткодействующих потенциалов притяжения, изучению пороговых явлений в спектре двухчастичного оператора типа Шредингера на решетке, ассоциированного с оператором энергии s-d обменной модели, в зависимости от параметров оператора и размерности решетки.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Доказано существование единственного собственного значения, лежащего левее существенного спектра s-d обменной модели, ассоциированной с системой, состоящей из не более чем двух частиц на одномерной и двумерной решетках, определенной с помощью двухчастичного оператора типа Шредингера с контактным взаимодействием;

2. Установлен факт наличия или отсутствия единственного собственного значения, лежащего левее существенного спектра, а также наличие виртуального уровня или собственного значения на левом пороге существенного спектра s-d обменной модели, ассоциированной с системой, состоящей из не более чем двух частиц на решетке, размерности не меньше трех, определенной с помощью двухчастичного оператора типа Шредингера с контактным взаимодействием, в зависимости от значения параметра обменного взаимодействия и квазиимпульса системы;

3. Показано наличие собственных значений, лежащих левее существенного спектра двухчастичного оператора типа Шредингера, определенного с помощью парных короткодействующих потенциалов на одномерной и двумерной решетках, ассоциированного с s-d обменной модели;

4. Установлен факт наличия или отсутствия собственного значения, лежащего левее существенного спектра, а также наличие сингулярной точки на левом пороге существенного спектра двухчастичного оператора типа Шредингера, определенного с помощью парных короткодействующих потенциалов на решетке, размерности не меньше трех, ассоциированного с

s-d обменной моделью, в зависимости от значения параметра обменного взаимодействия и квазиимпульса системы;

5. Установлен механизм появления первого собственного значения, испускаясь из существенного спектра и его исчезновения, поглощаясь в существенном спектре двухчастичного оператора типа Шредингера, определенного с помощью парных короткодействующих потенциалов на решетке, размерности не меньше трех, ассоциированного с s-d обменной моделью, для фиксированного значения квазиимпульса системы, при изменениях параметра обменного взаимодействия или для фиксированного значения параметра обменного взаимодействия, при изменении квазиимпульса системы.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) PhD.27.06.2017.FM.02.01 SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

BOLTAEV ASOMIDDIN TULKINOVICH

SPECTRAL ANALYSIS OF GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL CORRESPONDING TO SOME SYSTEM WITH A NON-CONSERVED NUMBER OF PARTICLES

01.01.01 - Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand -2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.1.PhD/FM109.

Dissertation has been prepared at Samarkand State University

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Lakaev Saidakhmat Norzhigitovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor , academician
Official opponents:	**Ganixujaev Rasul Nabiyevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Hayrullaev Ismatillo Nurillaevich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**National university of Uzbekistan**

Defense will take place «____» _____________2019 at _____ at the meeting of Scientific Council number PhD.27.06.2017.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №____) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2019 year
(Mailing report № ____________on «____» ________________2019 year)

A.S. Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

A.M. Khalkhuzhaev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

I.A. Ikromov
Vice-chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study the essential and discrete spectra of the s-d exchange model, associated with a system consisting of no more than two particles on a lattice and two particle Schrö dinger type operator, associated with the s-d exchange model.

The objects of the research work are the s-d exchange model, associated with a system consisting of no more than two particles on a lattice and the two particle Schrö dinger type operator, associated with the s-d exchange model.

Scientific novelty of the research work is as follows:

It is proved the existence of a unique eigenvalue lying to the left of the essential spectrum of the s-d exchange model, associated with a system consisting of no more than two particles on one and two dimensional lattice, interacting via two particle Schrö dinger type operator, interacting via contact potentials.

It is established that existence or absence of a unique eigenvalue lying to the left of the essential spectrum, the left threshold of the essential spectrum may be a virtual level or an eigenvalue for the s-d exchange model, associated with a system consisting of no more than two particles on the lattice, the dimension of not less than three, interacting via two particle Schrö dinger type operator, interacting via contact potentials, depends on parameters of the operator.

It is proved the existence of an eigenvalue lying to the left of the essential spectrum of the two particle Schrö dinger type operator, interacting via pairwise short-range potentials on one and two dimensional lattice, associated with the s-d exchange model.

It is established that existence or absence of an eigenvalue lying to the left of the essential spectrum, the left threshold of the essential spectrum may be a singular point for the two particle Schrö dinger type operator, interacting via pairwise short-range potentials on the lattice, the dimension of not less than three, associated with the s-d exchange model, depends on parameters of the operator.

Implementation of the research results. Based on the results obtained by Spectral analysis of generalized Friedrichs model corresponding to some system with a non-conserved number of particles:

ways of proving the existence of eigenvalue s-d exchange model associated with a system consisting of no more than two particles on the lattice and two-particle Schrödinger type operator on the lattice associated with the s-d exchange model were used in the research project Q.J130000.2626.14J7 (The University Teknologi Malaysia, Malaysia, certificate dated April 18, 2019). Using these scientific results it was possible to show the finiteness of the discrete spectrum lying out of the essential spectrum of the Shrödinger operator on diamond lattice;

the results in the thesis obtained on the existence of a unique eigenvalue, the s-d exchange model associated with a system consisting of no more than two particles on the lattice and the presence of eigenvalues, a two-particle Schrödinger type operator on the lattice associated with the s-d exchange model were used in the research project «Development of new methods for studying systems of nonlinear algebraic and differential equations, as well as oscillatory integrals and their application» F-4-17 (Ministry of Higher and Secondary Specialized Education of the Republic of Uzbekistan, a certificate from 11 June 2019 №89-03-2434). The use of these scientific results allowed us to find the vibration index of the oscillation integral, which was found from the dispersion relations for the Schrodinger operator.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 98 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. С.Н.Лакаев, А.Т.Болтаев. Пороговые явления в спектре двухчастичного оператора Шредингера на решетке // Теоретическая и математическая физика. - Москва, 2019. - т. 198. - №3. - с.418-432. (№11. Springer. IF=0.831).

2. С.Н.Лакаев, А.Т.Болтаев Связанные состояния *s–d* обменной модели // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2015,-№4, –с.63-74. (01.00.00; №6).

3. С.Н.Лакаев, А.Т.Болтаев Существование собственных значений некоторой обобщенной модели Фридрихса // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2015,-№3, –с.43-53. (01.00.00; №6).

4. А.Т.Болтаев Связанные состояния оператора типа Шредингера ассоциированного с *s–d* обменной модели // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2015,-№4, –с.27-38. (01.00.00; №6).

II бўлим (II часть; II part)

5. Ш.С.Лакаев, А.Т.Болтаев Пороговые явления в спектре двухчастичного оператора типа шредингера, ассоциированого с обменной моделью на решетке. // “Фундаментал математика муаммолари ва уларнинг татбиқлари” Республика илмий-амалий конференцияси. Навоий, 2019.

6. С.Н.Лакаев, А.Т.Болтаев Пороговые явления в спектре двух частичного оператора Шредингера на решетке. // “Mathematical analysis and its application to mathematical physics”. International conference. Samarkand, 2018.

7. А.Т.Болтаев, В.Актамова Существование связанных состояний семейства двухчастичного оператора Шредингера на решетке // Новые результаты математики и их приложения, Республиканской научно-практической конференции, Самарканд, 2018.

8. А.Т.Болтаев, О.Обилов Существование собственных значений некоторой обобщенной модели Фридрихса // Материалы научной конференции, Карши, 2016.

9. А.Т.Болтаев Связанные состояния некоторой спин-поляронной модели // Республиканской конференции с участием зарубежных ученных “Современные методы математической физики и их приложения”, Ташкент, 2015.

10. А.Т.Болтаев Существовании собственных значений *s–d* модели**.** // Математика ва уни замонавий педагогик технологиялар ёрдамида ўқитиш муаммолари, Республика илмий-амалий конференция материаллари, Навоий, 2015.

11. Ш.М.Латипов, А.Т.Болтаев О числе собственных значений двух-канальной молекулярно-резонансной модели // Международная конференция, Прикладной и Геометрический анализ, Самарканд, 2014.

12. Sh.M. Latipov., A.T. Boltayev. On the existence of eigenvalues of the two- channel *s–d* model // International seminar on mathematics and natural sciences, Samarkand, 2013.

Автореферат Самарқанд давлат университетининг
"СамДУ илмий тадқиқотлар ахборотномаси" журнали таҳририятида
таҳрирдан ўтказилди (08.06.2019 йил).

Гувоҳнома №10-3512

14.06.2019 йилда босишга рухсат этилди
Шартли босма табоғи 2,5. Қоғоз бичими $60x84_{1/16.}$
"Times" гарнитураси. Адади 100 нусха. Буюртма №16/06.

СамДЧТИ нашр-матбаа маркази босмахонасида чоп этилди.
Манзил: 140104, Самарқанд ш., Бўстонсарой кўчаси, 93