**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**
**ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ**
**DSc.03/30.07.2020.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

---

**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

**МУРАНОВ ШАХРИДДИН АБДУЛЛАЕВИЧ**

# СЎНДИРУВЧИ КЎПАЙТУВЧИЛИ ТЕБРАНУВЧАН ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ БАҲОЛАРИ

**01.01.01 – Математик анализ**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

**Самарқанд - 2020**

**УДК: 517.984**

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Оглавление автореферата диссертации**
**доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD)**
**on physical-mathematical sciences**

**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**
**ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ**
**DSc.03/30.07.2020.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

**МУРАНОВ ШАХРИДДИН АБДУЛЛАЕВИЧ**

# СЎНДИРУВЧИ КЎПАЙТУВЧИЛИ ТЕБРАНУВЧАН ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ баҳолари

**01.01.01 – Математик анализ**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

**Самарқанд - 2020**

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.2.PhD/FM455 рақам билан рўйхатга олинган.**

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгашнинг веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

| | |
|---|---|
| **Илмий раҳбар:** | **Икромов Исроил Акрамович**<br>физика-математика фанлари доктори, профессор |
| **Расмий оппонентлар:** | **Халмухамедов Алимжан Рахимович**<br>физика-математика фанлари доктори, профессор |
| | **Қаршибаев Хайрулло Қиличович**<br>физика-математика фанлари номзоди |
| **Етакчи ташкилот:** | **Урганч давлат университети** |

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги DSc.03/30.07.2020.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2020 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2020 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

**А.С. Солеев**
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

**А.М. Халхўжаев**
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

**С.Н. Лақаев**
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор, академик

## КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

**Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати**. Жаҳон миқёсида замонавий математиканинг кўплаб сохаларида олиб борилаётган аксарият илмий ва амалий тадқиқотлар, изланишларда тебранувчан интеграллар, Фурьенинг интеграл операторлари ва тебранувчан интеграл операторлар кенг қўлланилмоқда. Бугунги кунда тебранувчан интегралларнинг муҳим синфларидан бири бўлган силлиқ сиртларда (гиперсирт бўлиши шарт эмас) мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришларини баҳолаш кўплаб соҳалардаги тадқиқотларнинг энг кўп ўрганилаётган асосий масаласи ҳисобланади. Бундан ташқари, гиперсиртларда мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришининг чексиздаги характери бу гиперсиртлар билан аниқланган Стейн максимал операторларининг чегараланганлик кўрсаткичи билан боғлиқлик масаласига доир тадқиқотларни олиб бориш бугунги кунда гармоник анализнинг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳон миқёсида математик анализнинг энг тез ривожланаётган соҳаларидан бири махсусликлар назарияси ва гармоник анализга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Бу масалалар замонавий гармоник анализнинг истиқболли йўналишлари билан боғланган бўлиб, математик физика, аналитик сонлар назарияси, гидродинамиканинг математик моделларида кенг татбиқларига эга. Хусусан, Ферма сиртларида мужассамлашган ўлчовлар Фурье алмаштиришининг баҳолари Шрёдингер операторининг дискрет спектри ҳақида маълумот олиш имконини беради. Бундан ташқари, сўндирувчи кўпайтувчига эга тебранувчан интегралларнинг чексизликдаги асимптотикасини тадқиқ қилиш, уч ўлчовли фазонинг ҳеч бўлмаганда битта бош эгрилиги нолдан фарқли бўлган сиртлари учун Согги-Стейн масаласини тадқиқ қилиш назарий, шу билан бирга, амалий жиҳатдан ҳам муҳим илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Сўнгги йилларда мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқларга эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор янада кучайтирилди, хусусан, мамлакатимиз олимлари томонидан гармоник анализни ўрганишга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Кўпгина математик физика масалаларини ечишда максимал операторлар ва сўндирувчи кўпайтувчили ўлчов Фурье алмаштиришлардан фойдаланилади. «Функционал анализ, математик физика ва статистик физика»[1] фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Бундай тадқиқотларнинг натижасини таъминлашда ихтиёрий аналитик сиртлар учун сўндирувчи кўпайтувчили ўлчовнинг Фурье алмаштириши камайишининг оптималлиги ҳақидаги С.Д. Согги ва И.М. Стейн масалаларини ўрганиш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сонли Қарори, 2018 йил 20 июлдаги «Фан ва олий таълим соҳаси ходимларининг меҳнат ҳақи миқдорини янада ошириш, илмий ва илмий-техник фаолият натижалари жорий этилишини давлат томонидан қўллаб-қувватлаш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-3876-сонли Қарори, 2018 йил 29 майдаги «Ижтимоий-иқтисодий соҳада илмий-тадқиқот институтлари фаолиятини такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-3752-сонли Қарори, 2020 йил 2 мартдаги «2017—2021-йилларда Ўзбекистон Республикасини ривожлантиришнинг бешта устувор йўналиши бўйича ҳаракатлар стратегиясини «Илм, маърифат ва рақамли иқтисодиётни ривожлантириш йили»да амалга оширишга оид давлат дастури тўғрисида»ги ПФ-5953-сонли Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

**Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги.** Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

**Муаммонинг ўрганилганлик даражаси.** Бизга маълумки, номанфий силлиқ финит функция орқали киритилган ўртачалаш $A_t g(x)$ оператори $t$ мусбат параметрга боғлиқ бўлиб, $t$ параметр нолга интилганда берилган функция узлуксиз функцияга интилади. Аммо интегралланувчи функциялар учун $\lim_{t\to+0} A_t g(x)$ лимитнинг мавжудлиги мурракаб муаммо ҳисобланади. Фазонинг деярли барча $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ нуқталарида лимитнинг мавжудлигини исботлаш учун максимал оператордан фойдаланиш жудда қулайдир. Маркази нол нуқтада бўлган бирлик сфера орқали аниқланган максимал операторга Стейннинг сферик максимал оператори дейилади. Бу каби операторлар 1976 йилда И.М. Стейн ва 1986 йилда Дж. Бурген каби олимлар томонидан тадқиқ қилинган. Бундай ўртачалаш ва максимал операторлар тўлқин тарқалиш тенгламаси учун Коши масаласини йиғилувчи функциялар синфида ечишда қўлланилади. Аниқроғи $\mathbb{R}^3$ фазода, Коши масаласининг умумлашган ечими қуйидагича ўртачалаш оператори $u(x,t) := tA_t g(x)$ орқали ифодаланади, бунда $A_t g$ - $g$ функциянинг сферадаги "ўрта қиймати", аниқроғи ўрта қиймат операторининг $g$ даги қиймати.

Табиий савол туғилади: Коши масаласининг ечими учун бошланғич шартга боғлиқ априор баҳо олиш мумкинми?

Бу баҳо уч ўлчовли Евклид фазосида Стейннинг сферик максимал операторининг чегараланганлиги муаммоси билан узвий боғлиқ.

Максимал операторларнинг баҳоси гиперсиртда аниқланган ўлчовнинг Фурье алмаштириши билан боғлиқ. 1982 йилда А. Гринлиф томонидан ўлчов

Фурье алмаштиришининг камайиш тартиби билан максимал функциянинг $L^p$ фазодаги йиғилувчанлик кўрсаткичи $p$ (буни биз максимал операторнинг чегараланган кўрсаткичи деб атаймиз) орасидаги боғланиш топилган. Ўлчов Фурье алмаштиришининг камайиш тартиби ва максимал операторнинг чегараланганлик кўрсаткичи ўртасидаги боғланиш ҳақида И.М. Стейннинг гипотезаси мавжуд. Соболевнинг жойлашиш ҳақидаги теоремасига асосланган усулни қўллаш зарурияти туфайли С.Д.Согги ва И.М.Стейн сўндирувчи кўпайтувчили тебранувчан интегрални киритган. Бунда Гаусс эгрилигининг даражаси сўндирувчи кўпайтувчи сифатида иштирок этади. И.М. Стейн ва С.Д. Согги Гаусс эгрилигининг даражаси етарлича катта бўлганда мос тебранувчан интегралнинг камайиши оптимал бўлишини исботлаган. Гаусс эгрилигининг даражаси қанчалик кичик бўлганда, тебранувчан интеграл камайиш тартиби оптимал бўлишлиги тўғрисида табиий савол пайдо бўлади. Бу масала С.Д.Согги ва И.М Стейнлар томонидан қўйилган. Шунга ўхшаш масала чекли чизиқли типдаги қавариқ гиперсиртлар учун М. Ковлинг, С. Дисне, Г. Маучери, Д. Мюллерларнинг 1990 йилдаги тадқиқотларида ечилган, бир ўлчовли ҳолда, яъни эгри чизиқлар кўпҳад функциянинг графиги бўлганда Д. Оберлин бу масаланинг тўлиқ ечимини берган. 1985 йилда С.Д.Согги ва И.М.Стейнлар томонидан Гаусс эгрилиги чексиз тартибли нолга эга бўлмаганда $p$ нинг бирор чекли қийматларида максимал оператор $L^p$ да чегараланганганлиги исботланган. Бу тадқиқотларда максимал операторнинг чегараланганлигини исботлашнинг асосий воситаларидан бири сўндирувчи кўпайтувчили тебранувчан интеграллар бўлиб, бунда сўндирувчи кўпайтувчи сифатида Гаусс эгрилиги қаралади. Шунингдек 2005 йилда И.А.Икромовнинг тадқиқотларида сўндирувчи кўпайтувчи гиперсиртнинг бош эгриликлари орқали киритилган ҳамда гиперсиртларнинг кенгроқ синфлари билан боғлиқ максимал операторнинг чегараланганлик шартлари олинган.

$S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ гиперсирт билан боғлиқ бўлган максимал операторнинг $L^p$ даги баҳоси мос равишда $\hat{\mu}(\xi)$ – ўлчов Фурье алмаштиришининг характери билан боғлиқ. А. Гринлиф томонидан $|\xi| \longrightarrow +\infty$ да $\hat{\mu}(\xi) = O(|\xi|^{-\gamma})$ ва $\gamma > \frac{1}{2}$ бўлган ҳолда $p$ нинг $p > 1 + \frac{1}{2\gamma}$ шартни қаноатлантирувчи қийматларида $Mg(x) = \sup_{t>0}|A_t g(x)|$ - максимал операторнинг $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ фазода чегараланганлиги исботланган. Шундай булсада, $\hat{\mu}(\xi)$ интегралнинг чексизликдаги камайиш тартиби $\gamma \leq \frac{1}{2}$ шартни қаноатлантирганда максимал операторнинг $L^p$ да чегараланганлиги масаласи хануз очиқ қолмоқда. Шу сабабли 1985 йилда С.Д.Согги ва И.М.Стейн сўндирувчи кўпайтувчили тебранувчан интегрални киритган С.Д. Согги ва И.М. Стейн томонидан, агар Гаусс эгрилигининг даражаси $q$ бўлганда ҳамда $q \geq 2n$ бўлса ва $|\xi| \rightarrow +\infty$ да сўндирувчи кўпайтувчили тебранувчан интеграл $O(|\xi|^{-\frac{n}{2}})$ тартибда камайиши исботланган. Бундан ташқари $|K(x)|^{-\varepsilon} \in L^1(S)$ ( бунда $\varepsilon > 0$) шарт бажарилса, у ҳолда $p > p(q, \varepsilon)$ бўлганда максимал операторнинг $L^p$ да чегараланганлиги кўрсатилади. Шунингдек, $q$ қанча кичик ва $\varepsilon$ қанча катта сон бўлса $p(q, \varepsilon)$ шунча кичик сон бўлиши кузатилган.

**Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий–тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги.** Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университетининг ОТ-Ф4-69 рақамли «Гармоник анализ, даражали геометрия ва уларнинг математик физика масалаларига тадбиқлари» (Самарқанд, 2017-2020 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

**Тадқиқотнинг мақсади** уч ўлчовли Евклид фазосида аналитик сиртлар оиласининг маълум бир синфлари ва ихтиёрий аналитик сиртлар учун сўндирувчи кўпайтувчили ўлчовнинг Фурье алмаштириши камайиш тартибининг оптималлиги ҳақидаги С.Д. Согги ва И.М. Стейн масаласини ечишдан иборат.

**Тадқиқотнинг вазифалари:**

уч ўлчовли фазода ҳар бир нуқтасида камида битта бош эгрилиги нолдан фарқли бўлган аналитик сиртлар устидаги сўндирувчи кўпайтувчили ўлчовнинг Фурье алмаштириши учун баҳо олиш;

аналитик гиперсиртлар оиласи оиласи ҳамда тайинланган аналитик гиперсиртлар учун сўндирувчи кўпайтувчили ўлчовнинг Фурье алмаштириши учун баҳо олиш;

уч ўлчовли фазода ихтиёрий аналитик сиртлар учун сўндирувчи кўпайтувчили ўлчовнинг Фурье алмаштириши учун баҳо олиш;

уч ўлчовли фазодаги ихтиёрий аналитик сиртлар учун сирт ўлчови Фурье алмаштириши камайишининг оптималлигини кафолатловчи кўрсаткични топиш.

**Тадқиқотнинг объекти** аналитик гиперсиртлар оиласида мужассамлашган сўндирувчи кўпайтувчили силлиқ сирт ўлчови, ўлчовнинг Фурье алмаштириши, тебранувчан интеграллар, гиперсиртлар орқали аниқланган максимал операторлардан иборат.

**Тадқиқотнинг предмети** аналитик сиртлар оиласининг маълум бир синфлари ва ҳар бир нуқтасида камида битта бош эгрилиги нолдан фарқли бўлган тайинланган аналитик гиперсиртлар ҳамда уч ўлчовли фазода ихтиёрий аналитик сиртлар учун сўндирувчи кўпайтувчили ўлчовнинг Фурье алмаштиришининг баҳоларидан иборат.

**Тадқиқотнинг усуллари.** Тадқиқот ишида дифференциалланувчи акслантиришлар назарияси, аналитик функциялар назарияси, дифференциал геометрия ва анализнинг асимптотик усуллари, шунингдек гармоник анализ усулларидан фойдаланилган.

**Тадқиқотнинг илмий янгилиги** қуйидагилардан иборат:

уч ўлчовли фазода аналитик сиртнинг хар бир нуқтасида камида битта бош эгрилиги нолдан фарқли бўлганда Согги – Стейн масаласи ечилган;

Гаусс эгрилигининг даражаси учун олинган баҳонинг аниқлиги кўрсатилган;

уч ўлчовли фазода камида битта бош эгрилиги нолдан фарқли бўлган аналитик сиртлар оиласи учун Согги – Стейн масаласи ечилган;

уч ўлчовли фазодаги ихтиёрий аналитик сиртлар учун сирт ўлчови Фурье алмаштириши камайишининг оптималлигини кафолатловчи кўрсаткич $q \geq 3/2$ топилган;

максимал операторнинг чегараланганлик кўрсаткичи ва сўндирувчи кўпайтувчили сирт ўлчови Фурье алмаштириши камайишининг оптималлиги ўртасидаги боғланишни кўрсатувчи мисол келтирилган.

**Тадқиқотнинг амалий натижалари** уч ўлчовли фазода ихтиёрий аналитик сиртлар учун сўндирувчи кўпайтувчили ўлчовнинг Фурье алмаштириши камайишнинг оптималлигини кафолатловчи Гаусс эгрилигининг аниқ кўрсаткичи топилган ва бу натижа Стейннинг гиперсирт билан боғланган максимал операторининг чегараланганлик кўрсаткичини аниқлашда қўлланилган.

**Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги** математик мулоҳазаларнинг қатъий исботланганлиги ҳамда дифференциалланувчи акслантиришлар, аналитик функциялар назарияси, дифференциал геометрия, гармоник анализ ва математик анализнинг усулларидан фойдаланилганлиги билан асосланган.

**Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.** Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ўлчовнинг Фурье алмаштириши камайиш тартибининг оптималлигини кафолатловчи Гаусс эгрилигининг даражасини аниқ қиймати билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти математик физика тенгламалари ечимларининг характерини тадқиқ қилиш учун хизмат қилади.

**Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.** Сўндирувчи кўпайтувчили тебранувчан интегралларнинг баҳосига оид илмий натижалар асосида:

сўндирувчи кўпайтувчили тебранувчан интегралларнинг баҳосига оид илмий натижалардан етакчи хорижий “Journal of Mathematecal Analysis and Applications”, Volume 473, Issue 2, 2019, p.1215-1233( IF=1.22) журналида чоп қилинган “On archimedean zeta functions and newton polyhedra” номли мақолада кўп комплекс ўзгарувчили кўпҳад функция билан аниқланган арифметик дзета функцияни тадқиқ қилишда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши голоморф функция билан аниқланган дзета функция мероморф давомининг координаталар бошига энг яқин қутбини аниқлаш имконини берган;

уч ўлчовли Евклид фазосидаги аналитик сиртлар оиласидаги сиртлар устидаги сўндирувчи кўпайтувчили ўлчов Фурье алмаштириши баҳосидан етакчи хорижий (“Современная математика. Фундаментальные направления”. Россия 2018. Том 64, выпуск 4. Стр.650-681. № 3 (IF=0.25), “Annales Polonici Mathematici” 123 (2019), p. 473-479 (IF=0.9)) журналларда чоп қилинган мос равишда “Об ограниченности максимальных операторов, связанных с гиперповерхностями” ва “On the Weierstrass Preparation Theorem” номли мақолаларда максимал операторларнинг чегараланганлик кўрсаткичини топишда ва ўлчов Фурье алмаштиришининг чексиздаги характерини текширишда фойдаланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши максимал операторни даражаси билан интегралланувчи функциялар фазосида баҳолаш ва Вейерштрасс кўпҳадлари усули орқали ўлчов Фурье алмаштиришининг характерини аниқлаш имконини берган;

бирор даража билан интегралланувчи функциялар синфида максимал оператор учун олинган баҳодан ва жамланувчи функциялар фазосида максимал операторларнинг чегараланганлик хоссаларидан № AP051131268 рақамли хорижий илмий лойиҳада гиперболик тенгламалар учун Коши масаласи ечимини текширишда фойдаланилган (Хўжа Аҳмад Яссавий номидаги халқаро қозоқ – турк университетининг 2020 йил 11 – сентябдаги маълумотномаси.). Илмий натижанинг қўлланиши гиперболик тенгламалар учун Коши масаласининг ечими учун априор баҳо олиш имконини берган.

**Тадқиқот натижаларининг апробацияси.** Диссертациянинг асосий натижалари 2 та халқаро ва 5 та республика илмий–амалий анжуманларида, жами 7 та илмий–амалий анжуманларда муҳокамадан ўтган.

**Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги.** Диссертация мавзуси бўйича жами 11 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестацияси комиссиясининг фалсафа доктори диссертацияларини ҳимоя қилишда тавсия этилган илмий нашрларда 4 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 2 таси республика журналларида нашр этилган.

**Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми.** Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 97 бетни ташкил этган.

## ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

**Кириш** қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Ёрдамчи маълумотлар ва натижалар муҳокамаси»** деб номланувчи биринчи бобида ишнинг асосий натижаларини баён қилиш учун зарур бўладиган асосий таърифлар ва тушунчалар, ёрдамчи маълумотлар келтирилган. Бу боб учта параграфдан ташкил топган.

I бобнинг биринчи параграфида $\mathbb{R}^3$ фазодаги силлиқ (аналитик) гиперсиртлар ва тебранувчан интеграллар назарияси учун зарур бўлган баъзи бир тасдиқ ва теоремалар келтирилган.

Энди кейинчалик керак бўладиган таърифларни келтирамиз.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ соҳада аниқланган $f \in C^{(m)}(\Omega), m \geq 2$ хақиқий қийматли функция берилган бўлсин.

**1-таъриф.** *Силлиқ* $f$ *функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларидан ташкил топган матрицага,* $f$ *функциянинг берилган нуқтадаги гессиан матрицаси дейилади ва қуйидагича* $D^2 f(x)$, *яъни:* $D^2 f(x) = \{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\}_{i,j=1}^n$, $Hessf(x) = detD^2 f(x)$ *каби белгиланади.*

**2-таъриф.** *Агарда* $\nabla f(x^0) = 0$ *бўлса, у ҳолда* $x^0$ *нуқтага* $f(x)$ *функциянинг критик нуқтаси дейилади. Шунингдек, агарда* $detD^2 f(x) \neq 0$ *бўлса, у ҳолда* $x^0$ *айнимаган (невырожденной) критик нуқта дейилади.*

**3-таъриф.** $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *гиперсиртнинг* $x$ *нуқтасидаги бош эгриликларининг кўпайтмасига сиртнинг шу нуқтадаги Гаусс эгрилиги дейилади ва* $K(x)$ *каби белгиланади. Агарда* $G$ *ва* $Q$ *матрицалар гиперсиртнинг бирор бир базисдаги* $x$ *нуқтадаги мос равишда биринчи ва иккинчи фундаментал формалари бўлса, у ҳолда Гаусс эгрилиги қуйидаги кўринишда ҳисобланади:*

$$K(x) = \frac{detQ}{detG}.$$

$S \subset \mathbb{R}^3$ сирт силлиқ $x_3 = f(x_1, x_2)$ функциянинг графиги сифатида берилган бўлсин. У ҳолда унинг Гаусс эгрилиги қуйидаги кўринишда бўлади:

$$K(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right)^2}.$$

Иккинчи параграфда сиртнинг ёйилмаси ва тебранувчан интеграллар ҳақидаги баъзи бир теоремалар ўрганилган.

**4- таъриф.** *Фазо функцияси* $f(x)$ *ва амплитудаси* $\psi$ *бўлган тебранувчан интеграл деб*

$$J(\lambda, f, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda f(x)} \psi(x) dx,$$

*кўринишдаги интегралга айтилади. Бунда* $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, *силлиқ,* $\psi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ *силлиқ ва компакт ташувчили функциялар,* $\lambda$ *–ҳақиқий параметр.*

Бу параграфда тебранувчан интеграллар хусусиятлари ҳақидаги Эрдейи ва Ван дер Корпут леммалари келтирилган.

I бобнинг учинчи параграфида эса масалани қўйилиши ва асосий натижалар муҳокамаси келтирилган.

Асосий масаланинг баёни: $q$ нинг шундай минимал қийматини топиш кераки

$$\left|\int_S e^{ix\cdot\xi}\,|K(x)|^q\psi(x)d\sigma(x)\right|\leq A|\xi|^{-\frac{n}{2}}$$

баҳо ўринли бўлсин, бунда $A$ – мусбат ўзгармас сон. Бу масала Согги – Стейн томонидан қўйилган бўлиб. хусусий ҳолда, шунга ўхшаш масала чекли чизиқли типга эга бўлган қаварик гипер-сиртлар учун М. Ковлинг, С. Дисне, Г. Маучери, Д. Мюллерлар томонидан ечилган. Бу масаланинг ечими бир ўлчовли ҳолда, ва $S$ – эгри чизиқ бўлиб кўпҳад графиги сифатида берилганда Д.М.Оберлин натижасидан келиб чиқади.

Диссертациянинг "**Сўндирувчи кўпайтувчили ўлчов Фурье алматиришининг баҳолари**" деб номланувчи иккинчи бобида уч ўлчовли фазода аналитик сиртнинг хар бир нуқтасида камида битта бош эгрилиги нолдан фарқли бўлган аналитик сиртлар учун С.Д. Согги ва И.М.Стейн масаласининг ечими келтирилган.

II бобнинг биринчи параграфида мазкур бобнинг асосий натижаси бўлган теоремани исботлаш учун зарур бўладиган ёрдамчи тасдиқларнинг исботлари келтирилган.

$S\subset\mathbb{R}^{n+1}$ сиртда максимал операторнинг чегараланганлик масаласи билан боғлиқ сўндирувчи кўпайтувчили тебранувчан интеграл С.Д. Согги ва И.М.Стейнлар томонидан киритилган, яъни:

$$\hat{\mu}_q(\xi):=\int_S e^{i(\xi,x)}|K(x)|^q\psi(x)d\sigma(x), \qquad (1)$$

бу ерда $K(x)$ - $S$ сиртнинг $x$ нуқтасидаги Гаусс эгрилиги, $\psi\in C_0^\infty(S)$ компакт ташувчили силлиқ номанфий функция, $(x,\xi)$ – $x$ ва $\xi$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси, $d\sigma(x)$ – сирт ўлчови. Иккинчи бобнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадан иборат:

**1-теорема.** *Фараз қилайлик $q\geq 1$ тайинланган ҳақиқий сон ва $S\subset\mathbb{R}^3$ аналитик сиртнинг хар бир нуқтасида камида битта бош эгрилиги нолдан фарқли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\psi\in C_0^\infty(S)$, $|\xi|\neq 0$ ларда $\hat{\mu}_q(\xi)$ интеграл учун*

$$\left|\hat{\mu}_q(\xi)\right|\leq\frac{C||\psi||_{C^2}}{|\xi|}, \qquad (2)$$

*баҳо ўринли бўлади, бу ерда $C$ – тайинланган мусбат сон.*

**1-эслатма.** $q\geq 4$ *бўлганда С.Д. Согги ва И.М.Стейнлар ихтиёрий силлиқ сиртлар учун (2) га ўхшаш тенгсизликнинг ўринли бўлиши исботлаган.*

Шундай қилиб, 1- теорема аналитик сиртларнинг маълум бир синфлари учун Согги – Стейн баҳосини аниқлаштиради. Бошқа томондан, $q=1$ қиймат оптималдир.

Аникроғи, 1- теорема шартларини қаноатлантирувчи сирт мавжуд бўлиб, ихтиёрий мусбат $q<1$ сонлар учун қуйидаги асимптотик муносабат ўринли:

$$\hat{\mu}_q(\lambda\boldsymbol{n})=\frac{C(\psi)}{\lambda^{\frac{q+1}{2}}}+O\left(\lambda^{-\frac{q+2}{2}}\right),\ \ (\lambda\to+\infty),$$

бу ерда $\boldsymbol{n}$ – сиртнинг $(0,0,0)$ нуқтасидаги бирлик нормал вектори. Хақиқатдан ҳам, $S\subset\mathbb{R}^3$ сирт $\Phi(x_1,x_2)=(x_2-x_1^2)^2$ функцияни графиги сифатида берилган бўлсин. У ҳолда $K(x_1,x_2,\Phi(x_1,x_2))=\frac{-8(x_2-x_1^2)}{(1+|\nabla\Phi(x_1,x_2)|^2)^2}$ бўлади. Шунингдек, осонгина $\hat{\mu}_q(\lambda\boldsymbol{n})$ интеграл

$$\int_U e^{i\lambda(x_2-x_1^2)^2}|x_2-x_1^2|^q a(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

кўринишга эга бўлишини кўриш мумкин, бу ерда $a(x_1,x_2)=\frac{8^q\psi(x_1,x_2,(x_2-x_1^2)^2)}{\sqrt{(1+|\nabla\Phi(x_1,x_2)|^2)^{4q-1}}}$. Охирги интегралда $x_2-x_1^2=y_2$ алмаштиришдан фойдаланиб ва Эрдейи леммасига кўра, $\lambda$ нинг етарлича катта қийматларида қуйидаги интегралга эга бўламиз:

$$\int_{U'} e^{i\lambda y_2^2}|y_2|^q a(y)dy =$$

$$=8^q\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)e^{\frac{i\pi(q+1)}{4}}\lambda^{-\frac{q+1}{2}}\int_R a(x_1,x_1^2)dx_1+O(\lambda^{-\frac{q+2}{2}}),$$

бу ерда $\Gamma(\cdot)$ – Эйлернинг гамма функцияси. Равшанки, $a(0,0)=\psi(0,0,0)>0$, у ҳолда берилган сирт учун $\psi(x_1,x_2,x_3)\geq 0$ бўлганда тебранувчан интеграл асимптотикасининг бош ҳади нолдан фарқли бўлади. Бундан шуни хулоса қилиш мумкинки, берилган сирт учун $q<1$ бўлганда (2) баҳо ўринли эмас .

II бобнинг иккинчи параграфида нормалга яқин $\xi$ лар учун $\hat{\mu}_q(\xi)$ интеграл асимптотикасининг бош ҳади бир каррали сўндирувчи кўпайтувчили тебранувчан интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз.

$\hat{\mu}_q(\xi)$ интегралнинг асимптотик характери ҳақидаги тасдиқ бу параграфнинг асосий натижасидир. $\hat{\mu}_q(\xi)$ интегрални икки каррали интеграл кўринишида ифодалаб оламиз:

$$\hat{\mu}_q(\xi)=\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3F(x_1,x_2,s_1,s_2)}a(x_1,x_2)|Hessf(x_1,x_2)|^q dx_1dx_2, \qquad (3)$$

бу ерда

$$a(x_1,x_2)=\frac{\psi(x_1,x_2,f(x_1,x_2))}{\sqrt{(1+|\nabla f(x_1,x_2)|^2)^{4q-1}}},$$

$$F(x_1,x_2,s_1,s_2)=f(x_1,x_2)+s_1x_1+s_2x_2, s_1=\frac{\xi_1}{\xi_3}, s_2=\frac{\xi_2}{\xi_3},$$

$$Hessf(x_1,x_2)=detD^2f(x_1,x_2).$$

$Hessf(0,0)=0$ деб фараз қиламиз, агар $Hessf(0,0)\neq 0$ бўлса, у ҳолда 1-теореманинг тасдиқлари Герцнинг классик натижаларидан келиб чиқади. Шунингдек $\psi$ - функция етарлича кичик ташувчига эга бўлсин деб фараз қиламиз. Маълумки, агар $rank(D^2f(0,0))=1$ бўлса, у ҳолда $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1^2}\neq 0$, ёинки $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_2^2}\neq 0$ бўлади. Умумийликка зиён етказмасдан $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1^2}\neq 0$ деб фараз қиламиз. У ҳолда ошкормас функция ҳақидаги теоремага кўра

$$F_{x_1}(x_1,x_2,s_1,s_2)=f_{x_1}(x_1,x_2)+s_1=0$$

тенглама $\mathbb{R}_{x_1}\times\mathbb{R}_{s_1}$ да координаталар бошининг етарлича кичик атрофида ягона $x_1=x_1(x_2,s_1)$ аналитик ечимга эга бўлади.

(3) интегралнинг ички интегралини қараймиз:

$$\widehat{\mu_q}^1 := \int e^{i\xi_3 F_1(x_1,x_2,s_1)} a(x_1,x_2)|Hessf(x_1,x_2)|^q dx_1, \qquad (4)$$

бу ерда

$$F_1(x_1,x_2,s_1) = f(x_1,x_2) + s_1 x_1.$$

**1-тасдиқ.** *Агарда* $f(x_1,x_2)$ *аналитик функция* $\nabla f(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1^2} \neq 0$ *шартларни қаноатлантирса, у ҳолда нолнинг шундай атрофи мавжудки* $\hat{\mu}_q(\xi)$ *интеграл учун* $q \geq 1$ *бўлганда қуйидаги*

$$\hat{\mu}_q(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\xi_3|}} e^{isign\left(\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1^2}\xi_3\right)\frac{\pi}{4}} \times$$

$$\times \int e^{i\xi_3(F_1(x_1(x_2,s_1),x_2,s_1)+s_2x_2)} |Hessf(x_1(x_2,s_1),x_2)|^q a(x_2,s_1) dx_2 +$$

$$+O\left(\frac{1}{|\xi|}\right) (\text{бунда} \quad |\xi| \to +\infty),$$

*асимптотик муносабат ўринли бўлади, бу ерда* $a(x_2,s_1) := a(x_1(x_2,s_1),x_2)\varphi(x_2,s_1)$, $\varphi$- *қандайдир силлиқ функция.*

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида $s_1$ – параметрга боғлиқ аналитик сиртлар учун Д.М.Оберлиннинг теоремасига ўхшаш теорема исботланади.

Биз қуйидаги бир каррали сўндирувчи кўпайтувчили тебранувчан интегрални қараймиз:

$$I_q(\xi_3) = \int e^{i\xi_3(F_1(x_2,s_1)+x_2s_2)} \tilde{a}(x_2,s_1)|F''_1(x_2,s_1)|^q dx_2, \qquad (5)$$

бу ерда $\tilde{a}(x_2,s_1) = a(x_2,s_1)|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1(x_2,s_1),x_2)|^q$ ва $F_1(x_2,s_1)$ – аналитик функция. Бу параграфда қуйидаги лемма исботланган.

**1-лемма.** *Фараз қилайлик* $q \geq \frac{1}{2}$ *тайинланган ҳақиқий сон бўлсин. У ҳолда координаталар бошининг шундай* $W \subset \mathbb{R}_{x_2}$ *атрофи мавжудки, ихтиёрий* $a \in C_0^\infty(W)$ *лар учун*

$$|I_q(\xi_3)| \leq \frac{C \parallel a \parallel_V}{|\xi_3|^{\frac{1}{2}}}$$

*баҳо ўринли бўлади.* 1 – теореманинг исботи 1 – тасдиқ ва 1 – леммага асосланади.

**“Фаза функцияси параметрга боғлиқ бўлган тебранувчи интеграл-ларнинг баҳолари”** деб номланучи учинчи бобда уч ўлчовли Евклид фазосида аналитик сиртлар оиласининг маълум қисм синфлари учун сўндирувчи кўпайтувчили ўлчовнинг Фурье алмаштириши камайиш тартибининг оптималлиги ҳақидаги С.Д. Согги ва И.М.Стейнларнинг масаласининг ечими келтирилган. Шуни таъкидлаймизки, бу бобда нафақат аналитик сиртлар оиласи учун, балки тайинланган аналитик сиртлар учун ҳам даража аниқ кўрсатилган.

Шунингдек бу бобда, уч ўлчовли Евклид фазосидаги ихтиёрий аналитик сиртлар учун сўндирувчи кўпайтувчили ўлчов Фурье алмаштиришининг камайиш тартибининг оптималлиги ҳақидаги С.Д. Согги ва И.М.Стейнларнинг масаласи қаралган.

Фараз қилайлик $S(\eta) \subset \mathbb{R}^3$ , $\eta \in \mathbb{R}^m$ параметрга боғлиқ аналитик сиртлар оиласи бўлсин, табиий равишда қуйидаги $d\mu(\eta) := \psi(x,\eta)d\sigma(x,\eta)$ сирт ўлчови ва унга мос сўндирувчи кўпайтувчили тебранувчан интеграл аниқланади:

$$\hat{\mu}_q(\xi) = \int_{S(\eta)} e^{i(x,\xi)} |K(x,\eta)|^q \psi(x,\eta) d\sigma(x,\eta), \qquad (6)$$

бу ерда $d\sigma(x,\eta)$ - ҳар бир тайинланган $\eta$ лар учун $S(\eta)$ даги сирт ўлчови.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида баъзи бир тасдиқ ва теоремалар келтирилган, шунингдек қуйидаги лемма исботланган.

**2-лемма.** *Фараз қилайлик $f(x,\eta)$ координаталар бошида ҳақиқий аналитик функция ва $q \geq 1$ тайинланган сон бўлсин. У ҳолда нол нуқтанинг шундай $W \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ атрофи мавжудки, қуйидаги тенглик ўринли бўлади*

$$|x| g(x,\eta) = |f(x,\eta)|^q - |f(0,\eta)|^q,$$

*бунда $g(x,\eta)$ функциянинг $W$ да ўзгариши чегараланган ва унинг тўла ўзгариши $U$ да текис чегараланган.*

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \Gamma_\varepsilon$ бўлганда $\hat{\mu}_q(\xi)$ икки каррали тебранувчан интегрални қараймиз:

$$\hat{\mu}_q(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3 F(x_1,x_2,s_1,s_2,\eta)} a(x_1,x_2,\eta) |Hessf(x_1,x_2,\eta)|^q dx_1 dx_2, \qquad (7)$$

бу ерда

$$a(x_1,x_2,\eta) = \frac{\psi(x_1,x_2,f(x_1,x_2,\eta))}{\sqrt{(1+|\nabla f(x_1,x_2,\eta)|^2)^{4q-1}}},$$

$$F(x_1,x_2,s_1,s_2,\eta) = f(x_1,x_2,\eta) + s_1 x_1 + s_2 x_2, \qquad s_1 = \frac{\xi_1}{\xi_3},\ s_2 = \frac{\xi_2}{\xi_3},$$

$Hessf(x_1,x_2,\eta) = detD^2 f(x_1,x_2,\eta)$. Бунда $\Gamma_\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ - конус, қуйидаги кўринишда аниқланган $\Gamma_\varepsilon := \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi_3| \leq \frac{1}{\varepsilon} max\{|\xi_1|, |\xi_3|\}\}$.

Фубини теоремасига кўра (7) интеграл қуйидагича ёзилади:

$$\hat{\mu}_q(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\mu}_q^1(\xi,x_2) e^{i\xi_3 s_2 x_2} dx_2,$$

бу ерда

$$\hat{\mu}_q^1(\xi,x_2) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 F_1(x_1,x_2,s_1,\eta)} a(x_1,x_2,\eta) |Hessf(x_1,x_2,\eta)|^q dx_1 \qquad (8)$$

ва $F_1(x_1,x_2,s_1,\eta) = f(x_1,x_2,\eta) + s_1 x_1$.

Бу параграфда (8) ва $\hat{\mu}_q(\xi)$ интегралнинг асимптотик характери ҳақидаги тасдиқлар исботланади.

**2- тасдиқ.** *Агарда* $f(x_1, x_2, \eta)$ *аналитик функция* $\nabla f(0{,}0{,}0) = 0, \frac{\partial^2 f(0{,}0{,}0)}{\partial x_1^2} \neq 0$ *шартларни қаноатлантирса, у ҳолда нолнинг шундай* $V_1 \times U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m$ *атрофи мавжудки,* $\hat{\mu}^1{}_q(\xi, x_2)$ *интеграл учун* $q \geq 1$ *бўлганда қуйидаги асимптотик муносабат ўринли бўлади:*

$$\hat{\mu}^1{}_q(\xi, x_2) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\xi_3|}}\ e^{i\left(\pm\frac{\pi}{4}sgn\left(\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_1^2}\xi_3\right)+\xi_3 F_1(x_1(x_2,s_1,\eta),x_2,s_1)\right)} \times$$

$$\times\ |Hessf(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)|^q a(x_2, s_1, \eta) + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \quad (\ |\xi| \to +\infty),$$

*бу ерда* $a(x_2, s_1, \eta) \coloneqq a(x_1(x_2, s_1, \eta), x_2, \eta)\phi(x_2, s_1, \eta)$ *ва* $\phi$ *– силлиқ функция. Шунингдек* $O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$ *муносабат* $(x_2, s_1, \eta)$ *кичик параметрларга нисбатан текис, яъни: шундай* $C > 0$ *сон ва нолнинг* $U_1$ *атрофи мавжуд бўлиб, ихтиёрий* $(x_2, s_1, \eta) \in U_1$ *лар учун* $\left|O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)\right| \leq \frac{C||a||_{C^2}}{|\xi|}$ *тенгсизлик бажарилади.*

Учинчи параграфда қуйидаги интеграл қаралади:

$$I_q(\xi_3) = \int e^{i\xi_3 F(x_2,\eta)} a(x_2, \eta)|F''(x_2, \eta)|^q dx_2, \qquad (9)$$

бу ерда $F(x_2, \eta)$ нолнинг $W \times U (W \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ атрофида қуйидаги $F(x_2, \eta) \not\equiv 0, F(0{,}0) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи ҳақиқий аналитик функция ва $a(x_2, \eta) \in C_0^\infty(W \times U)$.

Бу параграфда $F(x_2, \eta)$ фаза функция Вейерштрасснинг тайёрлов теоремаси шартларини қаноатлантирган ҳолда қаралади, яъни: $F(x_2, 0) \not\equiv 0$, бу ҳолда $F(x_2, 0)$ – функция $A_k$ типидаги махсусликга эга. Бу шарт $x_2 = 0$ нуқта $F'_{x_2}(x_2, 0)$ функциянинг $F'_{x_2}(0{,}0) = 0$ шартни қаноатлантирувчи $k$ $(k < \infty)$ каррали илдиз бўлиши билан эквивалентдир.

Бу параграфда, $q \geq \frac{1}{2}$ бўлганда (9) интегрални камайиш тартибининг оптимал эканлиги исботланган. Бу тасдиқ Д.Оберлин теоремасининг аналогидир. Қуйидаги теорема исботланган:

**2- теорема.** *Фараз қилайлик* $q \geq 1$ *тайинланган ҳақиқий сон ва* $S(\eta) \subset \mathbb{R}^3$ - $\eta \in \mathbb{R}^m$ *параметрга боғлиқ аналитик гиперсиртлар оиласи бўлсин. Агарда фаза функция, мос равишда* $S(0)$ *гиперсирт* $(0{,}0{,}0) \in S(0)$ *нуқтада* $A_k$ $(1 \leq k < \infty)$ *типдаги махсусликга эга бўлса, у ҳолда нолнинг шундай* $V \times U \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^m$ *атрофи мавжудки, қайсики ихтиёрий* $\psi \in C_0^\infty(V \times U)$ *функцияларда (7) интеграл учун*

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C||\psi(\cdot, \eta)||_{C^2}}{|\xi|},$$

*баҳо ўринли бўлади, бу ерда* $C$ *– тайинланган мусбат сон.*

**3- теорема.** *Фараз қилайлик* $q \geq 1$ *тайинланган ҳақиқий сон бўлиб,* $S(\eta) \subset \mathbb{R}^3$ *аналитик гиперсиртлар оиласи қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:*

*1)* $S(0)$ *гиперсирт* $\mathbb{R}^3$ *да координаталар бошини сақласин ва координаталар бошида* $S(0)$ *сиртнинг камида битта бош эгрилиги нолдан фарқли бўлсин.*

*2) $K(x,\eta)$ – Гаусс эгрилиги $S(\eta)$ гиперсиртда $K \not\equiv 0$ шартни қаноатлантирсин.*
*У ҳолда нолнинг шундай $V \times U \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^m$ атрофи мавжудки, ихтиёрий $\psi \in C_0^\infty(V \times U)$ функцияларда (7) интеграл учун*

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C||\psi(\cdot,\eta)||_{C^2}}{|\xi|},$$

*баҳо ўринли бўлади, бу ерда $C$ – тайинланган мусбат сон.*
(9) интегрални $F(x_2,\eta)$ фазо функцияси нолнинг атрофида ҳақиқий қийматли аналитик функция бўлиб, Вейерштрасснинг тайёрлов теоремаси шартларини қаноатлантирмаган ҳолда қараймиз.

3- теореманинг исботи 3- тасдиқдан келиб чиқади ва 2- теореманинг исботи эса бевосита 3- теореманинг исботидан келиб чиқади.

**3- тасдиқ.** *Фараз қилайлик $F(x_2,\eta)$ координата бошида ҳақиқий қийматли аналитик функция бўлсин. У ҳолда координата бошининг шундай $W \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ атрофи мавжудки, ихтиёрий $q \geq \frac{1}{2}$ сонларда*

$$\left|I_q(\xi_3)\right| \leq \frac{C||a||_V}{|\xi_3|^{\frac{1}{2}}}$$

*баҳо ўринли бўлади.*

Тўртинчи параграфда $\mathbb{R}^3$ фазодаги ихтиёрий аналитик сиртлар учун сирт ўлчови Фурье алмаштириши камайиш тартибининг оптималлигини кафолатловчи шарт $q \geq \frac{3}{2}$ кўрсатилган. Бу параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадан иборат.

**4- теорема.** *Фараз қилайлик $S \subset \mathbb{R}^3$ ихтиёрий аналитик сирт ва $\psi$ компакт ташувчили тайинланган функция бўлсин. У ҳолда $q \geq \frac{3}{2}$ бўлганда (1) интеграл учун*

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C||\psi||_{C^2}}{|\xi|},$$

*баҳо ўринли бўлади, бу ерда $C$ – тайинланган мусбат сон.*

Шундай қилиб $q_0 \in [1,\frac{3}{2}]$ сон мавжудки $q \geq q_0$ бўлганда тебранувчан интегралнинг камайиш тартиби оптималдир.

## ХУЛОСА

Умуман олганда, олинган натижалар ушбу ишда мақсадга эришилгани ҳақида гапиришга имкон беради. Барча асосий натижалар янги ҳамда бу натижалар тебранувчан интеграллар ва гармоник анализ назариясига маълум бир ҳисса қўшади. Бу иш ўлчов Фурье алмаштиришининг баҳосини, аналитик сиртлар оиласида фаза функцияси параметрга боғлиқ бўлган сўндирувчи кўпайтувчили тебранувчи интеграллар баҳоларини ва уч ўлчовли Евклид фазосидаги ихтиёрий аналитик сиртлар учун сўндирувчи кўпайтувчили ўлчов Фурье алмаштиришининг баҳосини текширишга бағишланган.

Диссертация тадқиқотининг асосий натижалари асосида қуйидаги хулосаларга келамиз:

1. Уч ўлчовли фазода аналитик сиртнинг хар бир нуқтасида камида битта бош эгрилиги нолдан фарқли бўлганда Согги – Стейн масаласининг ечими берилган.
2. Гаусс эгрилигининг даражаси учун олинган баҳонинг аниқлиги кўрсатилган.
3. Уч ўлчовли фазодаги аналитик сиртда сўндирувчи кўпайтувчили ўлчов Фурье алмаштириши билан аниқланган тебранувчи интеграллар учун текис баҳо олинган.
4. Фаза функцияси параметрга боғлиқ бўлган сўндирувчи кўпайтувчили тебранувчан интеграллар учун текис баҳо олинган.
5. Уч ўлчовли фазода баъзи аналитик сиртлар оиласи учун Согги – Стейн масаласининг ечими олинган.
6. $\mathbb{R}^3$ фазодаги ихтиёрий аналитик сиртлар учун сирт ўлчови Фурье алмаштиришининг камайиш тартибининг оптималлигини кафолатловчи кўрсаткич $q \geq 3/2$ топилган.
7. Максимал оператор чегараланганлик кўрсаткичи ва сўндирувчи кўпайтувчили сирт ўлчови Фурье алмаштиришининг оптимал камайиш тартиби ўртасидаги боғланишни кўрсатувчи мисол келтирилган.

Олинган натижалардан асимптотик анализ ва унинг тадбиқлари назариясида, шунингдек математик физика соҳасида фойдаланиш мумкин.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.07.2020.FM.02.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

---

**САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**МУРАНОВ ШАХРИДДИН АБДУЛЛАЕВИЧ**

# ОБ ОЦЕНКАХ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С МНОЖИТЕЛЕМ ГАШЕНИЯ

**01.01.01 – Математический анализ**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

**Самарканд – 2020**

**Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2020.2.PhD/FM455**

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | **Икромов Исроил Акрамович**<br>доктор физико-математических наук, профессор, |
| **Официальные оппоненты:** | **Халмухамедов Алимджан Рахимович**<br>доктор физико-математических наук, профессор<br>**Каршибаев Хайрулло Киличович**<br>кандидат физико-математических наук |
| **Ведущая организация:** | **Ургенчский государственный университет** |

Защита диссертации состоится «____» _____________2020 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.07.2020.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2020 года.
(реестр протокол рассылки №________ от «____» _______________2020 года).

**А.С. Солеев**
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор

**А.М. Халхужаев**
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук

**С.Н.Лакаев**
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор, академик

## ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

**Актуальность и востребованность темы диссертации.**

В большинстве научных и прикладных исследованиях, проводимых во многих областях современной математики по всему миру, широко используются осцилляторные интегралы, интегральные операторы Фурье и осцилляторные интегральные операторы.

Настоящее время наиболее изучаемыми проблемами многих областей математики являются исследование важных классов осциллирующих интегралов являющейся преобразованием Фурье мер сосредоточенных на гладких поверхностях (не обязательно гиперповерхностях). Кроме того, исследование поведения преобразования Фурье мер, сосредоточенных на гиперповерхностях связанных с показателем ограниченности, максимальных операторов Стейна, ассоциированных с такими гиперповерхностями, является одиной из существенных задач современного гармонического анализа.

Сегодня, особое внимание уделяется теории особенностей и гармоническому анализу, которые являются самими быстрорастущими областями математического анализа в мировых научных исследованиях.
Эти вопросы относятся к перспективным направлениям современного гармонического анализа и широко используются в математической физике, аналитической теории чисел и математических моделях гидродинамики. В частности, оценки преобразования Фурье мер, сосредоточенных на поверхностях Фермы, позволяют получить информацию о дискретном спектре оператора Шредингера. Кроме того, как теоретически, так и практически важно изучение асимптотики на бесконечности осциллирующих интегралов с множителем гашения и изучение проблемы Согги - Стейна для аналитических гиперповерхностей трехмерного пространства, для которых в каждой точке поверхности хотя бы одна из главных кривизн отлична от нуля.

В нашей стране большое внимание уделяется направлениям, имеющим научное и прикладное значение. Ученые нашей страны особое внимание уделяют исследованиям задач гармонического анализа. Решение многих задач математической физики сводится к максимальным операторам и преобразованиям Фурье мер с множителем гашения. Проведение научных исследований на международном уровне по таким важным направлениям как функциональный анализ, математическая физика и статистическая физика выделено как основная задача фундаментальных исследований[2]. В обеспечении исполнения данного постановления важное значение имеет изучение задачи С.Д.Согги и И.М.Стейна об оптимальном убывании

---

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 “Об мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан” от 18 мая 2017 года.

преобразования Фурье поверхностных мер, с множителем гашения для произвольных аналитических поверхностей трехмерного евклидова пространства.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию задачи, поставленной Согги - Стейном для произвольных аналитических гиперповерхностей в трехмерном пространстве. Решение этих задач позволяет оценить максимальные операторы, ассоциированные с гиперповерхностями.

В диссертации приведено решение задачи С.Д.Согги и И.М.Стейна об оптимальном убывании преобразования Фурье мер с множителем гашения для частного класса семейств аналитических поверхностей и произвольных аналитических поверхностей трехмерного евклидова пространства, получена оценка сверху для степени гауссовой кривизни гарантирующей оптимальное убывание преобразования Фурье меры.

Данная диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института математики имени В.И. Романовского академии наук республики Узбекистан», №-ПП-3876 «О мерах по дальнейшему повышению размеров оплаты труда работников сферы науки и высшего образования, а также государственной поддержке внедрения результатов научной и научно-технической деятельности» от 20 июля 2018, №-ПП-3752 «О мерах по совершенствованию деятельности научно-исследовательских институтов в социально-экономической сфере» от 29 мая 2018 года, №-УП-5953 «О государственной программе по реализации стратегии действий по пяти приоритетным направлениям развития Республики Узбекистан в 2017-2021 годах в «Год развития науки, просвещения и цифровой экономики»» от 2 марта 2020 года а также в других нормативно - правовых актах по данной деятельности.

**Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствие с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

**Степень изученности проблемы.** Известно, что оператор усреднения $A_t g(x)$ определенный с помощью неотрицательной гладкой финитной функции и зависит от положительного параметра $t$, когда этот параметр стремится к нулю, данная функция стремится к непрерывной функции. Однако, существование предела $\lim\limits_{t\to+0} A_t g(x)$ для интегрируемых функций является сложной проблемой. Для доказательства существование предела для почти всех точек $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ используются максимальные операторы. Максимальный оператор, определенный единичной сферой с центром в нуле, называется сферическим максимальным оператором Стейна. Такие операторы были изучены, в 1976 году И.М. Стейном и в 1986 году Дж. Бургенем. Сферический оператор усреднения и максимальные операторы используются при решении задачи Коши в классе суммируемых функций для уравнения распространения волны. Точнее, в $\mathbb{R}^3$ обобщенное решение задачи Коши описывается через оператора усреднения $u(x,t) := tA_t g(x)$, где $A_t g$ - «среднее значение» функции $g$ на сфере, точнее значения оператора усреднения в $g$.

Возникает естественный вопрос: можно ли получить априорную оценку для решения задачи Коши в зависимости от начального условия?

Эта оценка неразрывно связана с проблемой об ограничении сферического максимального оператора Стейна в трехмерном евклидовом пространстве.

Оценка максимального оператора связана с преобразованием Фурье мер, определяемых гиперповерхностью. В 1982 году А. Гринлиф обнаружил связь между порядком убывания преобразования Фурье мер и показателем ограниченности максимальных операторов в пространствах $L^p$. Имеется гипотеза И. М. Стейна о связи порядка убывания преобразования Фурье мер и показателем ограниченности максимальных операторов. В связи с необходимостью применения метода, основанного на теореме вложения Соболева, Согги и Стейн ввели осциллирующий интеграл с множителем гашения. В этом интеграле степень гауссовой кривизны участвует в качестве множителя гашения. И. М. Стейн и С. Д. Согги доказали, что убывание соответствующего осциллирующего интеграла оптимально, когда степень гауссовой кривизны достаточно велика. Естественно возникает вопрос о минимальной степени гауссовой кривизны, когда осциллирующий интеграл оптимально убывает. Этот вопрос был поставлен Согги и Стейном. Аналогичная задача в частном случае была решена в 1990 году в работе М. Ковлинг, С. Дисне, Г. Маучери, Д. Мюллера для выпуклых гиперповерхностей конечного линейного типа. В одномерном случае, точнее для случая кривых, заданных графиком полиномиальной функции Д. Оберлин решил эту проблему. В 1985 году Согги и Стейна доказано, что если гауссова кривизна гиперповерхности не имеет нулей бесконечного порядка, то соответствующий максимальный оператор ограничен в $L^p$ для некоторого конечного значения $p$. В этой работе одним из основных средств доказательства ограниченности максимальных операторов были так называемые осцилляторные интегралы с множителем гашения, в которых гауссова кривизна играет роль гасителя. В 2005 году в работе И.А. Икромова введены множители гашения через главные кривизны гиперповерхности и получены условия ограниченности максимальных операторов, связанные с более широким классом гиперповерхностей.

$L^p$-оценки максимальных операторов, ассоциированных с гиперповерхностями $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ связаны с поведением $\hat{\mu}(\xi)$ – преобразования Фурье соответствующих мер. А. Гринлиф доказал, что, если $\hat{\mu}(\xi) = O(|\xi|^{-\gamma})$ (при $|\xi| \longrightarrow +\infty$) и $\gamma > \frac{1}{2}$, то максимальный оператор $Mg(x) = \sup_{t>0}|A_t g(x)|$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, при $p > 1 + \frac{1}{2\gamma}$. Однако, в случае когда порядок убывания $\hat{\mu}(\xi)$ на бесконечности, т.е. $\gamma \leq \frac{1}{2}$, задача, об $L^p$ ограниченности соответствующего максимального оператора до сих пор остается открытой. Фактически, в 1985 году Согги и Стейна введены осцилляторные интегралы с множителем гашения и они доказали, что, если степень $q$ гауссовой кривизны и $q \geq 2n$, то осцилляторные интегралы с множителем гашения убывает в порядке $O(|\xi|^{-\frac{n}{2}})$ (при $|\xi| \to +\infty$). Отсюда, при выполнении условия $|K(x)|^{-\varepsilon} \in L^1(S)$ (где $\varepsilon > 0$), доказана ограниченность максимального оператора в $L^p$ при $p > p(q, \varepsilon)$. Более того, было установлено что, чем меньше $q$ и чем больше $\varepsilon$ тем меньше $p(q, \varepsilon)$.

**Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного или научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация.**

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательского гранта ОТ-Ф4-69 "Гармонический анализ, степенная геометрия и их приложения к задачам математической физики" Самаркандского государственного университета (2017-2020 гг.).

**Целью исследования** является рассмотрение задачи С.Д.Согги и И.М.Стейна об оптимальном убывании преобразования Фурье поверхностных мер, с множителем гашения для частного класса семейств аналитических поверхностей трехмерного евклидова пространства.

**Задачи исследования:**

получить оценки для преобразования Фурье мер с множителем гашения на частного класса аналитических поверхностей трехмерного пространства, для которых в каждой точке имеется хотя бы одна ненулевая главная кривизна;

получить оценки для преобразования Фурье мер с множителем гашения, сосредоточенных на семействе аналитических гиперповерхностей;

получить оценки для преобразования Фурье мер с множителем гашения, сосредоточенных на произвольных аналитических гиперповерхностях трехмерного пространства;

найти показатель гарантирующий оптимальное убывание преобразования Фурье поверхностных мер, для произвольных аналитических поверхностей трехмерного пространства.

**Объект исследования** гладкие поверхностные меры, сосредоточенные на аналитических гиперповерхностях, содержащие множитель гашения, преобразование Фурье меры, осцилляторные интегралы. Максимальные операторы, ассоциированные с гиперповерхностями.

**Предмет исследования** оценки преобразования Фурье мер с множителем гашения, сосредотеченных на семействах аналитических гиперповерхностей, и фиксированной аналитической гиперповерхности которая имеет хотя бы одну ненулевую главную кривизну в каждой точке, и произвольных аналитических гиперповерхностей трехмерного пространства.

**Методы исследования.** При выполнении диссертационной работы использованы методы теории особенностей дифференцируемых отображений, теории аналитических функций, асимптотические методы анализа, а также методы коммутативного гармонического анализа.

**Научная новизна исследования** состоит в следующем:

получено решение задачи Согги - Стейна для аналитических гиперповерхностей трехмерного пространства, для которых в каждой точке поверхности хотя бы одна из главных кривизн отлична от нуля;

показана точность полученной оценки для показателя гауссовой кривизны;

получено решение задачи Согги - Стейна для семейства аналитических гиперповерхностей с одной ненулевой главной кривизной трехмерного пространства.

найден показатель $q \geq 3/2$ , гарантирующий оптимальное убывание преобразования Фурье поверхностных мер, для произвольных аналитических поверхностей в $\mathbb{R}^3$;

приведен пример, показывающий связь между оптимальным убыванием преобразования Фурье поверхностных мер, с множителем гашения и показателем ограниченности максимальных операторов.

**Практические результаты исследования** найдено точное значение показателя гауссовой кривизны гарантирующего оптимальное убывание преобразования Фурье меры, с множителем гашения на произвольных аналитических гиперповерхностях трехмерного пространства. Применение результатов для нахождения показателя ограниченности максимального оператора Стейна, связанного с гиперповерхностей.

**Достоверность результатов исследования** обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием известных методов теории особенностей дифференцируемых отображений, теории аналитических функций, асимптотическими методами анализа.

**Научная и практическая значимость результатов исследования.** Научное значение результатов исследования заключается в том, что найденное точное значение показателя гауссовой кривизны гарантирует оптимальное убывание преобразования Фурье соответствующей меры. Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты диссертации служат основой при изучении характера решений уравнений математической физики.

**Внедрение результатов исследования.** На основе полученных результатов относящихся по оценкам осцилляторных интегралов с множителем гашения:

полученные результаты, относящиеся к оценкам осциллирующих интегралов с множителем гашения использованы в статье “On archimedean zeta functions and newton polyhedra”, опубликованном в зарубежном журнале “Journal of Mathematecal Analysis and Applications”, Volume 473, Issue 2, 2019, p.1215-1233( IF=1.22) при исследовании арифметической дзета функции, определеной с помощью полиномиальной функции от многих комплексных переменных. Применение этих результатов позволили определить полюс, расположенной ближайшего к начало координат мероморфного продолжения дзета-функции, определенной голоморфной функцией;

оценки преобразования Фурье мер, сосредоточенных на семействах аналитических поверхностей трехмерного Евклидова пространства, с множителем гашения, использованы в статьях "Об ограниченности максимальных операторов, связанных с гиперповерхностями" и «On the Weierstrass Preparation Theorem», опубликованных в зарубежных журналах ("Современная математика. Фундаментальные направления". Россия 2018. Том 64, выпуск 4. Стр.650-681. № 3 (IF=0.25), "Annales Polonici Mathematici" 123 (2019),p. 473-479 (IF=0.9).) для нахождения показателя ограниченности максимальных операторов и изучения поведения преобразования Фурье мер на бесконечности. Применение научных результатов позволили оценить максимальный оператор в пространстве функций, интегрируемых со степенью и определить поведение преобразования Фурье мер с помощью метода полиномов Вейерштрасса;

оценки, полученные для максимальных операторов в пространстве интегрируемых функций с некоторой степени и свойство ограниченности максимальных операторов в пространстве суммируемых функций использованы в исследованиях зарубежного научного гранта номером № AP05131268 для исследования решения задачи Коши гиперболических уравнений (Справка Международный казакско-турецкий университет имени Ходжа Ахмеда Ясави от 11 сентябрь 2020 г.) Применение научного результата дало возможность получить априорные оценки для решения задачи Коши гиперболических уравнений

**Апробация результатов исследования.** Результаты данного исследования обсуждены на 7 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 5 республиканских.

**Опубликованность результатов исследования.** По теме диссертации опубликовано 11 научных работ, 4 из них входят в перечень научных изданий, предложенных высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 2 статьи опубликованы в зарубежных журналах и 2 республиканских научных изданиях.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 97 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **"Вспомогательные утверждения и обсуждение результатов"**, приведены необходимые предварительные сведения, основные определения и вспомогательные утверждения, которые будут использованы при изложении дальнейших результатов работы. Эта глава состоит из трех параграфов.

В первом параграфе главы I приводятся необходимые факты и теоремы, относящиеся к теории гладких (аналитических) гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{R}^3$ и осцилляторных интегралов.

Теперь приведем определения необходимые в дальнейшем изложении.

Пусть $f \in C^{(m)}(\Omega), m \geq 2$, - вещественнозначная функция и $\Omega$ - область в $\mathbb{R}^n$.

**Определение 1.** *Матрица, составленная из частных производных второго порядка гладкой функции $f(x)$, называется гессиановой матрицей этой функции в данной точке и обычно обозначается через $D^2 f(x)$, т.е.*

$$D^2 f(x) = \{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\}_{i,j=1}^n, Hessf(x) = detD^2 f(x) .$$

**Определение 2.** *Точка $x^0$ называется критической точкой функции $f(x)$, если*

$$\nabla f(x^0) = 0.$$

*Критическая точка $x^0$ называется невырожденной, если $detD^2 f(x^0) \neq 0$*

**Определение 3.** *Произведение главных кривизн гиперповерхности $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в точке $x$ называется гауссовой кривизной и обозначается K(x). Если G и Q — матрицы первой и второй фундаментальных форм гиперповерхности в точке $x$ в некотором базисе, то гауссова кривизна может быть вычислена следующим образом:*

$$K(x) = \frac{detQ}{detG}.$$

Пусть поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ задана графиком гладкой функции $x_3 = f(x_1, x_2)$. Тогда гауссова кривизна имеет вид:

$$K(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right)^2}.$$

В втором параграфе изучены разбиение поверхности и некоторые теоремы теории осцилляторных интегралов.

**Определение 4.** *Осцилляторным интегралом с фазой $f$ и амплитудой $\psi$ называется интеграл вида*

$$J(\lambda, f, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda f(x)} \psi(x) dx,$$

*где $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\psi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$- гладкие функции, причем $\psi$ имеет компактный носитель, $\lambda$ - вещественный параметр.*

В этом параграфе приведены леммы Эрдейи и Ван дер Корпута о поведении осцилляторных интегралов.

В третьем параграфе главы I приводятся постановка задача и обсуждение результатов.

Основная задача формулируется так: найти минимальное значение $q$ такое, что справедлива следующая оценка

$$\left|\int_S e^{ix\cdot\xi} |K(x)|^q \psi(x) d\sigma(x)\right| \leq A|\xi|^{-\frac{n}{2}},$$

где $A$ некоторое положительное число.

Эта задача поставлена в работе Согги и Стейна. Частичное решение аналогичной задачи приведено в работах М. Ковлинг, С. Дисне, Г. Маучери, Д. Мюллера для выпуклых гиперповерхностей конечного линейного типа. Точнее, доказано, что при $0 \leq \psi(x) \leq K(x)^{\frac{1}{2}}$ и $\psi \in C_0^\infty(S)$, преобразование Фурье соответствующей меры. Решение этой задачи в одномерном случае, точнее когда $S$ кривая, заданная графиком полинома, вытекает из результатов Д. М. Оберлина.

Во второй главе диссертации, названной **"Об оценках преобразования Фурье мер с множителем гашения"** приводится решение задачи С.Д.Согги и И.М.Стейна для аналитических гиперповерхностей трехмерного пространства для которых в каждой точке гиперповерхности хотя бы одна из главных кривизн отлична от нуля.

В первом параграфе главы II доказаны вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основной теоремы второй главы.

В связи с проблемой об ограничении максимальных операторов, ассоциированных с гиперповерхностью $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, С.Д. Согги и И.М.Стейном введены демпфированные осцилляторные интегралы следующего вида:

$$\hat{\mu}_q(\xi) := \int_S e^{i(\xi,x)} |K(x)|^q \psi(x) d\sigma(x), \qquad (1)$$

где $K(x)$-гауссова кривизна гиперповерхности в точке $x \in S$, $\psi \in C_0^\infty(S)$ - неотрицательная гладкая функция с компактным носителем, $(x,\xi)$ скалярное произведение векторов $x$ и $\xi$, $d\sigma(x)$- поверхностная мера. Основным результатом второй главы является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть $q \geq 1$ фиксированное вещественное число и $S \subset \mathbb{R}^3$ аналитическая гиперповерхность, для каждой точки которой хотя бы одна из главных кривизн отлична от нуля. Тогда, при любой функции $\psi \in C_0^\infty(S)$, для интеграла $\hat{\mu}_q(\xi)$ справедлива следующая оценка:*

$$\left|\hat{\mu}_q(\xi)\right| \leq \frac{C||\psi||_{C^2}}{|\xi|}, \qquad (2)$$

*где $C$ фиксированное положительное число.*

**Замечание 1.** *При $q \geq 4$ справедливость оценки (2) доказана в работе С.Д. Согги и И.М.Стейна для произвольной гладкой гиперповерхности.*

Таким образом, теорема 1 уточняет результат Согги-Стейна для частного класса аналитических гиперповерхностей.

Более того, значение $q = 1$ оптимально. Точнее, существует гиперповерхность удовлетворяющая условиям теоремы 1 такая, что для любого положительного числа $q < 1$ справедливо асимптотическое соотношение:

$$\hat{\mu}_q(\lambda \boldsymbol{n}) = \frac{C(\psi)}{\lambda^{\frac{q+1}{2}}} + O\left(\lambda^{-\frac{q+2}{2}}\right), \quad (\text{при} \quad \lambda \to +\infty),$$

где $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности в точке (0,0,0). Действительно, пусть $S$ поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная в виде графика функции: $\Phi(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2)^2$. Тогда $K(x_1, x_2) = \frac{-8(x_2 - x_1^2)}{(1+|\nabla\Phi(x_1,x_2)|^2)^2}$. Легко показать, что $\hat{\mu}_q(\lambda \boldsymbol{n})$ имеет следующий вид:

$$\int_U e^{i\lambda(x_2 - x_1^2)^2} |x_2 - x_1^2|^q a(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

где $a(x_1, x_2) = \frac{8^q \psi(x_1, x_2, (x_2 - x_1^2)^2)}{\sqrt{(1+|\nabla\Phi(x_1,x_2)|^2)^{4q-1}}}$. В последнем интеграле используем замену переменных $x_2 - x_1^2 = y_2$ и согласно лемме Эрдейи при больших положительных значениях $\lambda$ получим соотношение:

$$\int_{U'} e^{i\lambda y_2^2} |y_2|^q a(y) dy = 8^q \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right) e^{\frac{i\pi(q+1)}{4}} \lambda^{-\frac{q+1}{2}} \int_R a(x_1, x_1^2) dx_1 + \\ + O(\lambda^{-\frac{q+2}{2}}),$$

где $\Gamma(\cdot)$ - гамма функция Эйлера. Так как $a(0,0) = \psi(0,0,0) > 0$, то главный член отличен от нуля при $\psi(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ для данной гиперповерхности. Отсюда можно заключить, что для последней поверхности $S$ при $q < 1$ оценка вида (2) не имеет место.

Во втором параграфе главы II, мы покажем, что для $\xi$ близких к нормали главная часть асимптотики $\hat{\mu}_q(\xi)$ определяется одномерным осцилляторным интегралом с множителем гашения.

Основным результатом этого параграфа является предложение об асимптотическом поведении $\hat{\mu}_q(\xi)$. То есть: интеграл $\hat{\mu}_q(\xi)$ записывается в виде двумерного осцилляторного интеграла:

$$\hat{\mu}_q(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3 F(x_1, x_2, s_1, s_2)} a(x_1, x_2) |Hessf(x_1, x_2)|^q dx_1 dx_2, \qquad (3)$$

где

$$a(x_1, x_2) = \frac{\psi(x_1, x_2, f(x_1, x_2))}{\sqrt{(1 + |\nabla f(x_1, x_2)|^2)^{4q-1}}},$$

$$F(x_1, x_2, s_1, s_2) = f(x_1, x_2) + s_1 x_1 + s_2 x_2, s_1 = \frac{\xi_1}{\xi_3}, s_2 = \frac{\xi_2}{\xi_3},$$

$$Hessf(x_1, x_2) = det D^2 f(x_1, x_2).$$

Мы будем считать, что $Hessf(0,0) = 0$, ибо если $Hessf(0,0) \neq 0$, то утверждение теоремы 1 следует из классических результатов Герца . А также предположим, что $\psi$ имеет достаточно малый носитель. Заметим, что если $rank(D^2 f(0,0)) = 1$, то либо $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1^2} \neq 0$, либо $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_2^2} \neq 0$. Ради определенности можно предполагать, что $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1^2} \neq 0$. Тогда, согласно теореме о неявной функции, уравнение

$$F_{x_1}(x_1, x_2, s_1, s_2) = f_{x_1}(x_1, x_2) + s_1 = 0$$

имеет единственное аналитическое решение $x_1 = x_1(x_2, s_1)$ в малой окрестности начала координат в $\mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{R}_{s_1}$.

Рассмотрим внутренний интеграл в (3):

$$\widehat{\mu_q}^1 := \int e^{i\xi_3 F_1(x_1,x_2,s_1)} a(x_1, x_2)|Hessf(x_1, x_2)|^q dx_1, \qquad (4)$$

где

$$F_1(x_1, x_2, s_1) = f(x_1, x_2) + s_1 x_1.$$

**Предложение 1.** *Если аналитическая функция $f(x_1, x_2)$ удовлетворяет условиям: $\nabla f(0,0) = 0, \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1^2} \neq 0$, то существует окрестность нуля $U$ такая, что для интеграла $\hat{\mu}_q$ при $q \geq 1$ справедливо следующее асимптоти-ческое соотношение:*

$$\hat{\mu}_q(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\xi_3|}} e^{isign\left(\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1^2}\xi_3\right)\frac{\pi}{4}} \times$$

$$\times \int e^{i\xi_3(F_1(x_1(x_2,s_1),x_2,s_1)+s_2x_2)}|Hessf(x_1(x_2, s_1), x_2)|^q a(x_2, s_1)dx_2 +$$

$$+O\left(\frac{1}{|\xi|}\right) (\text{при} \quad |\xi| \to +\infty),$$

где $a(x_2, s_1) := a(x_1(x_2, s_1), x_2)\varphi(x_2, s_1)$, здесь $\varphi$ некоторая гладкая функция.

В третьем параграфе главы II доказывается аналог теоремы Д.М.Оберлина для аналитических функций, зависящих от параметра $s_1$. Мы рассмотрим следующий одномерный осцилляторный интеграл с множителем гашения:

$$I_q(\xi_3) = \int e^{i\xi_3(F_1(x_2,s_1)+x_2s_2)} \tilde{a}(x_2, s_1)|F''_1(x_2, s_1)|^q dx_2, \qquad (5)$$

где $\tilde{a}(x_2, s_1) = a(x_2, s_1)|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1(x_2, s_1), x_2)|^q$ и $F_1(x_2, s_1)$ аналитическая функция. В этом параграфе доказана следующая:

**Лемма 1.** *Пусть $q \geq \frac{1}{2}$ фиксированное вещественное число. Тогда сущест-вует окрестность $W \subset \mathbb{R}_{x_2}$ начала координат такая, что для любой $a \in C_0^\infty(W)$ справедлива следующая оценка:*

$$|I_q(\xi_3)| \leq \frac{C \parallel a \parallel_V}{|\xi_3|^{\frac{1}{2}}}.$$

В третьей главе, названной **"Об оценке осцилляторных интегралов с фазой, зависящей от параметров"**, приведено решение задачи С.Д.Согги и

И.М.Стейна об оптимальном убывании преобразования Фурье мер с множителем гашения для частного класса семейств аналитических поверхностей трехмерного евклидова пространства. Отметим, что степень, указанная в этой главе точна, не только для семейств аналитических гиперповерхностей, но и для фиксированной аналитической гиперповерхности. А также, в этой главе рассмотрена задача С.Д.Согги и И.М.Стейна об оптимальном убывании преобразования Фурье мер с множителем гашения для произвольных аналитических поверхностей трехмерного евклидова пространства.

Пусть $S(\eta) \subset \mathbb{R}^3$- семейство аналитических гиперповерхностей, зависящих от параметра $\eta \in \mathbb{R}^m$, естественно определяются мера $d\mu(\eta) := \psi(x,\eta)d\sigma(x,\eta)$ и соответствующие осцилляторные интегралы с множителем гашения:

$$\hat{\mu}_q(\xi) = \int_{S(\eta)} e^{i(x,\xi)} |K(x,\eta)|^q \psi(x,\eta) d\sigma(x,\eta), \tag{6}$$

где для каждого фиксированного $\eta$, $d\sigma(x,\eta)$ - поверхностная мера на $S(\eta)$.

В первом параграфе главы III приводятся некоторые факты и теоремы, а также доказательство следующей леммы:

**Лемма 2.** *Пусть $f(x,\eta)$ вещественно-аналитическая функция в начале координат и $q \geq 1$ - фиксированное число. Тогда существует окрестность нуля $W \times U$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ для которой выполняется следующее тождество*

$$|x| g(x,\eta) = |f(x,\eta)|^q - |f(0,\eta)|^q,$$

*где функция $g(x,\eta)$ имеет ограниченную вариацию по $W$ и ее полная вариация ограничена в $U$.*

Во втором параграфе третьей главы рассматривается двумерный осцилляторный интеграл $\hat{\mu}_q(\xi)$ при $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_\varepsilon$:

$$\hat{\mu}_q(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3 F(x_1,x_2,s_1,s_2,\eta)} a(x_1,x_2,\eta) |Hessf(x_1,x_2,\eta)|^q dx_1 dx_2 \tag{7}$$

где

$$a(x_1,x_2,\eta) = \frac{\psi(x_1,x_2,f(x_1,x_2,\eta))}{\sqrt{(1+|\nabla f(x_1,x_2,\eta)|^2)^{4q-1}}},$$

$$F(x_1,x_2,s_1,s_2,\eta) = f(x_1,x_2,\eta) + s_1 x_1 + s_2 x_2, s_1 = \frac{\xi_1}{\xi_3}, s_2 = \frac{\xi_2}{\xi_3},$$

$Hessf(x_1,x_2,\eta) = detD^2 f(x_1,x_2,\eta)$ , где $\Gamma_\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ - конус, определенный соотношением $\Gamma_\varepsilon := \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi_3| \leq \frac{1}{\varepsilon} max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}\}$.

Согласно теореме Фубини интеграл (7) записывается в виде

$$\hat{\mu}_q(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\mu}_q^1(\xi, x_2) e^{i\xi_3 s_2 x_2} dx_2,$$

где

$$\hat{\mu}_q^1(\xi, x_2) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_3 F_1(x_1,x_2,s_1,\eta)} a(x_1,x_2,\eta) |Hessf(x_1,x_2,\eta)|^q dx_1 \tag{8}$$

и $F_1(x_1,x_2,s_1,\eta)=f(x_1,x_2,\eta)+s_1x_1$. В этом параграфе доказано утверждение об асимптотическом поведении интеграла (8):

**Предложение 2.** *Если аналитическая функция $f(x_1,x_2,\eta)$ удовлетворяет условиям: $\nabla_x f(0{,}0{,}0)=0, \frac{\partial^2 f(0{,}0{,}0)}{\partial x_1^2}\neq 0$, то существует окрестность нуля $V_1\times U\subset\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^m$ такая, что для интеграла $\hat{\mu}^1{}_q(\xi,x_2)$ при $q\geq 1$ справедливо следующее асимптотическое соотношение:*

$$\hat{\mu}^1{}_q(\xi,x_2)=\sqrt{\frac{2\pi}{|\xi_3|}}\,e^{i\left(\pm\frac{\pi}{4}sgn\left(\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_1^2}\xi_3\right)+\xi_3F_1(x_1(x_2,s_1,\eta),x_2,s_1)\right)}\times$$

$$\times|Hessf(x_1(x_2,s_1,\eta),x_2,\eta)|^q a(x_2,s_1,\eta)+O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)\quad (\text{при } |\xi|\to+\infty),$$

*где $a(x_2,s_1,\eta):=a(x_1(x_2,s_1,\eta),x_2,\eta)\phi(x_2,s_1,\eta)$, здесь $\phi$ - некоторая гладкая функция, причем $O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$ равномерно относительно малых параметров $(x_2,s_1,\eta)$, т.е. существуют $C>0$ и окрестность нуля $U_1$ такие, что при всех $(x_2,s_1,\eta)\in U_1$ выполняется неравенство $\left|O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)\right|\leq\frac{C}{|\xi|}||a||_{C^2}$.*

В третьем параграфе рассмотрен следующий интеграл

$$I_q(\xi_3)=\int e^{i\xi_3F(x_2,\eta)}a(x_2,\eta)|F''(x_2,\eta)|^q dx_2, \qquad (9)$$

где $F(x_2,\eta)$ - вещественнозначная аналитическая функция в окрестности нуля $W\times U(W\times U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ удовлетворяющая следующим условиям: $F(x_2,\eta)\not\equiv 0, F(0{,}0)=0$ и $a(x_2,\eta)\in C_0^\infty(W\times U)$.

Рассмотрен случай, когда фазовая функция $F(x_2,\eta)$ удовлетворяет условиям подготовительной теоремы Вейерштрасса, т.е. $F(x_2,0)\not\equiv 0$, в этом случае $F(x_2,0)$ имеет особенность типа $A_k$. Это условие эквивалентно тому, что функция $F'_{x_2}(x_2,0)$ в точке $x_2=0$ имеет корень кратности $k$ ($k<\infty$) при условии $F'_{x_2}(0{,}0)=0$.

В этом параграфе доказано, что при $q\geq\frac{1}{2}$ интеграл (9) убывает оптимально. Это утверждение является аналогом теоремы Д.Оберлина. Доказаны следующие теоремы:

**Теорема 2.** *Пусть $q\geq 1$ фиксированное вещественное число и $S(\eta)\subset\mathbb{R}^3$- семейство аналитических гиперповерхностей, зависящих от параметра $\eta\in\mathbb{R}^m$. Если фазовая функция, соответствующая гиперповерхности $S(0)$, имеет особенность типа $A_k$ $(1\leq k<\infty)$ в точке $(0{,}0{,}0)\in S(0)$, тогда существует окрестность нуля $V\times U\subset\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^m$ такая, что при любой функции $\psi\in C_0^\infty(V\times U)$, для интеграла (7) справедлива следующая оценка:*

$$|\hat{\mu}_q(\xi)|\leq\frac{C||\psi(\cdot,\eta)||_{C^2}}{|\xi|},$$

*где $C$ - фиксированное положительное число.*

**Теорема 3.** *Пусть $q \geq 1$ фиксированное вещественное число, $S(\eta) \subset \mathbb{R}^3$- семейство аналитических гиперповерхностей, удовлетворяющих следующим условиям:*

*1) Гиперповерхность $S(0)$ содержит начало координат в $\mathbb{R}^3$ и хотя бы одна из главных кривизн поверхности $S(0)$ в начале координат отлична от нуля.*

*2) Гауссова кривизна $K(x,\eta)$ на гиперповерхности $S(\eta)$ удовлетворяет условию: $K \not\equiv 0$.*

*Тогда существует окрестность начала координат $V \times U \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^m$ такая, что при любой функции $\psi \in C_0^\infty(V \times U)$, для интеграла (7) справедлива следующая оценка:*

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C||\psi(\cdot,\eta)||_{C^2}}{|\xi|},$$

*где $C$ - фиксированное положительное число.*

Доказательство теоремы 3 следует из предложения 3, а доказательство теоремы 2 непосредственно получается из доказательства теоремы 3. Рассмотрим оценку интеграла (9) такую, что фазовая функция $F(x_2,\eta)$ - вещественнозначная аналитическая функция в окрестности нуля и не удовлетворяет условиям подготовительной теоремы Вейерштрасса.

**Предложение 3.** *Пусть $F(x_2,\eta)$ - вещественнозначная аналитическая функция в начале координат. Тогда существует окрестность начала координат $W \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ такая, что для любого вещественного числа $q \geq \frac{1}{2}$ справедлива следующая оценка:*

$$\left|I_q(\xi_3)\right| \leq \frac{C||a||_V}{|\xi_3|^{\frac{1}{2}}}.$$

В четвертом параграфе показано, что условие $q \geq \frac{3}{2}$ гарантирует оптимальное убывание преобразования Фурье поверхностных мер, для произвольных аналитических поверхностей в $\mathbb{R}^3$. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$- произвольная аналитическая гиперповерх-ность и $\psi$ фиксированная функция с компактным носителем. Тогда при $q \geq \frac{3}{2}$ для интеграла (1) справедлива следующая оценка:*

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C||\psi||_{C^2}}{|\xi|},$$

*где $C$ -фиксированное положительное число.*

Таким образом существует число $q_0 \in [1,\frac{3}{2}]$ такое, что при $q \geq q_0$ осцилляторный интеграл оптимально убывает.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В целом, полученные результаты позволяют говорить о достижении цели настоящей работы. Все основные результаты являются новыми и в совокупности вносят определенный вклад в теорию осцилляторных интегралов и гармонического анализа. Данная работа посвящена исследованию оценки преобразования Фурье мер, сосредоточенных на аналитических гиперповерхностях содержащих множитель гашения, оценке осцилляторных интегралов с фазой, зависящей от параметров, преобразованию Фурье мер с множителем гашения для произвольных аналитических поверхностей трехмерного евклидова пространства.

По основным результатам диссертационного исследования мы пришли к следующим выводам:

1. Представлено решение задачи Согги - Стейна для аналитических гиперповерхностей трехмерного пространства для каждой точки, которой хотя бы одна из главных кривизн отлична от нуля.
2. Показана точность полученной оценки для показателя гауссовой кривизны.
3. Получена равномерная оценка демпфированных осциллияторных интегралов, определенных преобразованием Фурье мер на аналитических гиперповерхностях трехмерного пространства.
4. Получена равномерная оценка демпфированных осциллияторных интегралов с фазой, зависящей от параметров.
5. Получено решение задачи Согги - Стейна для некоторого семейства аналитических гиперповерхностей трехмерного пространства.
6. Найден показатель $q \geq \frac{3}{2}$, гарантирующий оптимальное убывание преобразования Фурье поверхностных мер, для призвольных аналитических поверхностей в $\mathbb{R}^3$.
7. Приведен пример, показывающий связь между оптимальной убывании преобразования Фурье поверхностных мер, с множителем гашения и показателем ограниченности максимальных операторов.

Полученные результаты могут быть использованы в теории асимптотического анализа и ее приложениях, а также в математической физике.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY DSc.03/30.07.2020.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY**

---

**SAMARKAND STATE UNIVERSITY**


**MURANOV SHAKHRIDDIN ABDULLAYEVICH**


# ON ESTIMATES FOR OSCILLATORY INTEGRALS WITH DAMPING FACTOR

**01.01.01-mathematical analysis**

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**Samarkand – 2020**

**The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.2.PhD/FM455**

Dissertation has been prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

| | |
|---|---|
| **Scientific supervisor:** | **Ikromov Isroil Akramovich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor |
| **Official opponents:** | **Khalmukhamedov Alimjan Rakhimovich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor |
| | **Karshibayev Khayrullo Kuchkarovich**<br>Candidate of Physical and Mathematical Sciences |
| **Leading organization:** | **Urgench State Universitety** |

Defense will take place «____» _____________2020 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.07.2020.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №______) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2020 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2020 year)

**A. S. Soleev**
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

**A.M. Xalxujayev**
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

**S.N. Lakaev**
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician

## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**The aim of the research work** is solving the problem of Sogge and Stein on the optimal decaying of the Fourier transform of measures with a damping factor for the particular class of analytic surfaces of three-dimensional Euclidean space.

**The object of the research work -** is smooth surface carried measures concentrated on analytic hypersurfaces, the Fourier transform of measures with a damping factor and oscillatory integrals. Maximal operators associated to hypersurfaces.

**Scientific novelty of the research work** is as follows:

It is obtained solution of the Soggi - Stein problem for analytic hypersurfaces of three-dimensional space, for which at each point of the surface at least one of the principal curvatures does not vanish;

The sharpness of the obtained estimate for the degree of Gaussian curvature is shown;

It is obtained a solution of the Sogge - Stein problem for the family of analytic hypersurfaces with one nonvanishing principal curvature of the three-dimensional space.

It is proved the uniform estimates for damped oscillatory integrals with phase, which contains small parameters. Also it is obtained uniform estimates for oscillatory integrals defined by the Fourier transform of measures supported on a family of analytic hypersurfaces.

It is found an exponent $q \geq 3/2$ that guarantees the optimal decay rate of the Fourier transform of surface-carried measures for any analytic surfaces in $\mathbb{R}^3$;

The example is given which shows the relationship between the optimal decay of the Fourier transform of surface carried measures, with the damping factor and the boundedness exponent of the corresponding maximal operators.

**Implementation of the research results**. Based on the results obtained, according to estimates, oscillatory integrals with a damping factor:

the results obtained pertaining to estimates of oscillating integrals with a damping factor are used in the article “On archimedean zeta functions and newton polyhedra” published in the foreign journal “Journal of Mathematecal Analysis and Applications”, Volume 473, Issue 2, 2019, p.1215-1233 (IF = 1.22) in the study of an arithmetic zeta function defined using a polynomial function in many complex variables. The application of these results made it possible to determine the pole located near the origin of the meromorphic continuation of the zeta function defined by the holomorphic function;

estimates of the Fourier transform of measures concentrated on families of analytic surfaces of three-dimensional Euclidean space, with a damping factor, are used in the articles “On the Boundedness of Maximal Operators Associated with Hypersurfaces” and “On the Weierstrass Preparation Theorem” published in foreign journals (“Contemporary Mathematics. Fundamental directions. ”Russia 2018. Volume 64, Issue 4. Pages 650-681. No. 3 (IF = 0.25),“ Annales Polonici Mathematici ”123 (2019), p. 473-479 (IF = 0.9).) to find boundedness exponent of maximal operators and investigation of the behavior of the Fourier transform of measures at infinity. Application of scientific results made it possible to estimate the maximum operator in the space of functions integrable with degree and to determine the behavior of the Fourier transform of measures using the Weierstrass polynomial method;

the estimates obtained for maximal operators in the space of integrable functions to a certain degree and the boundedness property of maximal operators in the space of summable functions were used in the research of the foreign scientific grant number AP05131268 to study a solution to the Cauchy problem of hyperbolic equations (The International University Kazakh-Turkish named after Khoja Ahmed Yasawi, Certificate dated September 11, 2020) Application of the scientific results gave possibility to obtain apriori estimates for solution to the Cauchy problem for hyperbolic equations.

**The structure and volume of the thesis.** The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 107 pages.

## ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
## LIST OF PUBLISHED WORKS

### I бўлим (I часть; I part)


1. Икромов И.А., Муранов Ш.А. Об оценках осцилляторных интегралов с множителем гашения // Математические заметки. -М. -2018.Том104, выпуск 2, С 236-251. (Scopus, IF= 0.606).
2. Muranov Sh.A. On estimates for oscillatory integrals with damping factor // Uzbek Mathematical Journal. – Toshkent 2018.-№4, pp. 112-125.(01.00.00. № 6).
3. Муранов Ш.А. Об оценке осцилляторных и нтегралов с фазой, зависящей от параметров // Уфимский математический журнал.-2019. Том 11, № 4, С.79-91. (Scopus, IF=0.4220).
4. Ikromov I. A., Muranov Sh. A. On estimate for the damped oscillatory Integral // Scientific journal, Samarkand state university.-Samarkand 2019, -№ 5, pp.5-13. (01.00.00.№ 2)


### II бўлим (II часть; II part)


5. Икромов И.А., Муранов Ш.А. Об оптимальном убывании осцилляторных интегралов // «Актуальные проблемы динамических систем и их приложения», Республиканский научный конференция с участием зарубежных учёных. 1-3 мая 2017 года, г.Ташкент.стр 32-34.
6. Икромов И.А., Муранов Ш.А. Об оценках осцилляторных интегралов, с множителем гашения // Республиканская научная конференция “Новые рерультаты математика и их приложения”. 14-15 май . 2018 Самарканд. стр.26-28.
7. Икромов И.А., Муранов Ш.А. Об оценке оцилляторных интегралов, с фазой, зависящей от параметров // “Mathematical analysis and its application to mathematical physics”. September 17-20.2018. Samarkand. pp.21-22.
8. Икромов И.А., Муранов Ш.А. Об оценках осцилляторных интегралов с множителем гашения // Навоий давлат педогогика институти “Фундаментал математика муаммолари ва уларнинг татбиклари” номли республика илмий амалий конфренция. 25- май Навоий 2019 й. С.27-29.
9. Икромов И.А., Муранов Ш.А. Об оценке осцилляторных интегралов с квазиоднородной фазой. “Математика, физика ва ахборот технологияларининг долзарб муаммолари” мавзусидаги республика миқёсидаги онлайн илмий-амалий анжумани тезислар тўплами. Бухоро, 2020 йил 15 апрель.
10. Муранов Ш.А. Об оценках демпфированные осцилляторных интегралов // XXXII Международная научно-практическая конференция «Научный форум: технические и физико-математические науки». -Москва, Россия. №2(32). Апрель 2020. С.22-26.
11. Об оценке осцилляторных интегралов с квазиоднородной фазой // XXV-XXVI Международной научно-практической конференции «Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований». -Новосибирск. Россия. №3-4(20). С.34-37.